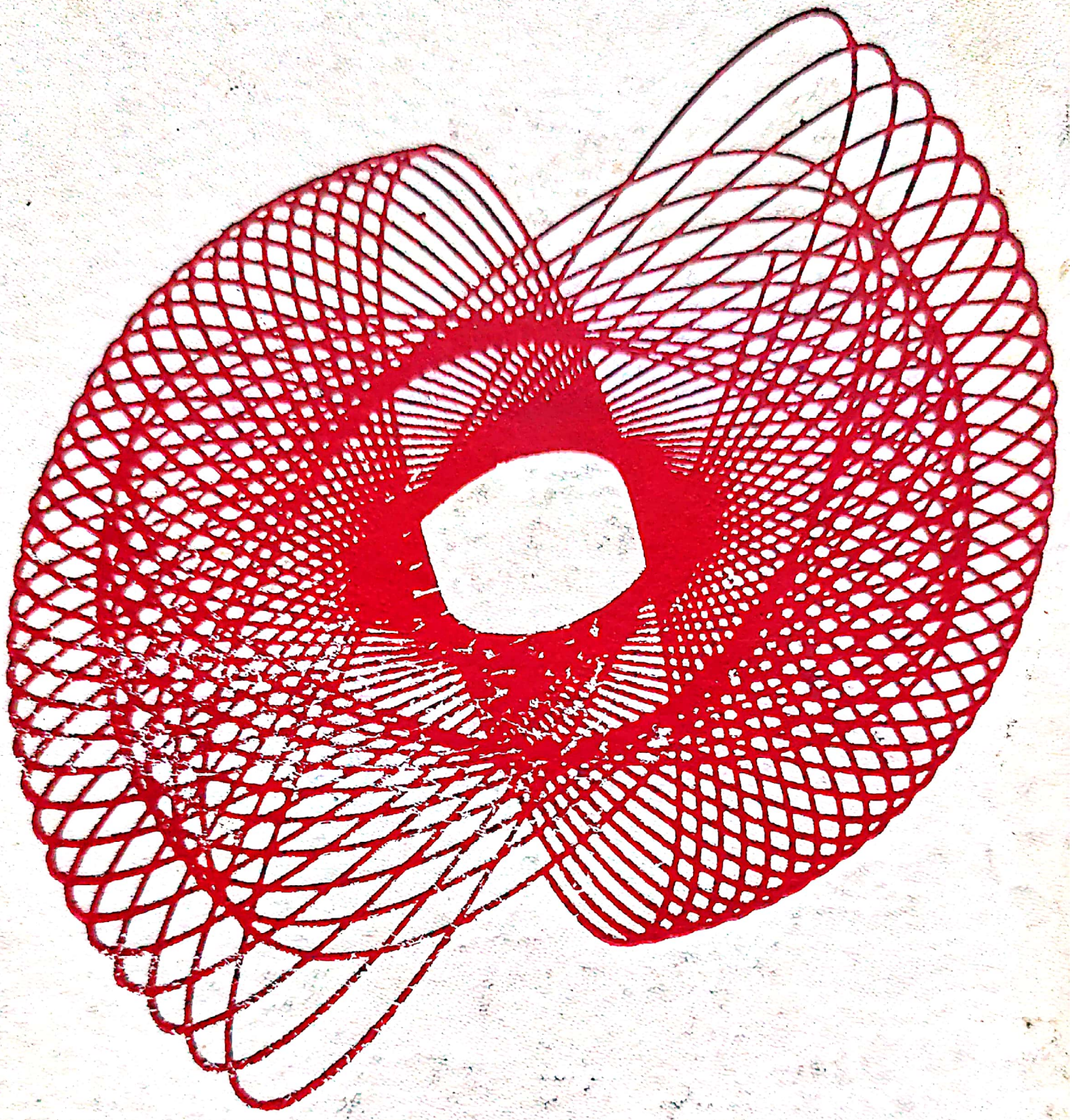


RODICA TRANDAFIR

MATEMATICI PENTRU INGINERI

CULEGERE DE PROBLEME

Scanned with OKEN Scanner

RODICA TRANDAFIR

MATEMATICI PENTRU INGINERI

CULEGERE DE PROBLEME

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREȘTI — 1969

Scanned with OKEN Scanner

Culegerea de probleme urmăreşte în mare parte tabla de materii a cărţii „MATEMATICI PENTRU INGINERI" în două volume de L. J. Nicolescu şi M. Stoka şi prezintă probleme rezolvate, obişnuind astfel pe cititori cu utilizarea lesnicioasă a aparatului matematicii moderne aplicate.

Pentru a urmări mai uşor mersul rezolvării problemelor, fiecare capitol este precedat de o scurtă introducere care conţine principalele definiţii, teoreme şi formule utilizate în capitolul respectiv.

Lucrarea se adresează inginerilor, cercetătorilor, economiştilor, matematicienilor precum şi, ca material auxiliar, studenţilor.

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Culegerea pe care o prezentăm conține probleme complet rezolvate, grupate în nouă capitole și anume: teoria cîmpurilor, funcții de o variabilă complexă, elemente de calcul matriceal și tensorial, serii Fourier și integrala Fourier, calcul operațional, funcții și ecuații speciale, ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea, teoria probabilităților și statistică matematică și elemente de programare matematică.

Aceste capitole sînt absolut necesare pentru completarea culturii matematice a unui inginer. Am insistat asupra unor capitole cu multe aplicații cum sînt: teoria probabilităților și statistică matematică și elemente de programare matematică. Fiecare capitol este precedat de o parte introductivă care conține principalele definiții, teoreme și formule.

Bineînțeles că pentru a putea studia problemele din această culegere, este necesară o cunoaștere temeinică a analizei matematice, a algebrei superioare și a geometriei analitice și diferențiale, care fac obiectul altor culegeri de probleme.

AUTOAREA

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul I

TEORIA CÎMPURILOR

Fiind dat un domeniu D din spaţiul euclidian E_3 raportat la un sistem de axe de coordonate carteziene ortogonale $Oxyz$, se numeşte *cîmp scalar* o funcţie scalară

$$\varphi(P)=\varphi(x, y, z),$$

definită pentru orice punct $P(x, y, z)\in D$.

Suprafaţa de ecuaţie

$$\varphi(P)=\varphi(P_0), \qquad (P_0=\text{fix}),$$

se numeşte *suprafaţă de nivel* a cîmpului $\varphi(P)$, ataşată punctului P_0.

Fie o curbă (Γ) care trece prin punctul P_0, $\vec{t}$ versorul tangentei la curbă în acest punct, P un punct oarecare al curbei (Γ) şi l_{P_0P} abscisa curbilinie a punctului P faţă de P_0.

Dacă

$$\lim_{P\to P_0} \frac{\varphi(P)-\varphi(P_0)}{l_{P_0P}}$$

există, valoarea ei se numeşte *derivata cîmpului scalar* $\varphi(P)$ *după direcţia de versor* $\vec{t}$ în punctul P_0 şi se notează

$$\left(\frac{d\varphi}{d\vec{t}}\right)_{P_0}.$$

Dacă α, β, γ sînt componentele versorului $\vec{t}$, avem

$$\left(\frac{d\varphi}{d\vec{t}}\right)_{P_0} = \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y_0} + \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}.$$

Notînd cu $\vec{n}$ versorul normalei la suprafaţa de nivel care trece prin P_0 şi cu θ unghiul dintre $\vec{t}$ şi $\vec{n}$, avem

$$\left(\frac{d\varphi}{d\vec{t}}\right)_{P_0} = \left(\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\right)_{P_0} \cdot \cos\theta.$$

De asemenea

$$\left(\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\right)_{P_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}\right)^2}.$$

Dacă $\varphi_h(P)$, $(h=1, \ldots, n)$, sînt funcţii diferenţiabile şi la fel funcţia $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, atunci

$$\frac{dF}{d\vec{t}} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial\varphi_h}\frac{d\varphi_h}{d\vec{t}}.$$

Vectorul de componente $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}$ se numeşte *gradientul* cîmpului scalar diferenţiabil $\varphi(P)$ în punctul $P_0 \in D$ şi se notează

$$(\operatorname{grad}\varphi)_{P_0}.$$

Avem

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{d\varphi}{d\vec{n}}\vec{n}.$$

De asemenea

$$\operatorname{grad} F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial\varphi_h} \operatorname{grad}\varphi_h.$$

Operatorul diferenţial vectorial

$$\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

se notează cu $\vec{\nabla}$ şi se numeşte *operatorul lui Hamilton* sau operatorul *nabla*.

Scanned with OKEN Scanner

Deci

$$\operatorname{grad}\varphi=\vec{\nabla}\varphi,\quad \frac{d\varphi}{d\vec{t}}=(\vec{t}\,\vec{\nabla})\varphi.$$

Fie $\vec{u}$ un vector de mărime u și versor $\vec{u}_0$, adică $\vec{u}=u\vec{u}_0$. Notăm $\vec{u}\,\vec{\nabla}=u(\vec{u}_0\vec{\nabla})$ și numim expresia

$$(\vec{u}\,\vec{\nabla})\varphi=u\frac{d\varphi}{d\vec{u}_0}$$

derivata funcției $\varphi(P)$ *în raport cu vectorul* $\vec{u}$.

Funcția vectorială

$$\vec{v}(P)=\vec{v}(x,\ y,\ z)$$

definită pentru orice punct $P(x,\ y,\ z)\in D$ se numește *cîmp vectorial.*

O curbă (Γ) situată în D se numește *linie de cîmp* pentru cîmpul vectorial $\vec{v}(P)$, dacă în fiecare punct P al său vectorul $\vec{v}(P)$ este tangent curbei.

Liniile de cîmp sînt soluțiile ecuației diferențiale vectoriale

$$\vec{v}\times d\vec{r}=0$$

sau ale sistemului diferențial

$$\frac{dx}{v_1(x,\ y,\ z)}=\frac{dy}{v_2(x,\ y,\ z)}=\frac{dz}{v_3(x,\ y,\ z)}. \tag{1}$$

O suprafață generată de liniile de cîmp se numește *suprafață de cîmp*.

Dacă $F_1(x,\ y,\ z)=C_1$, $F_2(x,\ y,\ z)=C_2$, (C_1, C_2=const), sînt soluții ale sistemului (1), atunci

$$\Phi(F_1,\ F_2)=0$$

este o suprafață de cîmp.

Expresia

$$\vec{i}\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}$$

se numește *divergența* cîmpului vectorial diferențiabil $\vec{v}(P)$ și se notează $\operatorname{div}\vec{v}$.

Notînd cu v_1, v_2, v_3 componentele cîmpului vectorial $\vec{v}(P)$, avem

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Dacă α, β, γ sînt componentele versorului $\vec{t}$, avem

$$\left(\frac{d\varphi}{d\vec{t}}\right)_{P_0} = \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y_0} + \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}.$$

Notînd cu $\vec{n}$ versorul normalei la suprafaţa de nivel care trece prin P_0 şi cu θ unghiul dintre $\vec{t}$ şi $\vec{n}$, avem

$$\left(\frac{d\varphi}{d\vec{t}}\right)_{P_0} = \left(\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\right)_{P_0} \cdot \cos\theta.$$

De asemenea

$$\left(\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\right)_{P_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}\right)^2}.$$

Dacă $\varphi_h(P)$, $(h=1, \ldots, n)$, sînt funcţii diferenţiabile şi la fel funcţia $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, atunci

$$\frac{dF}{d\vec{t}} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial\varphi_h}\frac{d\varphi_h}{d\vec{t}}.$$

Vectorul de componente $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}$ se numeşte *gradientul* cîmpului scalar diferenţiabil $\varphi(P)$ în punctul $P_0 \in D$ şi se notează

$$(\operatorname{grad}\varphi)_{P_0}.$$

Avem

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{d\varphi}{d\vec{n}}\vec{n}.$$

De asemenea

$$\operatorname{grad} F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial\varphi_h}\operatorname{grad}\varphi_h.$$

Operatorul diferenţial vectorial

$$\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

se notează cu $\vec{\nabla}$ şi se numeşte *operatorul lui Hamilton* sau operatorul *nabla*.

Scanned with OKEN Scanner

Deci

$$\operatorname{grad}\varphi=\vec{\nabla}\varphi,\quad \frac{d\varphi}{d\vec{t}}=(\vec{t}\,\vec{\nabla})\varphi.$$

Fie $\vec{u}$ un vector de mărime u și versor $\vec{u}_0$, adică $\vec{u}=u\vec{u}_0$. Notăm $\vec{u}\,\vec{\nabla}=u(\vec{u}_0\vec{\nabla})$ și numim expresia

$$(\vec{u}\,\vec{\nabla})\varphi=u\frac{d\varphi}{d\vec{u}_0}$$

derivata funcției $\varphi(P)$ *în raport cu vectorul* $\vec{u}$.

Funcția vectorială

$$\vec{v}(P)=\vec{v}(x,\ y,\ z)$$

definită pentru orice punct $P(x,\ y,\ z)\in D$ se numește *cîmp vectorial.*

O curbă (Γ) situată în D se numește *linie de cîmp* pentru cîmpul vectorial $\vec{v}(P)$, dacă în fiecare punct P al său vectorul $\vec{v}(P)$ este tangent curbei.

Liniile de cîmp sînt soluțiile ecuației diferențiale vectoriale

$$\vec{v}\times d\vec{r}=0$$

sau ale sistemului diferențial

$$\frac{dx}{v_1(x,\ y,\ z)}=\frac{dy}{v_2(x,\ y,\ z)}=\frac{dz}{v_3(x,\ y,\ z)}. \tag{1}$$

O suprafață generată de liniile de cîmp se numește *suprafață de cîmp.*

Dacă $F_1(x,\ y,\ z)=C_1$, $F_2(x,\ y,\ z)=C_2$, (C_1, C_2=const), sînt soluții ale sistemului (1), atunci

$$\Phi(F_1,\ F_2)=0$$

este o suprafață de cîmp.

Expresia

$$\vec{i}\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}$$

se numește *divergența* cîmpului vectorial diferențiabil $\vec{v}(P)$ și se notează $\operatorname{div}\vec{v}$.

Notînd cu v_1, v_2, v_3 componentele cîmpului vectorial $\vec{v}(P)$, avem

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Vectorul de componente

$$\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z},\quad \frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x},\quad \frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}$$

se numește *rotorul* cîmpului vectorial diferențiabil $\vec{v}(P)$ și se notează rot $\vec{v}$.

Avem

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

și

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\vec{\nabla}\times\vec{v}.$$

Avem următoarele formule de calcul:

$$\operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi,$$
$$\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi,$$
$$\operatorname{div}(\vec{u}+\vec{v})=\operatorname{div}\vec{u}+\operatorname{div}\vec{v},$$
$$\operatorname{div}(\varphi\vec{v})=\varphi\operatorname{div}\vec{v}+\vec{v}\operatorname{grad}\varphi,$$
$$\operatorname{div}(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{v}\operatorname{rot}\vec{u}-\vec{u}\operatorname{rot}\vec{v},$$
$$\operatorname{rot}(\vec{u}+\vec{v})=\operatorname{rot}\vec{u}+\operatorname{rot}\vec{v},$$
$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{v})=\varphi\operatorname{rot}\vec{v}-\vec{v}\times\operatorname{grad}\varphi,$$
$$\operatorname{grad}(\vec{u}\vec{v})=\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{u}+\vec{u}\times\operatorname{rot}\vec{v}+(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{u}+(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{v},$$
$$\operatorname{rot}(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{u}\operatorname{div}\vec{v}-\vec{v}\operatorname{div}\vec{u}+(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{u}-(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{v},$$
$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\Delta\varphi,$$
$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)=0,$$
$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v})=0,$$
$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{v})=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v})-\Delta\vec{v}.$$

Scanned with OKEN Scanner

O funcție $\varphi(P)$ care admite derivate parțiale de ordinul al doilea se numește *funcție armonică* dacă verifică *ecuația lui Laplace*

$$\Delta\varphi=0.$$

Variabilele x_1, x_2, x_3 definite de

$$\left.\begin{aligned} x&=x(x_1,\ x_2,\ x_3)\\ y&=y(x_1,\ x_2,\ x_3)\\ z&=z(x_1,\ x_2,\ x_3)\end{aligned}\right\},$$

unde $x(x_1, x_2, x_3)$, $y(x_1, x_2, x_3)$, $z(x_1, x_2, x_3)$ sînt funcții de două ori diferențiabile și unde $\frac{D(x, y, z)}{D(x_1, x_2, x_3)}\neq 0$, constituie un sistem de coordonate curbilinii în spațiul E_3.

Dacă notăm

$$\vec{r}_h=\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_h}\right)_{P_0},\quad (h=1,\ 2,\ 3),$$

cantitățile $R_h=|\vec{r}_h|$ se numesc *parametrii lui Lamé* ai sistemului de coordonate curbilinii x_1, x_2, x_3. Notăm $\vec{r}_h=R_h\vec{u}_h$, $\vec{u}_h$ fiind versorii noului sistem de axe de coordonate. Avem

$$\operatorname{grad} F=\sum_{h=1}^{3}\frac{1}{R_h}\frac{\partial F}{\partial x_h}\vec{u}_h,$$

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\frac{1}{R_1R_2R_3}\begin{vmatrix} R_1\vec{u}_1 & R_2\vec{u}_2 & R_3\vec{u}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ R_1v_1 & R_2v_2 & R_3v_3\end{vmatrix},$$

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{1}{R_1R_2R_3}\left[\frac{\partial(v_1R_2R_3)}{\partial x_1}+\frac{\partial(v_2R_1R_3)}{\partial x_2}+\frac{\partial(v_3R_1R_2)}{\partial x_3}\right],$$

$$\Delta F=\frac{1}{R_1R_2R_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{R_2R_3}{R_1}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{R_1R_3}{R_2}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{R_1R_2}{R_3}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)\right].$$

Integrala curbilinie

$$\int_\Gamma \vec{v}\,d\vec{r}$$

se numeşte *circulaţia* cîmpului vectorial $\vec{v}(P)$ pe curba închisă rectificabilă, orientată (Γ).

Expresia

$$\Phi(\vec{v},\ \Sigma)=\iint_{\Sigma}\vec{n}\,\vec{v}\,d\sigma$$

se numeşte *fluxul total* al cîmpului vectorial $\vec{v}(P)$ prin porţiunea de suprafaţă închisă orientată (Σ), definită de ecuaţiile parametrice $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$, unde funcţiile x, y, z au derivate de ordinul întîi, integrabile în domeniul (u, v) în care este definită porţiunea de suprafaţă.

Fie (Σ) o suprafaţă închisă care mărgineşte un domeniu tridimensional Ω. Suprafaţa (Σ) şi domeniul Ω au următoarele proprietăţi:

1° O dreaptă paralelă cu axele de coordonate intersectează suprafaţa (Σ) în cel mult două puncte.

2° Domeniul tridimensional Ω se proiectează pe planul xOy după un domeniu bidimensional D. Cilindrul proiectant al lui Ω pe planul xOy cu generatoarele paralele cu Oz este tangent la Ω în lungul unei curbe (Γ) care împarte pe (Σ) în două suprafeţe. Analog pentru planele yOz şi zOx.

3° Suprafaţa (Σ) este bilateră.

4° Suprafaţa (Σ) este formată dintr-un număr finit de porţiuni netede.

Avem următoarele formule integrale:

$$\iint_{\Sigma}\vec{n}\,\vec{v}\,d\sigma=\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{v}\,d\omega$$

(*formula lui Gauss-Ostrogradski* sau *formula integrală a divergenţei*),

$$\iint_{\Sigma}\vec{n}\,\varphi\,d\sigma=\iiint_{\Omega}\operatorname{grad}\varphi\,d\omega$$

(*formula integrală a gradientului*);

$$\iint_{\Sigma}\vec{n}\times\vec{v}\,d\sigma=\iiint_{\Omega}\operatorname{rot}\vec{v}\,d\omega$$

(*formula integrală a rotorului*);

$$\iint_{\Sigma}\varphi\frac{d\psi}{d\vec{n}}d\sigma=\iiint_{\Omega}(\operatorname{grad}\varphi\operatorname{grad}\psi+\varphi\Delta\psi)\,d\omega$$

Scanned with OKEN Scanner

(*prima formulă integrală a lui Green*);

$$\iint_{\Sigma}\left(\varphi\frac{d\psi}{d\vec{n}}+\psi\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\right)d\sigma=\iiint_{\Omega}(\varphi\Delta\psi-\psi\Delta\varphi)d\omega$$

(*a doua formulă integrală a lui Green*).

Fie (S) o porțiune de suprafață bilateră orientată avînd o arie limitată de un contur rectificabil (Γ) reprezentată prin ecuațiile parametrice

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),$$

unde punctul (u,v) parcurge un domeniu D, funcțiile $x(u,v)$, $y(u,v)$ $z(u,v)$ fiind diferențiabile în D.

În aceste condiții avem *formula integrală a lui Stokes*

$$\int_{\Gamma}\vec{v}\,d\vec{r}=\iint_{S}\vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{v}\,d\sigma.$$

Un cîmp vectorial $\vec{v}(P)$ diferențiabil într-un domeniu D se numește *irotațional* sau *lamelar* dacă $\mathrm{rot}\,\vec{v}=0$.

Orice cîmp vectorial irotațional este gradientul cîmpului scalar

$$\varphi(P)=\int_{AP}\vec{v}\,d\vec{r},\quad (A=\text{fix}).$$

Funcția φ se mai numește și *funcție de forță*.

Un cîmp vectorial $\vec{v}(P)$ diferențiabil într-un domeniu D se numește *solenoidal* dacă $\mathrm{div}\,\vec{v}=0$.

Orice cîmp solenoidal este rotorul unui cîmp vectorial numit *potențial vector* al cîmpului dat.

Un cîmp vectorial $\vec{v}(P)$ se numește *biscalar* dacă există o funcție $\lambda(P)$ derivabilă și o funcție $F(P)$ de două ori diferențiabilă, astfel încît

$$\vec{\quad}\qquad \lambda\,\mathrm{grad}\,F.$$

Avem

$$\vec{v}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}=0.$$

Un cîmp vectorial de forma

$$\vec{v}(P)=\mu\frac{\vec{r}}{r^3},$$

unde μ este o constantă iar $\vec{r}=\overrightarrow{PA}$, A fiind fix, se numeşte *cîmp newtonian*.

Funcţia $u(P)=-\frac{\mu}{r}$ se numeşte *potenţial newtonian* al acestui cîmp.

Sistemul

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{u}(P)&=\vec{v}(P)\\ \operatorname{div}\vec{u}(P)&=q(P)\end{aligned}\right\} \qquad (p\in D)$$

cu condiţiile

$$|\vec{u}(P)|\leq\frac{A}{\rho^{\lambda+1}},\quad (\rho=|\overrightarrow{OP}|>R),$$

A şi λ fiind constante pozitive, unde $\vec{v}(P)$ şi $q(P)$ satisfac relaţiile

$$\operatorname{div}\vec{v}=0,\quad |q(P)|\leqslant\frac{B}{\rho^{2+\mu}},\quad \vec{n}\vec{v}\,|_{\Sigma}=0,$$

B şi μ fiind constante pozitive, are soluţia unică

$$\vec{u}(M)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{q(P)\vec{r}+\vec{v}(P)\times\vec{r}}{r^3}\,d\omega_p,$$

Ω şi Σ satisfac condiţiile 1°, 2°, 3°, 4°.

PROBLEME

1. Fie cîmpul scalar $\varphi(r)=\vec{a}\vec{r}$, unde $\vec{a}$ este un vector unitar constant, iar $\vec{r}$ vectorul de poziţie al punctului curent din spaţiu.

1° Să se determine suprafeţele de nivel ale cîmpului şi suprafaţa de nivel care trece prin puctul A (1, 2, 3).

2° Să se calculeze derivata după o direcţie $\vec{s}$ a funcţiei $\varphi(r)$ şi să se arate că nu depinde de punct ci numai de $\vec{s}$, iar $\frac{d\varphi}{d\vec{a}}=1$.

Scanned with OKEN Scanner

R. Suprafețele de nivel sînt date de ecuația

$$\vec{a}\,\vec{r}=C, \quad (C=\text{const})$$

și reprezintă plane perpendiculare pe $\vec{a}$.

Planul perpendicular pe $\vec{a}$ care trece prin A (1, 2, 3) este

$$\vec{a}\,\vec{r}=\vec{a}\,\vec{b} \text{ cu } \vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}.$$

2° Avem

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vec{s}}=\vec{s}\ \mathrm{grad}\ \varphi,$$

dar $\mathrm{grad}\,\varphi=\vec{a}$, deci

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vec{s}}=\vec{a}\,\vec{s}.$$

Rezultă că

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vec{a}}=\vec{a}\ \mathrm{grad}\ \varphi=a^2=1.$$

2. Să se determine suprafața de nivel care trece prin origine pentru cîmpul scalar $\varphi(r)=(\vec{a}\times\vec{r})\,(\vec{b}\times\vec{r})$, unde $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sînt vectori constanți, și derivata după o direcție $\vec{s}$. Dacă $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{s}$ formează un triedru tridreptunghic, să se arate că $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vec{s}}=0$.

R. Dacă $\vec{a}\times\vec{b}=0$, suprafețele de nivel sînt

$$\varphi=\alpha\,(\vec{a}\times\vec{r})^2=\text{const}$$

și reprezintă cilindrii de rotație în jurul unei axe care trece prin O paralelă cu $\vec{a}$.

Dacă $\vec{a}\times\vec{b}\neq 0$ și $\vec{a}\,\vec{b}=0$, suprafețele de nivel

$$\varphi=-(\vec{a}\,\vec{r})\,(\vec{b}\,\vec{r})=\text{const}$$

reprezintă cilindrii hiperbolici omotetici.

Dacă $\vec{a}\times\vec{b}\neq 0$ și $\vec{a}\,\vec{b}\neq 0$, suprafețele de nivel

$$\varphi=(\vec{a}\,\vec{b})r^2-(\vec{a}\,\vec{r})\,(\vec{b}\,\vec{r})=\text{const}$$

reprezintă o familie de cuadrice.

Scanned with OKEN Scanner

Avem $\varphi(0)=0$. Suprafaţa de nivel care trece prin $O(0,\ 0,\ 0)$ are ecuaţia

$$(\vec{a}\ \vec{b})r^2-(\vec{a}\ \vec{r})\ (\vec{b}\ \vec{r})=0$$

şi reprezintă un con cu vîrful în origine.

Avem

$$\frac{d\varphi}{d\vec{s}}=\vec{s}\ \text{grad}\ \varphi$$

şi

$$d\varphi=[(\vec{a}\times\vec{r})\times\vec{b}+(\vec{b}\times\vec{r})\times\vec{a}]\ d\vec{r},$$

de unde rezultă

$$\text{grad}\ \varphi=(\vec{a}\times\vec{r})\times\vec{b}+(\vec{b}\times\vec{r})\times\vec{a},$$

deci

$$\frac{d\varphi}{d\vec{s}}=\vec{s}\ \text{grad}\ \varphi=(\vec{a}\times\vec{r})\ (\vec{b}\times\vec{s})+(\vec{a}\times\vec{s})\ (\vec{b}\times\vec{r})$$

sau

$$\frac{d\varphi}{d\vec{s}}=2\ (\vec{a}\ \vec{b})(\vec{s}\ \vec{r})-(\vec{a}\ \vec{s})\ (\vec{b}\ \vec{r})-(\vec{s}\ \vec{b})\ (\vec{s}\ \vec{r}).$$

Dacă $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{s}$ formează un triedru tridreptunghic, atunci $(\vec{a}\ \vec{b})=(\vec{a}\ \vec{s})=(\vec{s}\ \vec{b})=0$, deci $\frac{d\varphi}{d\vec{s}}=0$.

3. Să se determine unghiul dintre gradienţii cîmpului $u=\frac{x}{r^2}$ în punctele $A\ (1,\ 2,\ 3)$ şi $B\ (-3,\ 1,\ 0)$.

R. Avem

$$\text{grad}\ u=x\ \text{grad}\ \frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}\text{grad}\ x=\frac{r^2-2x^2}{r^4}\vec{i}-\frac{2xy}{r^4}\vec{j}-\frac{2xz}{r^4}\vec{k}$$

şi

$$\text{grad}_A\ u=\frac{7}{81}\vec{i}-\frac{4}{81}\vec{j}-\frac{4}{81}\vec{k},\quad \text{grad}_B\ u=\frac{-8}{100}\vec{i}+\frac{6}{100}\vec{j}.$$

Rezultă

$$\cos\alpha=\frac{\text{grad}_A\ u\cdot\text{grad}_B\ u}{|\text{grad}_A\ u|\cdot|\text{grad}_B\ u|}=-\frac{8}{9},$$

de unde rezultă

$$\alpha=152°44'.$$

4. Fie $\Phi(x, y, z)$ și $\Phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ temperaturile în două vecinătăți ale punctelor $P(x, y, z)$ și $Q(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ ale unei regiuni oarecare din spațiul E_3.

1° Să se interpreteze fizic cantitatea

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta\vec{s}} = \frac{\Phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \Phi(x, y, z)}{\Delta\vec{s}},$$

unde $\Delta\vec{s}$ este distanța dintre punctele P și Q.

2° Să se evalueze $\lim\limits_{\Delta\vec{s}\to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\vec{s}} = \frac{d\Phi}{d\vec{s}}$ și să se interpreteze fizic.

3° Să se arate că $\frac{d\Phi}{d\vec{s}} = \vec{\nabla}\Phi \cdot \frac{d\vec{r}}{d\vec{s}}$.

4° Să se calculeze derivata lui $\Phi = x^2yz + 4xz^2$ în $(1, -2, -1)$ în direcția $2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

R. 1° Deoarece $\Delta\Phi$ este variația de temperatură între punctele P și Q iar $\Delta\vec{s}$ este distanța dintre aceste puncte, $\frac{\Delta\Phi}{\Delta\vec{s}}$ reprezintă valoarea medie a variației de temperatură pe unitatea de distanță în direcția de la P la Q.

2° Dar

$$\Delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z,$$

unde ε_1, ε_2, ε_3 tind către zero o dată cu $\Delta\vec{s}$.

Atunci

$$\lim_{\Delta\vec{s}\to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\vec{s}} = \lim_{\Delta\vec{s}\to 0} \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta\vec{s}} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta\vec{s}} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta\vec{s}}\right]$$

sau

$$\frac{d\Phi}{d\vec{s}} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{d\vec{s}} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{d\vec{s}} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{d\vec{s}}.$$

$\frac{d\Phi}{d\vec{s}}$ reprezintă mărimea variației temperaturii în raport cu distanța la punctul P într-o direcție spre Q. Aceasta se mai numește derivata funcției Φ după direcția $\vec{s}$.

3° $$\frac{d\Phi}{d\vec{s}} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}\right)\left(\frac{dx}{d\vec{s}}\vec{i} + \frac{dy}{d\vec{s}}\vec{j} + \frac{dz}{d\vec{s}}\vec{k}\right) = \vec{\nabla}\Phi \cdot \frac{d\vec{r}}{d\vec{s}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $\frac{d\vec{r}}{d\vec{s}}$ este un vector unitar, $\vec{\nabla}\Phi \cdot \frac{d\vec{r}}{d\vec{s}}$ este componenta lui $\vec{\nabla}\Phi$ în direcția acestui vector unitar, adică este proiecția lui $\vec{\nabla}\Phi$ în direcția $\frac{d\vec{r}}{d\vec{s}}$. Această proiecție este maximă, cînd $\vec{\nabla}\Phi$ și $\frac{d\vec{r}}{d\vec{s}}$ au aceeași direcție.

4° $\vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}(x^2yz + 4xz^2) = (2xyz + 4z^2)\vec{i} + x^2z\vec{j} + (x^2y + 8xz)\vec{k}$,

$\vec{\nabla}\Phi_A = 8\vec{i} - \vec{j} - 10\vec{k}$, unde $A(1, -2, -1)$.

Vectorul unitar în direcția $2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ este

$$\vec{a} = \frac{2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}.$$

Deci

$$\vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{a} = (8\vec{i} - \vec{j} - 10\vec{k})\left(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right) = \frac{37}{3}.$$

Deoarece această expresie este pozitivă, Φ este crescătoare în această direcție.

5. Să se determine liniile de cîmp ale cîmpului vectorial defini prin vectorul

$$\vec{v} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}$$

și suprafața de cîmp care trece prin curba $x = 2y$, $z = a$.

R. Sistemul diferențial al liniilor de cîmp este

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{yx^2} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}$$

și se reduce la

$$\left.\begin{aligned} ydx - xdy &= 0 \\ \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} &= \frac{dz}{z} \end{aligned}\right\}.$$

Integrînd, se obțin ecuațiile liniilor de cîmp

$$x^2 - y^2 = C_1,$$

$$\frac{z}{xy} = C_2.$$

Să punem condiția ca o linie de cîmp să întîlnească curba $x=2y$, $z=a$. Din ecuația $x^2-y^2=C_1$, folosind ecuația $x=2y$, se obține $y^2=\frac{C_1}{3}$, iar din ecuația $\frac{z}{xy}=C_2$, folosind ecuațiile $z=a$ și $x=2y$, obținem $y^2=\frac{a}{2C_2}$. Din relațiile $y^2=\frac{C_1}{3}$ și $y^2=\frac{a}{2C_2}$ obținem relația de condiție

$$2C_1C_2=3a.$$

Suprafața de cîmp se obține prin eliminarea parametrilor C_1 și C_2 între ecuația liniilor de cîmp și această relație. Obținem

$$2z(x^2-y^2)-3axy=0.$$

6. Să se determine liniile de cîmp ale cîmpului vectorial definit prin vectorul

$$\vec{v}=(\vec{a}\,\vec{r})\vec{b}\times\vec{r}-(\vec{b}\,\vec{r})\vec{a}\times\vec{r}$$

și suprafața de cîmp care trece prin cercul $\vec{a}\,\vec{r}=r^2$, $\vec{a}\,\vec{r}+\vec{b}\,\vec{r}=h^2$.

R. Ecuația diferențială vectorială a liniilor de cîmp este

$$\vec{v}\times d\vec{r}=0,$$

de unde rezultă

$$(\vec{a}\,\vec{r})\,(\vec{b}\times\vec{r})\times d\vec{r}-(\vec{b}\,\vec{r})\,(\vec{a}\times\vec{r})\times d\vec{r}=0,$$

care se mai poate scrie

$$\vec{r}\,(\vec{a}\times\vec{b})\,(\vec{r}\times d\vec{r})-(\vec{r}\,d\vec{r})\,(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{r}=0. \qquad (1)$$

Scriind vectorul $\vec{v}$ sub forma

$$\vec{v}=[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{r}]\times\vec{r},$$

rezultă că vectorii $\vec{r}$ și $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{r}$ nu sînt coliniari, ci perpendiculari, deci relația (1) are loc numai în condițiile

$$(\vec{a}\times\vec{b})\,(\vec{r}\times d\vec{r})=0,$$

$$\vec{r}\,d\vec{r}=0.$$

Aceste relații se pot scrie

$$\frac{d(\vec{a}\,\vec{r})}{\vec{a}\,\vec{r}}=\frac{d(\vec{b}\,\vec{r})}{\vec{b}\,\vec{r}} \quad \text{și} \quad \vec{r}\,d\vec{r}=0$$

Scanned with OKEN Scanner

și au integralele prime

$$\frac{\vec{a}\,\vec{r}}{\vec{b}\,\vec{r}}=C_1, \quad r^2=C_2,$$

care reprezintă un fascicul de plane axat pe $\vec{a}\times\vec{b}$, respectiv o familie de sfere cu centrul în origine.

Liniile de cîmp sînt cercuri.

Pentru a determina suprafața de cîmp care trece prin cercul dat, trebuie ca sistemul

$$\frac{\vec{a}\,\vec{r}}{\vec{b}\,\vec{r}}=C_1, \quad \vec{a}\,\vec{r}=r^2,$$

$$r^2=C_2, \qquad \vec{a}\,\vec{r}+\vec{b}\,\vec{r}=h^2,$$

să fie compatibil. Obținem condiția $C_2\left(1+\frac{1}{C_1}\right)=h^2$.

Suprafața de cîmp are ecuația

$$r^2(\vec{a}\,\vec{r}+\vec{b}\,\vec{r})-h^2\vec{a}\,\vec{r}=0.$$

7. Să se determine liniile de cîmp ale cîmpului vectorial definit prin vectorul

$$\vec{v}=\left[\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}\right]\vec{a}\times\vec{b}+\left[\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}\right]\vec{b}\times\vec{c}+\left[\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}\right]\vec{c}\times\vec{a},$$

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\neq 0),$$

și suprafața de cîmp care trece prin hiperbola $(\vec{a}+\vec{b})\vec{r}=0$, $(\vec{b}\,\vec{r})(\vec{c}\,\vec{r})=h^2$, cu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, h constanți.

R. Ecuația vectorială a liniilor de cîmp este

$$\vec{v}\times d\vec{r}=0,$$

deci

$$\left[\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}\right](\vec{a}\times\vec{b})\times d\vec{r}+\left[\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}\right](\vec{b}\times\vec{c})\times d\vec{r}+$$

$$+\left[\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}\right](\vec{c}\times\vec{a})\times d\vec{r}=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dezvoltînd dublele produse vectoriale și dînd în factor pe $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, obținem

$$\vec{a}\left[\left(\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}\right)(\vec{c}\vec{d}\vec{r})-\left(\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}\right)(\vec{b}\vec{d}\vec{r})\right]+$$

$$+\vec{b}\left[\left(\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}\right)(\vec{a}\vec{d}\vec{r})-\left(\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}\right)(\vec{c}\vec{d}\vec{r})\right]+$$

$$+\vec{c}\left[\left(\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}\right)(\vec{b}\vec{d}\vec{r})-\left(\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}\right)(\vec{a}\vec{d}\vec{r})\right]=0,$$

dar $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})\neq 0$, deci $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nu pot fi liniar dependenți. Din relația $\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{c}=0$ rezultă $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, deci

$$\left(\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}\right)(\vec{c}\vec{d}\vec{r})-\left(\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}\right)(\vec{b}\vec{d}\vec{r})=0,$$

$$\left(\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}\right)(\vec{a}\vec{d}\vec{r})-\left(\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}\right)(\vec{c}\vec{d}\vec{r})=0,$$

$$\left(\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}\right)(\vec{b}\vec{d}\vec{r})-\left(\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}\right)(\vec{a}\vec{d}\vec{r})=0.$$

Aceste trei relații se reduc la două ecuații diferențiale

$$\vec{a}\vec{d}\vec{r}+\vec{b}\vec{d}\vec{r}+\vec{c}\vec{d}\vec{r}=0,$$

$$\frac{\vec{a}\vec{d}\vec{r}}{\vec{a}\,\vec{r}}+\frac{\vec{b}\vec{d}\vec{r}}{\vec{b}\,\vec{r}}+\frac{\vec{c}\vec{d}\vec{r}}{\vec{c}\,\vec{r}}=0,$$

care au integralele prime

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\,\vec{r}=C_1,\quad (\vec{a}\cdot\vec{r})\,(\vec{b}\cdot\vec{r})\,(\vec{c}\cdot\vec{r})=C_2,\quad (C_1,\ C_2=\text{const}).$$

Liniile de cîmp sînt intersecțiile acestor familii de suprafețe.

Pentru a obține suprafața de cîmp care trece prin hiperbola dată, este necesar și suficient ca sistemul

$$\left.\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\,\vec{r}\quad &=C_1\\ (\vec{a}\,\vec{r})\,(\vec{b}\,\vec{r})\,(\vec{c}\,\vec{r})\ &=C_2\\ (\vec{a}+\vec{b})\,\vec{r}\quad &=0\\ (\vec{b}\,\vec{r})\,(\vec{c}\,\vec{r})\quad &=h^2\end{aligned}\right\}$$

să fie compatibil. Condiția este $C_1C_2=-h^4$, iar ecuația suprafeței de cîmp este

$$(\vec{a}\,\vec{r})\,(\vec{b}\,\vec{r})\,(\vec{c}\,\vec{r})\,(\vec{a}\,\vec{r}+\vec{b}\,\vec{r}+\vec{c}\,\vec{r})=-h^4.$$

Scanned with OKEN Scanner

8. Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori constanţi şi $\varphi=\vec{a}\,\text{grad}\,r^3$, $\psi=\vec{b}\,\text{grad}\,r^{-3}$. Să se evalueze

$$1^\circ\ \vec{b}\,\text{grad}\,\varphi+r^6\vec{a}\,\text{grad}\,\psi,$$

$$2^\circ\ \text{div}\,[(\varphi+\psi)\vec{r}]-3(\varphi+\psi),$$

$$3^\circ\ \vec{b}\,\text{grad div}\,(\varphi\vec{r})+\vec{a}\,\text{grad div}\,(r^6\psi\vec{r}).$$

R. 1° Avem

$$\text{grad}\,\varphi=\text{grad}\,(\vec{a}\,\text{grad}\,r^3)=\text{grad}\,[3\,r(\vec{a}\,\vec{r})]=3(\vec{a}\,\vec{r})\,\text{grad}\,r+3r\,\text{grad}\,(\vec{a}\,\vec{r})=$$

$$=3\left[\frac{(\vec{a}\,\vec{r})}{r}\vec{r}+r\vec{a}\right],$$

$$\text{grad}\,\psi=\text{grad}\,(\vec{b}\,\text{grad}\,r^{-3})=-\text{grad}\left(3\frac{\vec{b}\,\vec{r}}{r^5}\right)=-\frac{3}{r^5}\left[\vec{b}-\frac{5(\vec{b}\,\vec{r})}{r^2}\vec{r}\right].$$

De aici rezultă

$$\vec{b}\,\text{grad}\,\varphi+r^6\vec{a}\,\text{grad}\,\psi=\frac{18}{r}(\vec{a}\,\vec{r})\cdot(\vec{b}\,\vec{r}).$$

2°

$$\text{div}\,[(\varphi+\psi)\vec{r}]=\vec{r}\,\text{grad}\,(\varphi+\psi)+(\varphi+\psi)\,\text{div}\,\vec{r}=\vec{r}\,(\text{grad}\,\varphi+\text{grad}\,\psi)+3(\varphi+\psi).$$

Avem deci

$$\text{div}\,[(\varphi+\psi)\vec{r}]-3(\varphi+\psi)=\vec{r}\,(\text{grad}\,\varphi+\text{grad}\,\psi)=6\,r(\vec{a}\,\vec{r})+12\,r^{-5}(\vec{b}\,\vec{r}).$$

3° Avem

$$\text{grad div}\,(\varphi\vec{r})=3\,\text{grad div}\,[r(\vec{a}\,\vec{r})\vec{r}]=3\,\text{grad}\,[5\,r(\vec{a}\,\vec{r})]=15\left[\frac{\vec{r}}{r}(\vec{a}\,\vec{r})+r\vec{a}\right],$$

$$\text{grad div}\,(r^6\psi\vec{r})=-3\,\text{grad div}\,[r(\vec{b}\,\vec{r})\vec{r}]=-15\left[\frac{\vec{r}}{r}(\vec{b}\,\vec{r})+r\vec{b}\right].$$

Rezultă că

$$\vec{b}\,\text{grad div}\,(\varphi\vec{r})+\vec{a}\,\text{grad div}\,(r^6\psi\vec{r})=0.$$

9. Dacă $\varphi=\dfrac{\vec{r}\,\vec{k}}{r^3}$, să se arate că

$$\text{grad}\,\varphi=\frac{r^2\vec{k}-3(\vec{r}\,\vec{k})\vec{r}}{r^5}.$$

Să se calculeze div grad φ și să deducem că o soluție a ecuației $\Delta f=0$ este dată prin $f(x, y, z)=(x+y+z)r^{-3}$.

R. Avem

$$\operatorname{grad}\varphi=\operatorname{grad}\left(\frac{\vec{r}\,\vec{k}}{r^3}\right)=\frac{1}{r^3}\operatorname{grad}(\vec{r}\,\vec{k})+(\vec{r}\,\vec{k})\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{r^3}\vec{k}-3\frac{\vec{r}\,\vec{k}}{r^5}\cdot\vec{r}=\frac{1}{r^5}[r^2\vec{k}-3(\vec{r}\,\vec{k})\vec{r}],$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\vec{\nabla}\left[\frac{\vec{k}}{r^3}-3\frac{(\vec{r}\,\vec{k})}{r^5}\vec{r}\right]=0.$$

Rezultă că $\Delta\varphi=0$.

Analog, dacă $\varphi=\dfrac{\vec{r}\,\vec{i}}{r^3}$, găsim $\Delta\varphi=0$ și dacă $\varphi=\dfrac{\vec{r}\,\vec{j}}{r^3}$, $\Delta\varphi=0$.

Funcția $f(x, y, z)=(x+y+z)\,r^{-3}$ se poate scrie ca o sumă de trei funcții armonice

$$f(x, y, z)=\frac{\vec{r}\,\vec{i}}{r^3}+\frac{\vec{r}\,\vec{j}}{r^3}+\frac{\vec{r}\,\vec{k}}{r^3},$$

deci ea este armonica și $\Delta f=0$.

10. Se consideră cîmpul vectorial definit prin vectorul

$$\vec{v}=\frac{a}{r^3}(2a\cos\theta\vec{u}_r+\sin\theta\vec{u}_\theta),\qquad a=\text{const.}$$

1° Să se calculeze rot $\vec{v}$ și funcție de forță.

2° Să se determine liniile de cîmp ale lui $\vec{v}$.

R. 1° În sistemul de coordonate cilindrice avem

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\vec{u}_r & r\vec{u}_\theta & r\sin\theta\vec{u}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ \dfrac{2a\cos\theta}{r^3} & \dfrac{a\sin\theta}{r^2} & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{a\sin\theta}{r^2}\right)\vec{u}_r+r\vec{u}_\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{2a\cos\theta}{r^3}\right)+\right.$$

$$\left.+r\sin\theta\vec{u}_\varphi\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a\sin\theta}{r^2}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{2a\cos\theta}{r^3}\right)\right]\right\}=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cîmpul vectorial $\vec{v}$ este irotațional, deci există o funcție φ așa încît $\vec{v}=\operatorname{grad}\varphi$, deci

$$d\varphi=\vec{v}d\vec{r},$$

unde $d\vec{r}=\vec{u}_r dr+r\vec{u}_\theta d\theta+r\sin\theta\,\vec{u}_\varphi d\varphi$.

Avem

$$d\varphi=\frac{2a\cos\theta}{r^3}dr+\frac{a\sin\theta}{r^2}d\theta=-d\left(\frac{a\cos\theta}{r^2}\right),$$

deci funcția de forță este

$$\varphi=-\frac{a\cos\theta}{r^2}=C,\quad (C=\text{const}).$$

2° În coordonate curbilinii ortogonale, sistemul diferențial care ne dă liniile de cîmp este

$$\frac{R_1dx_1}{V_1}=\frac{R_2dx_2}{V_2}=\frac{R_3dx_3}{V_3}.$$

În cazul problemei avem

$$\frac{r^3dr}{2a\cos\theta}=\frac{r^4d\theta}{a\sin\theta}=\frac{r\sin\theta\,d\varphi}{0}$$

cu soluțiile

$$\varphi=C_1,\quad \frac{r}{\sin^2\theta}=C_2.$$

11. Se consideră cîmpul vectorial definit prin vectorul

$$\vec{v}=\operatorname{grad}(\vec{a}\operatorname{grad}f),$$

unde $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, iar $f=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3(y+z)+\frac{1}{2}x^2yz+g\,(y-x,\ z-x)$, g fiind o funcție derivabilă.

1° Să se determine mărimea și direcția cîmpului $\vec{v}$ în punctele $A(1,\ 2,\ 0)$ și $B(2,\ 1,\ 3)$.

2° Să se calculeze liniile de cîmp ale cîmpului $\vec{v}$ și suprafața de cîmp care trece prin elipsa $z=1$, $x^2+4y^2=1$.

R. Avem

$$\vec{a}\operatorname{grad}f=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{x^3}{3}-x^2(y+z)+xyz-g_1'-g_2'-\frac{x^3}{6}+$$

$$+\frac{x^2z}{2}+g_1'-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2y}{2}+g_2'=xyz,$$

Cîmpul vectorial $\vec{v}$ este irotațional, deci există o funcție φ așa încît $\vec{v}=\operatorname{grad}\varphi$, deci

$$d\varphi=\vec{v}d\vec{r},$$

unde $d\vec{r}=\vec{u}_r dr+r\vec{u}_\theta d\theta+r\sin\theta\,\vec{u}_\varphi d\varphi$.

Avem

$$d\varphi=\frac{2a\cos\theta}{r^3}dr+\frac{a\sin\theta}{r^2}d\theta=-d\left(\frac{a\cos\theta}{r^2}\right),$$

deci funcția de forță este

$$\varphi=-\frac{a\cos\theta}{r^2}=C,\quad (C=\text{const}).$$

2° În coordonate curbilinii ortogonale, sistemul diferențial care ne dă liniile de cîmp este

$$\frac{R_1dx_1}{V_1}=\frac{R_2dx_2}{V_2}=\frac{R_3dx_3}{V_3}.$$

În cazul problemei avem

$$\frac{r^3dr}{2a\cos\theta}=\frac{r^4d\theta}{a\sin\theta}=\frac{r\sin\theta\,d\varphi}{0}$$

cu soluțiile

$$\varphi=C_1,\quad \frac{r}{\sin^2\theta}=C_2.$$

11. Se consideră cîmpul vectorial definit prin vectorul

$$\vec{v}=\operatorname{grad}(\vec{a}\operatorname{grad}f),$$

unde $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, iar $f=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3(y+z)+\frac{1}{2}x^2yz+g\,(y-x,\ z-x)$, g fiind o funcție derivabilă.

1° Să se determine mărimea și direcția cîmpului $\vec{v}$ în punctele $A(1,\ 2,\ 0)$ și $B(2,\ 1,\ 3)$.

2° Să se calculeze liniile de cîmp ale cîmpului $\vec{v}$ și suprafața de cîmp care trece prin elipsa $z=1,\ x^2+4y^2=1$.

R. Avem

$$\vec{a}\operatorname{grad}f=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{x^3}{3}-x^2(y+z)+xyz-g_1'-g_2'-\frac{x^3}{6}+$$

$$+\frac{x^2z}{2}+g_1'-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2y}{2}+g_2'=xyz,$$

deci

$$\vec{v}=yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k}.$$

1° $\vec{v}_A=2\vec{k}$ deci are direcţia Oz şi mărimea 2, iar $\vec{v}_B=3\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$ are mărimea 7 şi direcţia de consinusuri directoare $\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}$.

2° Scriind ecuaţiile diferenţiale ale liniilor de cîmp, obţinem

$$\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{zx}=\frac{dz}{xy},$$

de unde rezultă ecuaţiile liniilor de cîmp

$$x^2-z^2=C_1, \quad y^2-z^2=C_2.$$

Pentru a găsi suprafaţa de cîmp, punem condiţia ca sistemul

$$x^2-z^2=C_1, \quad z=1,$$
$$y^2-z^2=C_2, \quad x^2+4y^2=1$$

să fie compatibil în x, y, z. Obţinem astfel relaţia

$$C_1+4C_2+4=0,$$

iar suprafaţa de cîmp cerută are ecuaţia

$$x^2+4y^2-5z^2+4=0.$$

12. Se consideră funcţiile vectoriale

$$\vec{u}=\vec{r}\varphi(P), \quad \vec{v}=\frac{1}{2}r^2 \operatorname{grad}\varphi(P), \quad \vec{w}=\vec{r}\times\operatorname{grad}\varphi(P),$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie iar $\varphi(P)$ o funcţie armonică în D.

Fie Ω volumul mărginit de o suprafaţă închisă (Σ) şi o curbă închisă (Γ) în D. Să se verifice relaţiile

$$1^\circ \quad \iint_\Sigma \vec{u}\,\vec{n}\,d\sigma=\iint_\Sigma \vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma+3\iiint_\Omega \varphi(P)\,d\omega.$$

$$2^\circ \quad \iint_\Sigma \vec{u}\times\vec{n}\,d\sigma=\iint_\Sigma \vec{n}\times\vec{v}\,d\sigma=\iiint_\Omega \vec{w}\,d\omega.$$

$$3^\circ \quad \int_\Gamma \vec{u}\,d\vec{r}+\int_\Gamma \vec{v}\,d\vec{r}=0.$$

R. 1° Aplicînd formula integrală a divergenţei primelor două integrale din 1°, obţinem

$$\iint_\Sigma \vec{u}\,\vec{n}\,d\sigma=\iiint_\Omega \operatorname{div}(\vec{r}\varphi)\,d\omega=\iiint_\Omega (3\varphi+\vec{r}\operatorname{grad}\varphi)\,d\omega$$

și

$$\iint_{\Sigma} \vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\left(\frac{1}{2} r^2 \operatorname{grad}\varphi\right) d\omega = \iiint_{\Omega} \operatorname{grad}\varphi\,\vec{r}\,d\omega,$$

deoarece

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = 0.$$

Rezultă înlocuind în 1°

$$\iiint_{\Omega} (3\varphi + \vec{r}\operatorname{grad}\varphi)\,d\omega = \iiint_{\Omega} \vec{r}\operatorname{grad}\varphi\,d\omega + 3\iiint_{\Omega} \varphi d\omega.$$

2° Vom aplica primelor două integrale formula integrală a rotorului. Avem

$$\iint_{\Sigma} \vec{u}\times\vec{n}\,d\sigma = -\iiint_{\Omega} \operatorname{rot}(\vec{r}\varphi)\,d\omega = -\iiint_{\Omega} (\operatorname{grad}\varphi\times\vec{r})d\omega = \iiint_{\Omega} \vec{w}d\omega$$

și

$$\iint_{\Sigma} \vec{n}\times\vec{v}\,d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{rot}\left(\frac{1}{2} r^2 \operatorname{grad}\varphi\right) d\omega = \iiint_{\Omega} \left[\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} r^2\right) \times \operatorname{grad}\varphi\right] d\omega =$$

$$= \iiint_{\Omega} \vec{r}\times\operatorname{grad}\varphi\,d\omega = \iiint_{\Omega} \vec{w}d\omega.$$

3° Aplicînd formula lui Stokes, obținem

$$\int_{\Gamma} \vec{u}d\vec{r} = \iint_{S} \operatorname{rot}\vec{u}\,\vec{n}d\sigma = \iint_{S} [\operatorname{grad}\varphi\times\vec{r}]\,\vec{n}\,d\sigma$$

și

$$\int_{\Gamma} \vec{v}d\vec{r} = \iint_{S} \operatorname{rot}\vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma = \iint_{S} \left[\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} r^2\right) \times \operatorname{grad}\varphi\right] \vec{n}\,d\sigma = -\int_{\Gamma} \vec{u}d\vec{r}.$$

13. Se consideră cîmpul vectorial definit prin vectorul $\vec{w} = \vec{a}\times\vec{v}$, unde $\vec{a}$ este un vector unitar constant iar $\vec{v}$ o funcție arbitrară de punct. Să se verifice relațiile:

$$1°\quad \iint_{\Sigma} \vec{w}\times\vec{n}\,d\sigma + \vec{a}\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{v}\,d\omega = \iiint_{\Omega} \frac{d\vec{v}}{d\vec{a}}\,d\omega.$$

$$2°\quad \iint_{\Sigma} \vec{w}\,\vec{n}\,d\sigma + \vec{a}\iiint_{\Omega} \operatorname{rot}\vec{v}\,d\omega = 0.$$

$$3°\quad \iint_{\Sigma} \operatorname{div}\vec{w}\,\vec{n}\,d\sigma + \vec{a}\times\iiint_{\Omega} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}\,d\omega = -\iiint_{\Omega} \frac{d(\operatorname{rot}\vec{v})}{d\vec{a}}\,d\omega.$$

R. 1° Aplicînd formula integrală a rotorului

$$\iint_{\Sigma} \vec{n} \times \vec{w}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{w}\, d\omega,$$

rezultă

$$\iint_{\Sigma} \vec{w} \times \vec{n}\, d\sigma = -\iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{w}\, d\omega = -\iiint_{\Omega} [\vec{a} \operatorname{div} \vec{v} - \vec{v} \operatorname{div} \vec{a} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a}\vec{\nabla})\vec{v}]\, d\omega =$$

$$= -\vec{a} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v}\, d\omega + \iiint_{\Omega} \frac{d\vec{v}}{d\vec{a}}\, d\omega.$$

2° Vom aplica primei integrale formula lui Gauss-Ostrogradski. Avem

$$\iint_{\Sigma} \vec{w}\vec{n}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{w}\, d\omega = \iiint_{\Omega} (\vec{v} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{v})\, d\omega = -\vec{a} \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{v}\, d\omega.$$

3° În acest caz vom utiliza formula integrală a gradientului

$$\iint_{\Sigma} \varphi \vec{n}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{grad} \varphi\, d\omega.$$

Avem

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{div} \vec{w}\, \vec{n}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{w})\, d\omega = -\iiint_{\Omega} \operatorname{grad} (\vec{a} \operatorname{rot} \vec{v})\, d\omega =$$

$$= -\iiint_{\Omega} [\vec{a} \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} + \operatorname{rot} \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{a} + (\vec{a}\vec{\nabla}) \operatorname{rot} \vec{v} + (\operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{a}]\, d\omega =$$

$$= -\iiint_{\Omega} \vec{a} \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}\, d\omega - \iiint_{\Omega} (\vec{a}\vec{\nabla}) \operatorname{rot} \vec{v}\, d\omega.$$

$\vec{a}$ fiind un vector constant, putem scrie

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{div} \vec{w} \cdot \vec{n}\, d\sigma = -\vec{a} \times \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}\, d\omega - \iiint_{\Omega} \frac{d}{d\vec{a}} (\operatorname{rot} \vec{v})\, d\omega.$$

14. Se consideră vectorii $\vec{u} = \varphi \operatorname{grad} \psi$, $\vec{v} = \psi \operatorname{grad} \varphi$ și $\vec{w} = \psi \operatorname{grad} \varphi \times \varphi \operatorname{grad} \psi$. Să se arate că pentru orice suprafață închisă (Σ) avem

1° $$\iint_{\Sigma} \vec{w}\vec{n}\, d\sigma = 0.$$

2° Pentru orice suprafaţă (S) mărginită de curba (Γ) avem

$$\frac{1}{4}\int_\Gamma \varphi^2 \mathrm{d}(\psi^2) = -\frac{1}{4}\int_\Gamma \psi^2 \mathrm{d}(\varphi^2) = \iint_S \vec{w}\,\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

3° $$\frac{1}{4}\iint_\Sigma \varphi\psi\,[\psi \operatorname{grad}\varphi - \varphi \operatorname{grad}\psi]\times\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega \vec{w}\,\mathrm{d}\omega.$$

4° Dacă funcţiile φ şi ψ sînt armonice, să se arate că dacă suprafeţele $\varphi=\text{const}$ şi $\psi=\text{const}$ sînt ortogonale, avem

$$\iint_\Sigma \vec{u}\,\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_\Sigma \vec{v}\,\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

5° $$\int_\Gamma \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\int_\Gamma \vec{u}\,\mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\varphi\psi}\,\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

R. 1° Aplicăm formula integrală a divergenţei.

Avem

$$\operatorname{div}\vec{w} = \operatorname{div}(\psi \operatorname{grad}\varphi \times \varphi \operatorname{grad}\psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi \cdot \operatorname{rot}(\psi \operatorname{grad}\varphi) - \psi \operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{rot}(\varphi \operatorname{grad}\psi) =$$

$$= \varphi \operatorname{grad}\psi[\psi \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi \times \operatorname{grad}\varphi] - \psi \operatorname{grad}\varphi[\varphi \cdot \operatorname{rot}\operatorname{grad}\psi + \operatorname{grad}\varphi \times \operatorname{grad}\psi] = 0,$$

deci

$$\iint_\Sigma \vec{w}\,\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

2° $$\int_\Gamma \varphi^2 \mathrm{d}(\psi^2) = \int_\Gamma 2\varphi^2\psi \operatorname{grad}\psi \cdot \mathrm{d}\vec{r},$$

$$\int_\Gamma \psi^2 \mathrm{d}(\varphi^2) = \int_\Gamma 2\psi^2\varphi \operatorname{grad}\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{r},$$

dar

$$2\int_\Gamma \varphi^2\psi \operatorname{grad}\psi\,\mathrm{d}\vec{r} = 2\iint_S \operatorname{rot}[\varphi^2\psi \operatorname{grad}\psi]\,\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= 2\iint_S [\operatorname{grad}(\psi\varphi^2) \times \operatorname{grad}\psi]\,\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = -4\iint_S (\operatorname{grad}\psi \times \operatorname{grad}\varphi)\,\varphi\psi\,\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = 4\iint_S \vec{w}\,\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog se obține

$$\int_\Gamma \psi^2 \, d(\varphi^2) = -4 \iint_S \vec{w}\,\vec{n}\, d\sigma,$$

deci relația de la punctul 2° este verificată.

$$3° \iint_\Sigma \varphi\psi\,[\psi \operatorname{grad}\varphi - \varphi \operatorname{grad}\psi]\times\vec{n}\, d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{rot}\,[\varphi\psi(\varphi \operatorname{grad}\psi - \psi \operatorname{grad}\varphi)\, d\omega =$$

$$= \iiint_\Omega 4\,\varphi\psi\,(\operatorname{grad}\psi\times\operatorname{grad}\varphi)\, d\omega = 4\iiint_\Omega \vec{w}\, d\omega.$$

$$4° \qquad \iint_\Sigma \vec{u}\,\vec{n}\, d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{u}\, d\omega = \iiint_\Omega \operatorname{div}\,(\varphi \operatorname{grad}\psi)\, d\omega =$$

$$= \iiint_\Omega (\varphi\Delta\psi + \operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\psi)\, d\omega = \iiint_\Omega \operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\psi\, d\omega,$$

deoarece $\Delta\psi=0$. Dar suprafețele $\varphi=\text{const}$ și $\psi=\text{const}$ sînt ortogonale, deci $\operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\psi=0$. Rezultă

$$\iint_\Sigma \vec{u}\,\vec{n}\, d\sigma = 0, \qquad \iint_\Sigma \vec{v}\,\vec{n}\, d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{v}\, d\omega = 0.$$

5° Avem

$$\int_\Gamma \vec{v}\, d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{v}\,\vec{n}\, d\sigma = \iint_S (\operatorname{grad}\psi\times\operatorname{grad}\varphi)\,\vec{n}\, d\sigma,$$

$$\int_\Gamma \vec{u}\, d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{u}\,\vec{n}\, d\sigma = \iint_S (\operatorname{grad}\varphi\times\operatorname{grad}\psi)\,\vec{n}\, d\sigma = -\int_\Gamma \vec{v}\, d\vec{r}$$

și

$$\iint_S \frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\varphi\psi}\,\vec{n}\, d\sigma = \iint_S (\operatorname{grad}\psi\times\operatorname{grad}\varphi)\,\vec{n}\, d\sigma,$$

deci egalitatea este evidentă.

15. Să se calculeze $\int_{AB} \vec{v}\, d\vec{r}$, dacă $\vec{v}=3xy\vec{i}-5z\vec{j}+10x\vec{k}$, iar $A(2, 2, 1)$ și $B(5, 8, 8)$ sînt două puncte pe curba de ecuații $x=1+t^2$, $y=2t^2$, $z=t^3$.

R. Avem

$$\vec{v}\, d\vec{r} = 3xy\, dx - 5z\, dy + 10x\, dz,$$

de unde rezultă

$$\int_{AB} \vec{v}\,d\vec{r} = \int_{AB} 3\,xy\,dx - 5\,z\,dy + 10\,x\,dz =$$

$$= \int_1^2 [3\,(1+t^2)\,2\,t^2 \cdot 2\,t - 5\,t^3 \cdot 4\,t + 10\,(1+t^2)\,3\,t^2]\,dt =$$

$$= \int_1^2 (12\,t^5 + 10\,t^4 + 12\,t^3 + 30\,t^2)\,dt = 303.$$

16. Să se calculeze $\iint_S \operatorname{rot} \vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma$, unde $\vec{v} = (x^2+y-4)\,\vec{i} + 3\,xy\,\vec{j} + (2\,xz+z^2)\,\vec{k}$ și (S) este suprafața sferei $x^2+y^2+z^2=16$ pentru care $z \geqslant 0$.

R. Dacă vom aplica teorema lui Stokes, avem în loc de integrala dată o integrală pe cercul $x^2+y^2=16$, $z=0$. Deci

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma = \int_\Gamma \vec{v}\,d\vec{r}.$$

Avem

$$\int_\Gamma \vec{v}\,d\vec{r} = \int_\Gamma (x^2+y-4)\,dx + 3\,xy\,dy,$$

dar

$$\int_\Gamma x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}\,x^3\right]_\Gamma = 0, \quad \int_\Gamma -4\,dx = [-4\,x]_\Gamma = 0, \quad \int_\Gamma y\,dx = -16\pi,$$

deoarece cu ajutorul formulei lui Green $-\int_\Gamma y dx$ ne dă aria (S_Γ) închisă de (Γ), iar

$$\int_\Gamma 3\,xy\,dy = \iint_{S_\Gamma} 3y\,dx\,dy = 0, \text{ prin simetrie.}$$

În rezultat avem

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma = -16\,\pi.$$

17. Să se arate că dacă $\int_{P_1}^{P_2} \vec{v}\,d\vec{r}$ este independentă de drumul care unește punctele P_1 și P_2 într-o regiune dată, atunci $\int_\Gamma \vec{v}\,d\vec{r} = 0$ pentru orice curbă închisă (Γ) în regiune și reciproc.

R. Fie $P_1AP_2BP_1$ (fig. I.17) o curbă închisă. Atunci

$$\int_\Gamma \vec{v}\,d\vec{r} = \int_{P_1AP_2BP_1} \vec{v}\,d\vec{r} = \int_{P_1AP_2} \vec{v}\,d\vec{r} + \int_{P_2BP_1} \vec{v}\,d\vec{r} = \int_{P_1AP_2} \vec{v}\,d\vec{r} - \int_{P_1BP_2} \vec{v}\,d\vec{r} = 0,$$

deoarece integrala de la P_1 la P_2 pe curba care trece prin A este egală cu integrala de la P_1 la P_2 pe curba care trece prin B, prin ipoteză.

Reciproc, dacă $\int_\Gamma \vec{v}\,d\vec{r} = 0$, atunci

$$\int_{P_1AP_2BP_1} \vec{v}\,d\vec{r} = \int_{P_1AP_2} \vec{v}\,d\vec{r} + \int_{P_2BP_1} \vec{v}\,d\vec{r} = \int_{P_1AP_2} \vec{v}\,d\vec{r} - \int_{P_1BP_2} \vec{v}\,d\vec{r} = 0,$$

deci

$$\int_{P_1AP_2} \vec{v}\,d\vec{r} = \int_{P_1BP_2} \vec{v}\,d\vec{r}.$$

18. Să se calculeze circulația cîmpului vectorial definit prin vectorul $\vec{v}=\vec{p}\times\vec{q}$ pe un cerc de rază a, axat perpendicular pe segmentul

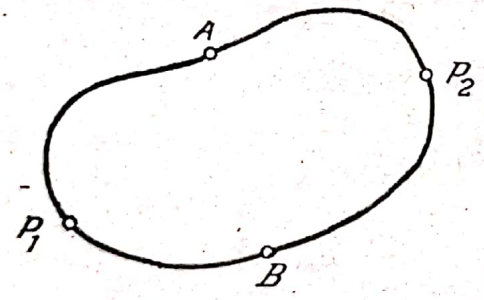


Fig. I.17

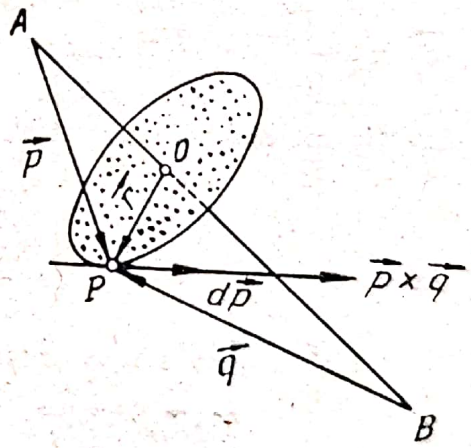


Fig. I.18

$\overrightarrow{AB}=2\vec{b}$ astfel ca $AO=h$ (O fiind centrul cercului, $\vec{p}=\overrightarrow{AP}$, $\vec{q}=\overrightarrow{BP}$). Să se verifice rezultatul cu formula lui Stokes. Să se calculeze liniile de cîmp ale lui $\vec{v}$ (fig. I.18).

R. Avem

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}, \text{ adică } \vec{p}=\vec{q}+2\vec{b},$$

şi

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP},\ \text{adică}\ \vec{p}=\vec{h}+\vec{r}.$$

Rezultă

$$\mathrm{d}\vec{p}=\mathrm{d}\vec{q}=\mathrm{d}\vec{r}\ \text{şi}\ \vec{p}\times\vec{q}=2\,\vec{b}\times\vec{q}=2\,\vec{b}\times\vec{r},\ \text{deoarece}\ q=-(2\vec{b}-\vec{h})\frac{\vec{b}}{b}+\vec{r},$$

deci circulaţia este

$$\int_\Gamma(\vec{p}\times\vec{q})\,\mathrm{d}\vec{p}=\int_\Gamma(2\,\vec{b}\times\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r}.$$

Observînd că $\vec{b}$, $\vec{r}$, $\mathrm{d}\vec{r}$ formează un triedru drept, deci $(\vec{b}\,\vec{r}\,\mathrm{d}\vec{r})=ba\,\mathrm{d}s$, unde $|\vec{r}|=a$, $|\mathrm{d}\vec{r}|=\mathrm{d}s$, obţinem

$$\int_\Gamma(\vec{p}\times\vec{q})\,\mathrm{d}\vec{p}=2\int_\Gamma ba\,\mathrm{d}s=2\,ab\cdot 2\pi a=4\pi a^2b.$$

Aplicînd formula lui Stokes, avem

$$\int_\Gamma(2\,\vec{b}\times\vec{q})\,\mathrm{d}\vec{r}=\iint_{S_\Gamma}\mathrm{rot}\,(2\,\vec{b}\times\vec{q})\,\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{S_\Gamma}4\,\vec{b}\,\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma=4\,\vec{b}\,\vec{S},$$

unde $\vec{S}=\pi a^2\frac{\vec{b}}{b}$, deci obţinem rezultatul găsit.

Ecuaţia diferenţială vectorială a liniilor de cîmp este

$$(\vec{p}\times\vec{q})\times\mathrm{d}\vec{p}=0,$$

sau

$$\vec{q}\,(\vec{p}\,\mathrm{d}\vec{p})-\vec{p}\,(\vec{q}\,\mathrm{d}\vec{p})=0.$$

Vectorii $\vec{p}$ şi $\vec{q}$ nu sînt coliniari, deci

$$\vec{p}\,\mathrm{d}\vec{p}=0,\ \vec{q}\,\mathrm{d}\vec{q}=0\ \text{sau}\ \vec{q}\,\mathrm{d}\vec{q}=0\ \text{deoarece}\ \mathrm{d}\vec{p}=\mathrm{d}\vec{q},$$

de unde rezultă integralele prime

$$p^2=C_1,\ q^2=C_2,\quad (C_1,\ C_2=\text{const}).$$

Liniile de cîmp sînt cercuri cu centrul pe AB şi situate în plane perpendiculare pe AB.

19. 1° Să se calculeze circulaţia cîmpului vectorial definit prin vectorul $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ de-a lungul triunghiului ABC dat prin vectorii $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, $\vec{\omega}$ fiind un vector constant.

2° Să se determine fluxul aceluiaşi cîmp vectorial prin suprafaţa triunghiului dat.

R. 1° Pentru circulaţie avem (fig. I.19)

$$\Gamma=\int\limits_{ABCA}\vec{v}\,d\vec{r}=\int\limits_{AB}\vec{v}\,d\vec{r}+\int\limits_{BC}\vec{v}\,d\vec{r}+\int\limits_{CA}\vec{v}\,d\vec{r}.$$

Dacă punctul M descrie segmentul $\overrightarrow{AB}$, avem

$$\vec{r}=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a}),\quad d\vec{r}=(\vec{b}-\vec{a})\,d\lambda,\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1,$$

de unde rezultă

$$\int\limits_{AB}\vec{v}\,d\vec{r}=\int\limits_{AB}(\vec{\omega}\times\vec{r})\,d\vec{r}=\omega\int\limits_{AB}\vec{r}\times d\vec{r}=$$

$$=\vec{\omega}\int\limits_{0}^{1}(\vec{a}\times\vec{b})\,d\lambda=\vec{\omega}\,(\vec{a}\times\vec{b}).$$

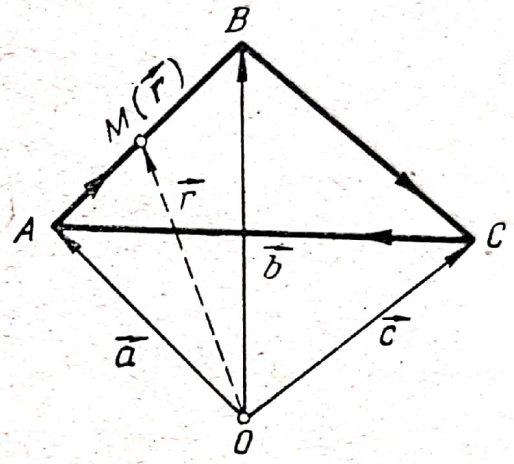


Fig. I.19

Analog se găsesc

$$\int\limits_{BC}\vec{v}\,d\vec{r}=\vec{\omega}\,(\vec{b}\times\vec{c}),\qquad \int\limits_{CA}\vec{v}\,d\vec{r}=\vec{\omega}\,(\vec{c}\times\vec{a}),$$

deci

$$\int\limits_{ABCA}\vec{v}\,d\vec{r}=\vec{\omega}\,[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}].$$

Pentru verificarea rezultatului, utilizăm formula lui Stokes

$$\int\limits_{\Gamma}\vec{v}\,d\vec{r}=\iint\limits_{S_\Gamma}\operatorname{rot}\vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma.$$

Avem

$$\int\limits_{ABCA}\vec{v}\,d\vec{r}=\iint\limits_{S}2\,\vec{\omega}\,\vec{n}\,d\sigma=2\,\vec{\omega}\,\vec{S},$$ unde $\vec{S}$ este aria suprafeţei orientate a triunghiului ABC şi anume $\vec{S}=\frac{1}{2}[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}]$.

2° Dacă punctul M se mişcă în planul triunghiului ABC, avem

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\vec{a}+\alpha(\vec{b}-\vec{a})+\beta(\vec{c}-\vec{b}).$$

Pentru $\beta=0$ şi $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, M descrie segmentul $\overrightarrow{AB}$; dacă $\alpha=\beta$ şi $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, M descrie segmentul $\overrightarrow{AC}$, deci M descrie suprafaţa triunghiului ABC dacă $0\leqslant\beta\leqslant\alpha$ şi $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Coordonatele curbilinii ale vîrfurilor sînt $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, $C(1,\ 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem pentru elementul de suprafață

$$\vec{n}\,d\sigma=\vec{r}_\alpha\times\vec{r}_\beta\,d\alpha\,d\beta$$

sau

$$\vec{n}\,d\sigma=(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{b})\,d\alpha\,d\beta=(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})\,d\alpha\,d\beta=2\,\vec{S}\,d\alpha\,d\beta,$$

unde $\vec{S}$ este aria suprafeței orientate a triunghiului ABC.

Fluxul va fi

$$\Phi=\iint_\Sigma \vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma=\iint_D(\vec{\omega}\times\vec{r})\,2\,\vec{S}\,d\alpha\,d\beta=2\,\vec{S}\times\vec{\omega}\iint_D\vec{r}\,d\alpha\,d\beta,$$

D fiind domeniul parametrilor $0\leqslant\beta\leqslant\alpha$, $0\leqslant\alpha\leqslant1$.

Înlocuind în ultima integrală pe $\vec{r}$ cu expresia determinată, obținem

$$\Phi=2\,\vec{S}\times\vec{\omega}\int_0^1 d\alpha\int_0^\alpha[\vec{a}+\alpha\,(\vec{b}-\vec{a})+\beta\,(\vec{c}-\vec{b})]\,d\beta=$$

$$=2\,\vec{S}\times\vec{\omega}\int_0^1\left[\frac{\alpha^2}{2}\,(\vec{c}-\vec{b})+\alpha\,(\vec{a}+\alpha\vec{b}-\alpha\vec{a})\right]d\alpha=$$

$$=2\,\vec{S}\times\vec{\omega}\left[\frac{1}{2}\,\vec{a}+\frac{1}{3}\,(\vec{b}-\vec{a})+\frac{1}{6}\,(\vec{c}-\vec{b})\right]$$

sau

$$\Phi=2\,\vec{S}\times\vec{\omega}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{6}.$$

20. Dacă $\vec{v}=y\vec{i}+(x-2\,xz)\vec{j}-xy\vec{k}$, să se calculeze $\iint_\Sigma(\text{rot}\,\vec{v})\,\vec{n}\,d\sigma$, unde (Σ) este suprafața sferei $x^2+y^2+z^2=a^2$ deasupra planului (xy), (fig. I.20).

Să se verifice rezultatul aplicînd formula lui Gauss-Ostrogradski.

R. Avem

$$\text{rot}\,\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & x-2\,xz & -xy\end{vmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}-2\,z\vec{k}.$$

Normala la $x^2+y^2+z^2=a^2$ este dirijată după direcţia vectorului

$$\text{grad}\ (x^2+y^2+z^2)=2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k},$$

iar versorul normalei la suprafaţă este dat de

$$\vec{n}=\frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{a}.$$

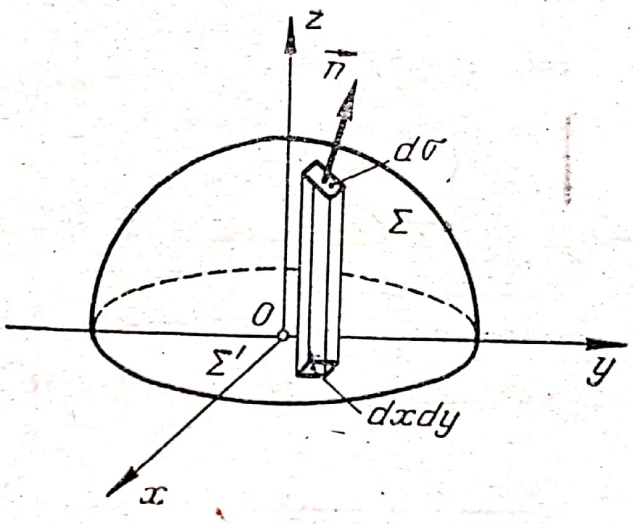


Fig. I.20

Proiecţia suprafeţei (Σ) pe planul (xOy) este cercul $x^2+y^2=a^2$, $z=0$. Atunci

$$I=\iint_{\Sigma}(\text{rot}\,\vec{v})\,\vec{n}\,d\sigma=\iint_{\Sigma'}(\text{rot}\,\vec{v})\,\vec{n}\,\frac{dx\,dy}{|\vec{n}\,\vec{k}|}=\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{3(x^2+y^2)-2a^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dy\,dx.$$

Trecînd la coordonate polare, avem

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{3\rho^2-2a^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_a^{a}\left(-3\rho\sqrt{a^2-\rho^2}+\frac{a^2\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right)d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[(a^2-\rho^2)^{3/2}-a^2\sqrt{a^2-\rho^2}\right]_0^{a}d\theta=\int_0^{2\pi}(a^3-a^3)\,d\theta=0.$$

Să calculăm acum cu ajutorul formulei Gauss-Ostrogradski

$$\iint_{\Sigma}\vec{w}\,\vec{n}\,d\sigma=\iiint_{\Omega}\text{div}\,\vec{w}\,d\omega.$$

Cum div $\vec{w}=0$, unde $\vec{w}=\text{rot}\,\vec{V}$, rezultă

$$\iint_{\Sigma} \vec{w}\,\vec{n}\,d\sigma=0.$$

21. Fie cîmpul vectorial definit prin vectorul $\vec{v}=2xz\vec{i}-x\vec{j}+y\vec{k}$. Să se evalueze $\iiint_{\Omega} \vec{v}\,d\omega$, unde Ω este regiunea mărginită de suprafeţele $x=0$, $y=0$, $y=6$, $z=x^2$, $z=4$.

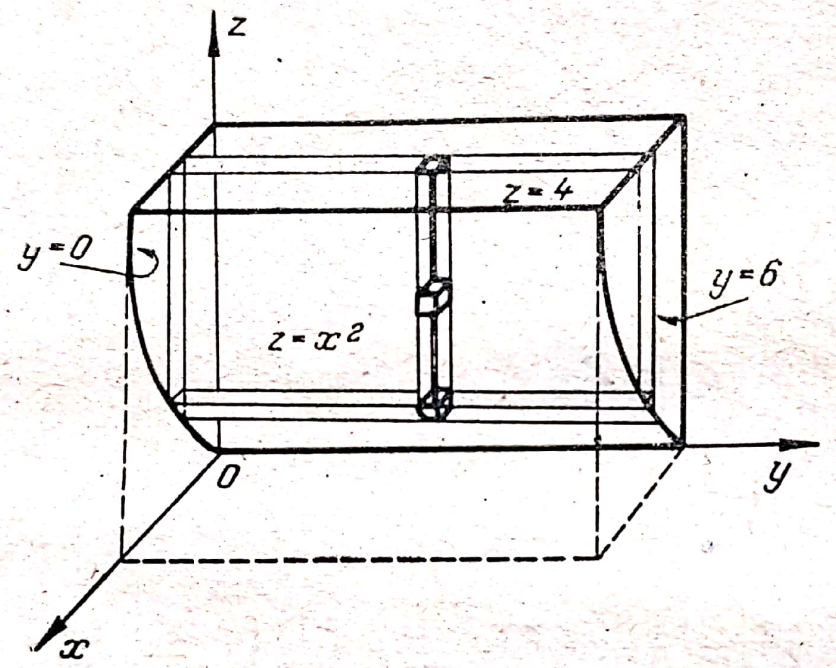


Fig. I.21

R. Avem (fig. I.21)

$$\iiint_{\Omega} (2xz\vec{i}-x\vec{j}+y\vec{k})\,d\omega=\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4}(2xz\vec{i}-x\vec{j}+y\vec{k})\,dz\,dy\,dx=$$

$$=\vec{i}\int_0^2\int_0^6\int_{x^2}^4 2xz\,dz\,dy\,dx-\vec{j}\int_0^2\int_0^6\int_{x^2}^4 x\,dz\,dy\,dx+\vec{k}\int_0^2\int_0^6\int_{x^2}^4 y^2\,dz\,dy\,dx=128\vec{i}-24\vec{j}+384\vec{k}.$$

22. Să se calculeze $\iint_{\Sigma}\frac{\vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma}{p}$, unde (Σ) este elipsoidul $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, p este distanţa de la origine la planul tangent într-un punct

al elipsoidului, iar $\vec{a}$ este un vector unitar în direcţia normalei în acel punct.

R. Fie $\vec{n}\,d\sigma$ situat în punctul $Q\,(x_1, y_1, z_1)$. Planul tangent în Q are ecuaţia

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=1,$$

iar distanţa de la origine la acest plan este

$$p=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}+\frac{z_1^2}{c^4}}}.$$

Notînd cu $f(x, y, z)=0$ ecuaţia elipsoidului, un vector a cărui direcţie este direcţia normalei în Q este dat de grad f, evaluat în $Q\,(x_1, y_1, z_1)$. Avem

$$f(x, y, z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,$$

deci

$$\vec{n}_1=\frac{2x_1}{a^2}\vec{i}+\frac{2y_1}{b^2}\vec{j}+\frac{2z_1}{c^2}\vec{k},$$

de unde

$$\vec{a}=\left(\frac{2x_1}{a^2}\vec{i}+\frac{2y_1}{b^2}\vec{j}+\frac{2z_1}{c^2}\vec{k}\right)\Big/\sqrt{\frac{4x_1^2}{a^4}+\frac{4y_1^2}{b^4}+\frac{4z_1^2}{c^4}}.$$

Rezultă

$$\vec{a}=p\left(\frac{x_1}{a^2}\vec{i}+\frac{y_1}{b^2}\vec{j}+\frac{z_1}{c^2}\vec{k}\right),$$

sau

$$\vec{a}=\frac{1}{2}\,p\,\vec{n}_1$$

şi

$$\frac{\vec{a}\,\vec{n}\,d\sigma}{p}=\frac{1}{2}\,\vec{n}_1\,\vec{n}\,d\sigma.$$

Aplicînd formula integrală a divergenţei, obţinem

$$\iint_\Sigma \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma}{p}=\iint_\Sigma \frac{1}{2}\,\vec{n}_1\,\vec{n}\,d\sigma=\iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{n}_1\,d\omega,$$

unde Ω este volumul elipsoidului;

$$\operatorname{div}\vec{n}_1=2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

de unde

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{\vec{a}\,\vec{n}\,d\sigma}{p} = \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\cdot\frac{4}{3}\pi abc.$$

23. Să se calculeze fluxul cîmpului vectorial definit prin vectorul

$$\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[(x+y)\vec{i}+(1+z)\vec{j}+(2x+2xy+z)\vec{k}\right]$$

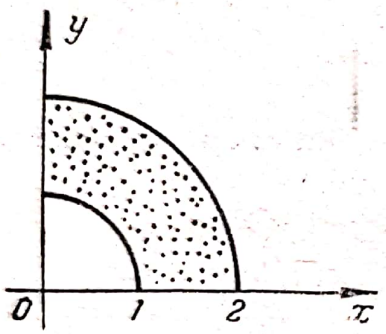


Fig. I.23

prin porţiunea de suprafaţă $z=x^2+y$ pe care o taie cilindrul cu baza un sfert din coroana circulară în planul xOy din fig. I.23, cu generatoarele paralele cu Oz.

R.

$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma.$$

Ecuaţia parametrică a suprafeţei date este

$$x=u,\quad y=v,\quad z=u^2+v.$$

Elementul de suprafaţă este

$$d\sigma=\sqrt{4u^2+2}\,du\,dv,$$

iar versorul normalei la suprafaţă este

$$\vec{n}=\frac{-2u}{\sqrt{4u^2+2}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{4u^2+2}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{4u^2+2}}\vec{k}.$$

Rezultă

$$\vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma=\frac{(u+v)\vec{i}+(u^2+v+1)\vec{j}+(3u^2+2uv+v)\vec{k}}{\sqrt{u^2+v^2}}(-2u\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\,du\,dv=$$

$$=-\frac{du\,dv}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Deci

$$\Phi=-\iint\limits_{D}\frac{du\,dv}{\sqrt{u^2+v^2}}=-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{1}^{2}d\rho=-\frac{\pi}{2},$$

unde $u=\rho\cos\varphi$, $v=\rho\sin\varphi$.

24. Să se calculeze fluxul cîmpului vectorial definit prin vectorul

$$\vec{v}=(z-x)\vec{i}+(x-y)\vec{j}+2z\vec{k}$$

spre exteriorul tetraedrului $OABC$ cu $O(0,0,0)$, $A(1,1,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, (v. fig. I.24).

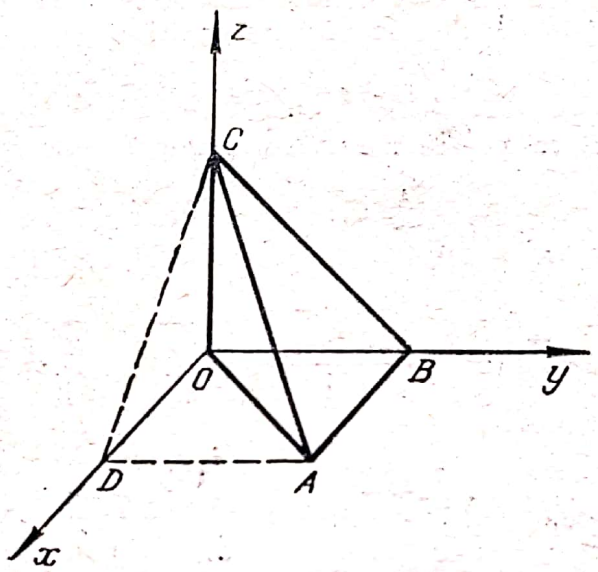


Fig. I.24

Să se verifice rezultatul aplicînd formula Gauss-Ostrogradski.

R. Avem

$$\Phi=\iint_{OABCO}\vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma=\iint_{OAB}\vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma+\iint_{OBC}\vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma+\iint_{OAC}\vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma+\iint_{ABC}\vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma.$$

Normala la fața OAB este îndreptată spre exteriorul tetraedrului, adică în jos, deci $\vec{n}_{OAB}=-\vec{k}$. Rezultă

$$\Phi_{OAB}=\iint_{OAB}\vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma=\iint_{OAB}-2z\,d\sigma=0,\ \text{deoarece pe } OAB \text{ avem } z=0.$$

Pentru fața OBC avem $\vec{n}_{OBC}=-\vec{i}$, deci

$$\Phi_{OBC}=\iint_{OBC}(x-z)\,d\sigma.$$

Pe OBC avem $x=0$, de unde

$$\Phi_{OBC}=\iint\limits_{OBC}-z\,dy\,dz=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{1-y}-z\,dz=-\frac{1}{6}.$$

Ecuaţia planului OAC este $y-x=0$. Trebuie determinat care anume faţă a planului este exterioară tetraedrului. Punctul B (0, 1, 0) se află situat în raport cu planul OAC de aceeaşi parte cu interiorul tetraedrului; pe de altă parte coordonatele sale, înlocuite în ecuaţia planului, dau un rezultat pozitiv:

$$F(x, y, z)_B=|y-x|_B=1>0.$$

În consecinţă, pentru a avea normala exterioară, vom înmulţi ecuaţia planului OAC cu -1:

$$(OAC):\quad x-y=0.$$

Rezultă

$$\vec{n}_{OAC}=\frac{\operatorname{grad}(x-y)}{\sqrt{2}}=\frac{\vec{i}}{\sqrt{2}}-\frac{\vec{j}}{\sqrt{2}}.$$

Avem

$$\Phi_{OAC}=\iint\limits_{OAC}\vec{v}\,\vec{n}_{OAC}\,d\sigma=\iint\limits_{OAC}\frac{z+y-2x}{\sqrt{2}}d\sigma.$$

Proiectînd OAC pe planul yOz, obţinem

$$\Phi_{OAC}=\iint\limits_{OBC}(z-y)\,dy\,dz=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{1-y}(z-y)\,dz=0.$$

Ecuaţia planului ABC este

$$y+z-1=0;$$

faţa exterioară este cea pozitivă, deci

$$\vec{n}_{ABC}=\frac{\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{2}}.$$

Avem, proiectînd pe planul xOy,

$$\Phi_{ABC}=\iint\limits_{ABC}\frac{x-y+2z}{\sqrt{2}}d\sigma=\iint\limits_{OAB}(x-3y+2)\,dx\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y(x-3y+2)dx=\frac{1}{6}.$$

Fluxul total este deci

$$\Phi=0.$$

Aplicînd formula lui Gauss-Ostrogradski, avem

$$\Phi=\iint\limits_{OABC}\vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\vec{v}\,d\omega.$$

Avem

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{\partial}{\partial x}(z-x)+\frac{\partial}{\partial y}(x-y)+\frac{\partial}{\partial z}(2z)=0,$$

în consecinţă

$$\Phi=0.$$

25. Să se calculeze fluxul cîmpului vectorial definit prin vectorul $\vec{v}=z\vec{i}+x\vec{j}-3yz\vec{k}$ prin suprafaţa limitată de planele de coordonate, planul $z=5$ şi sfertul de cilindru $x^2+y^2=16$ din primul octant al sistemului de coordonate.

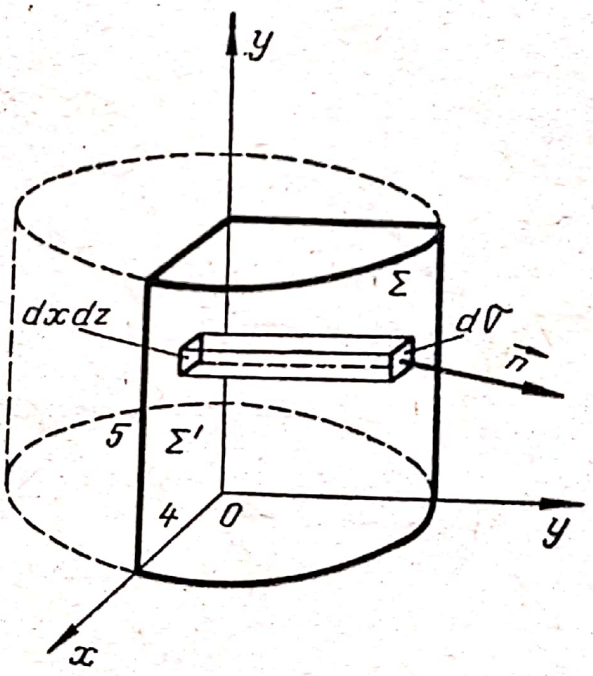


Fig. I.25

R. Avem

$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma.$$

Proiectăm suprafaţa (Σ) pe planul (xOz) ca în fig. I.25. Avem

$$\iint\limits_{\Sigma}\vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{\Sigma'}\vec{v}\,\vec{n}\,\frac{dx\,dz}{|\vec{n}\,\vec{j}|}.$$

Normala la $x^2+y^2=16$ este $\vec{\nabla}(x^2+y^2)=2x\vec{i}+2y\vec{j}$, atunci

$$\vec{n}=\frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2}}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{4};$$

Rezultă

$$\vec{v}\,\vec{n}=(z\vec{i}+x\vec{j}-3yz\vec{k})\cdot\frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{4}=\frac{1}{4}(xz+xy),$$

$$\vec{n}\,\vec{j}=\frac{y}{4},$$

de unde

$$\iint\limits_{\Sigma'}\frac{xz+xy}{y}\,dx\,dz=\int_0^5\int_0^4\left(\frac{xz}{\sqrt{16-x^2}}+x\right)dx\,dz=\int_0^5(4z+8)\,dz=90.$$

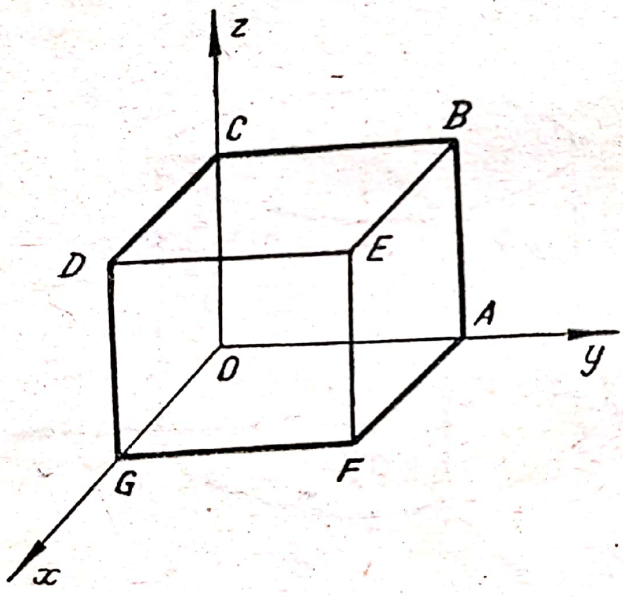


Fig. I.26

26. Să se calculeze fluxul cîmpului vectorial definit prin vectorul $\vec{v}=4xz\vec{i}-y^2\vec{j}+yz\vec{k}$ prin suprafaţa cubului mărginit de $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$, (fig. I.26).

R. Avem

$$\text{flux}_{(OABCDEFGO)}\,\vec{v}=\text{flux}_{(ABCD)}\,\vec{v}+\text{flux}_{(ABEF)}\,\vec{v}+\text{flux}_{(BCDE)}\,\vec{v}+\text{flux}_{(AFGO)}\,\vec{v}+$$
$$+\text{flux}_{(OGDC)}\,\vec{v}+\text{flux}_{(DEFG)}\,\vec{v}.$$

Pe fața $ABCO$, $\vec{n}=-\vec{i}$, $x=0$, deci

$$\text{flux}_{(ABCO)}\ \vec{v}=\iint\limits_{ABCO}\vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma=\int_0^1\int_0^1(-y^2\vec{j}+yz\vec{k})\,(-\vec{i})\,dy\,dz=0.$$

Pe fața $ABEF$, $\vec{n}=\vec{j}$, $y=1$, de unde

$$\text{flux}_{(ABEF)}\ \vec{v}=\iint\limits_{ABEF}\vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma=\int_0^1\int_0^1\vec{j}\,(4\,xz\vec{i}-\vec{j}+z\vec{k})\,dx\,dz=-1.$$

Pe fața $(BCDE)$, $\vec{n}=\vec{k}$, $z=1$, deci

$$\text{flux}_{(BCDE)}\ \vec{v}=\iint\limits_{BCDE}\vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma=\int_0^1\int_0^1(4\,x\vec{i}-y^2\vec{j}+y\vec{k})\,\vec{k}\,dx\,dy=\frac{1}{2}.$$

Pe $(AFGO)$, $\vec{n}=-\vec{k}$, $z=0$, de unde

$$\text{flux}_{(AFGO)}\ \vec{v}=\int_0^1\int_0^1(-y^2\vec{j})\,(-\vec{k})\,dx\,dy=0.$$

Pe $(OGDC)$, $\vec{n}=-\vec{j}$, $y=0$, deci

$$\text{flux}_{(OGDC)}\ \vec{v}=\int_0^1\int_0^1(4\,xz\vec{i})\,(-\vec{j})\,dx\,dz=0,$$

ar pe fața $(DEFG)$, $\vec{n}=\vec{i}$, $x=1$, de unde

$$\text{flux}_{(DEFG)}\ \vec{v}=\int_0^1\int_0^1(4\,z\vec{i}-y^2\vec{j}+yz\vec{k})\cdot\vec{i}\,dy\,dz=\int_0^1\int_0^1 4\,z\,dy\,dz=2.$$

Fluxul total este

$$\Phi=\frac{3}{2}.$$

27. Se consideră punctele fixe O și A și un punct mobil P. Se consideră vectorul $\vec{v}=(\vec{a}\cdot\vec{r})\,(\vec{a}\times\vec{r})$, unde $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$.

1° Să se calculeze circulația cîmpului vectorial $\vec{v}$ pe un cerc (Γ) cu centrul A cuprins într-un plan perpendicular pe $\overrightarrow{OA}$.

2° Să se calculeze fluxul aceluiaşi cîmp vectorial prin interiorul unui cerc de diametrul OA.

R. 1° Circulaţia cîmpului vectorial $\vec{v}$ pe cercul (Γ) este

$$\int_{\Gamma} \vec{v}\, d\vec{r}.$$

Avem

$$\vec{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\vec{a}+\overrightarrow{AP},$$

deci pe (Γ)

$$\vec{a}\,\vec{r}=a^2 \text{ şi } |\vec{a}\times\vec{r}|=a\rho,$$

ρ fiind raza cercului (Γ), de unde rezultă

$$\int_{\Gamma} (\vec{a}\cdot\vec{r})\ (\vec{a}\times\vec{r})\, d\vec{r}=a^3\rho\int_{\Gamma} ds=2\pi\rho^2 a^3.$$

2° În planul cercului de diametru OA avem

$$\vec{a}\,\vec{r}=ar\cos\theta,\quad \vec{a}\times\vec{r}=\vec{n}\,ar\sin\theta,$$

$\vec{n}$ fiind versorul normalei la plan iar θ unghiul vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{r}$.

Fluxul este

$$\Phi=\iint_{\Sigma} \vec{v}\,\vec{n}\, d\sigma = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\left(\int_0^{a\cos\theta} r^3\, dr\right) d\theta=0.$$

28. Să se arate că pentru $\alpha=-3$ cîmpul vectorial definit prin vectorul

$$\vec{v}=r^{\alpha}\vec{r}$$

este solenoidal şi irotaţional pentru orice α.

R. Dacă $\vec{v}$ este solenoidal, atunci va trebui să avem $\operatorname{div}\vec{v}=0$.

$$\operatorname{div}\vec{v}=\vec{\nabla}\,(r^{\alpha}\vec{r})=r^{\alpha}(\vec{\nabla}\,\vec{r})+\vec{r}\,(\vec{\nabla}\,r^{\alpha}),$$

dar $\operatorname{div}\vec{r}=3$ şi $\operatorname{grad} r^{\alpha}=\alpha\, r^{\alpha-1}\left[\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right]=\alpha\, r^{\alpha-2}\,\vec{r},$

deci

$$\operatorname{div}\vec{v}=(3+\alpha)\, r^{\alpha}.$$

Rezultă că div $\vec{v}=0$ pentru orice r, dacă $\alpha=-3$.

Pe de altă parte, dacă $\vec{v}$ este irotațional, atunci există o funcție Φ astfel ca

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=r^{\alpha}x,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=r^{\alpha}y,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=r^{\alpha}z.$$

Deoarece

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r},$$

avem

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=r^{\alpha}x=r^{\alpha+1}\frac{\partial r}{\partial x},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=r^{\alpha+1}\frac{\partial r}{\partial y},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=r^{\alpha+1}\frac{\partial r}{\partial z}.$$

Rezultă că Φ poate fi de forma $\frac{r^{\alpha+2}}{\alpha+2}$ cu $\alpha\neq-2$.

Dacă $\alpha=-2$, atunci

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{z}{x^2+y^2+z^2},$$

deci

$$\Phi=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Deci pentru oricare alt α funcția scalară Φ există, așa încît grad $\Phi=\vec{v}$. Aceasta arată că $\vec{v}$ este irotațional, iar Φ este funcția de forță a cîmpului $\vec{v}$.

29. Să se determine soluțiile ecuației Poisson $\Delta F=f(r)$ de forma $F=F(r)$, funcția $f(r)$ fiind dată, iar r fiind modulul vectorului de poziție. Aplicație: $f(r)=r^n$.

R. Expresia laplacianului în coordonate sferice este

$$\Delta F=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2F}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right).$$

Ținînd seama de faptul că $F=F(r)$, ecuația lui Poisson se scrie

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\right)=f(r)$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}=f(r).$$

Cu schimbarea de funcție $F(r)=\frac{\psi(r)}{r}$ se obține ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}r^2}=rf(r)$$

cu soluția

$$\psi=\int\left(\int rf(r)\,dr\right)dr+c_1 r+c_2, \qquad (c_1, c_2=\text{const}),$$

deci

$$F(r)=\frac{1}{r}\int\left(\int rf(r)\,dr\right)dr+c_1+\frac{c_2}{r}.$$

Pentru $f(r)=r^n$ se obține

$$\psi(r)=\frac{r^{n+3}}{(n+2)(n+3)}+c_1 r+c_2,$$

iar

$$F(r)=\frac{r^{n+2}}{(n+2)(n+3)}+\frac{c_2}{r}+c_1.$$

30. Utilizînd relația $(\text{rot}\,\vec{v})\,\vec{n}=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\int_\Gamma \vec{v}\,d\vec{r}}{\Delta s}$, să se exprime rot $\vec{v}$ în coordonate curbilinii ortogonale.

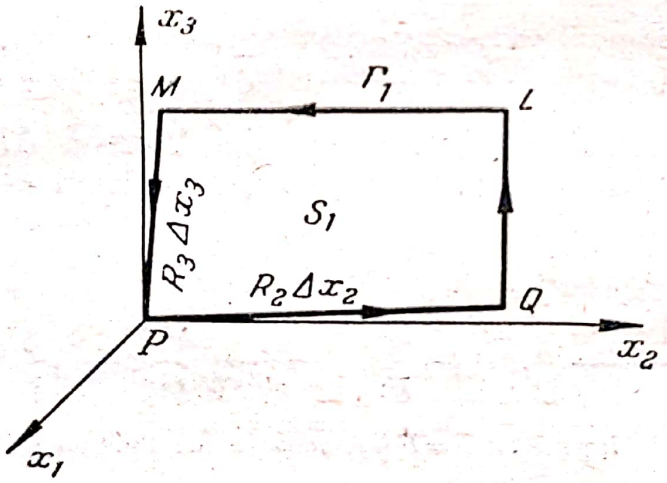


Fig. I.30

R. Vom calcula $(\text{rot}\,\vec{v})\,\vec{u}_1$. Să considerăm o suprafață (S_1) normală la $\vec{u}_1$ în P (fig. I.30) și vom nota cu (Γ_1) frontiera lui (S_1). Fie

$$\vec{v}=v_1\vec{u}_1+v_2\vec{u}_2+v_3\vec{u}_3.$$

Avem

$$\int_{\Gamma_1}\vec{v}\,d\vec{r}=\int_{PQ}\vec{v}\,d\vec{r}+\int_{QL}\vec{v}\,d\vec{r}+\int_{LM}\vec{v}\,d\vec{r}+\int_{MP}\vec{v}\,d\vec{r}.$$

Prin aproximare avem

$$\int_{PQ} \vec{v}\,d\vec{r} = \vec{v}\Big|_P \cdot (R_2\,\Delta x_2\,\vec{u}_2) = (v_1\vec{u}_1 + v_2\vec{u}_2 + v_3\vec{u}_3)\,(R_2\Delta x_2\,\vec{u}_2) = v_2 R_2 \Delta x_2.$$

Atunci

$$\int_{ML} \vec{v}\,d\vec{r} = v_2 R_2 \Delta x_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}(v_2 R_2 \Delta x_2)\,\Delta x_3$$

sau

$$\int_{LM} \vec{v}\,d\vec{r} = -v_2 R_2 \Delta x_2 - \frac{\partial}{\partial x_3}(v_2 R_2 \Delta x_2)\,\Delta x_3.$$

Similar

$$\int_{PM} \vec{v}\,d\vec{r} = \vec{v}\Big|_P (R_3\,\Delta x_3\,\vec{u}_3) = v_3 R_3 \Delta x_3 \quad \text{sau} \quad \int_{MP} \vec{v}\,d\vec{r} = -v_3 R_3 \Delta x_3$$

și

$$\int_{QL} \vec{v}\,d\vec{r} = v_3 R_3 \Delta x_3 + \frac{\partial}{\partial x_2}(v_3 R_3 \Delta x_3)\,\Delta x_2.$$

Adunînd aceste relații, obținem

$$\int_{\Gamma_1} \vec{v}\,d\vec{r} = \frac{\partial}{\partial x_2}(v_3 R_3 \Delta x_3)\,\Delta x_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}(v_2 R_2 \Delta x_2)\,\Delta x_3 =$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial x_2}(v_3 R_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(v_2 R_2)\right] \Delta x_2 \Delta x_3,$$

lăsînd la o parte termenii infinitezimali de ordin mai mare ca $\Delta x_2 \Delta x_3$.

Împărțind prin aria lui (S_1) egală cu $R_2 R_3 \Delta x_2 \Delta x_3$ și trecînd la limită cînd $\Delta x_2 \to 0$ și $\Delta x_3 \to 0$, avem

$$(\text{rot}\ \vec{v})\,\vec{u}_1 = \frac{1}{R_2 R_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(v_3 R_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(v_2 R_2)\right].$$

Analog, considerînd suprafețele (S_2) și (S_3) perpendiculare în P la $\vec{u}_2$, respectiv $\vec{u}_3$, găsim $(\text{rot}\ \vec{v})\,\vec{u}_2$ și $(\text{rot}\ \vec{v})\,\vec{u}_3$.

Deci

$$\text{rot}\ \vec{v} = \frac{1}{R_2 R_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(v_3 R_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(v_2 R_2)\right]\vec{u}_1 + \frac{1}{R_1 R_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(v_1 R_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(v_3 R_3)\right]\vec{u}_2 +$$
$$+ \frac{1}{R_1 R_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(v_2 R_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(v_1 R_1)\right]\vec{u}_3.$$

Scanned with OKEN Scanner

31. Fie $\vec{v}(x, y, z)$ o funcție vectorială și $F(x, y, z)$ o funcție scalară. Să se determine elementul de lungime ds și expresiile pentru grad F, div $\vec{v}$, rot $\vec{v}$ și ΔF în:

1° sistemul de coordonate al elipsoidului de rotație alungit;

2° în sistemul de coordonate al elipsoidului de rotație turtit.

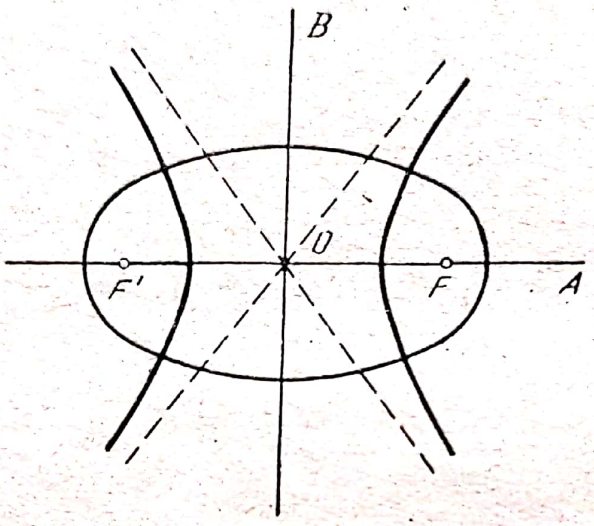


Fig. I.31

R. 1° Rotind figura I.31 în jurul axei OA, elipsele și hiperbolele omofocale descriu, respectiv, elipsoizi de rotație alungiți și hiperboloizi de rotație cu două pînze, ortogonali, care formează primele două familii de suprafețe de coordonate. O altă familie este constituită din plane care trec prin axa de rotație. Luînd axele Ox, Oy, Oz pe OA, OB, OC (perpendiculara în O pe planul OAB), ecuațiile suprafețelor de coordonate în cele două sisteme se scriu:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \xi} + \frac{z^2}{a^2 \operatorname{ch}^2 \xi} - 1 = 0, \qquad \xi = \text{const};$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2 \sin^2 \varphi} - \frac{z^2}{a^2 \cos^2 \varphi} + 1 = 0, \qquad \varphi = \text{const};$$

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \psi, \qquad \psi = \text{const}.$$

Dacă se limitează variațiile coordonatelor la intervalele

$$0 \leqslant \xi < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi,$$

punctele spațiului sînt descrise o singură dată.

Coordonatele ξ, φ, ψ sînt definite de ecuațiile

$$x = a \operatorname{sh} \xi \sin \varphi \sin \psi, \quad y = a \operatorname{sh} \xi \sin \varphi \cos \psi, \quad z = a \operatorname{ch} \xi \cos \varphi. \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Elementul de lungime va fi

$$ds^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2=a\,(\mathrm{ch}^2\,\xi-\cos^2\varphi)\,[(d\xi)^2+(d\varphi)^2]+a\,\mathrm{sh}^2\,\xi\,\sin^2\varphi\,(d\psi)^2.$$

Parametrii lui Lamé sînt

$$R_1=R_\xi=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}\right|=a\,(\mathrm{ch}^2\,\xi-\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}},\quad R_2=R_\varphi=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|=R_\xi,$$

$$R_3=R_\psi=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\psi}\right|=a\,\mathrm{sh}\,\xi\,\sin\varphi.$$

Pentru grad F înlocuind în relaţia care dă gradientul într-un sistem de coordonate curbilinii ortogonale

$$\mathrm{grad}\,F=\frac{1}{R_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\vec{u}_1+\frac{1}{R_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}\vec{u}_2+\frac{1}{R_3}\frac{\partial F}{\partial x_3}\vec{u}_3,$$

parametrii lui Lamé şi coordonatele x_1, x_2, x_3, obţinem

$$\mathrm{grad}\,F=\frac{1}{a\lambda}\frac{\partial F}{\partial\xi}\vec{u}_\xi+\frac{1}{a\lambda}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi+\frac{1}{a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\varphi}\frac{\partial F}{\partial\psi}\vec{u}_\psi,$$

unde $\lambda=(\mathrm{ch}^2\,\xi-\cos^2\varphi)^{1/2}$ iar $\vec{u}_\xi$, $\vec{u}_\varphi$, $\vec{u}_\psi$ sînt versorii noului sistem de coordonate.

Avem

$$\mathrm{div}\,\vec{v}=\frac{1}{R_1R_2R_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(R_2R_3v_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(R_1R_3v_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(R_1R_2v_3)\right],$$

deci în cazul sistemului (1) de coordonate rezultă

$$\mathrm{div}\,\vec{v}=\frac{1}{a\lambda^2}\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2\,\xi+\sin^2\varphi}{\mathrm{th}\,\xi}v_\xi+\frac{2\sin^2\varphi+\mathrm{sh}^2\,\xi}{\mathrm{tg}\,\varphi}v_\varphi\right)+$$
$$+\frac{1}{a\lambda}\left(\frac{\partial v_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\varphi}\frac{\partial v_\psi}{\partial\psi}.$$

Din relaţia

$$\mathrm{rot}\,\vec{v}=\frac{1}{R_1R_2R_3}\begin{vmatrix}R_1\vec{u}_1 & R_2\vec{u}_2 & R_3\vec{u}_3\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ R_1v_1 & R_2v_2 & R_3v_3\end{vmatrix}$$

rezultă în cazul sistemului (1):

$$\mathrm{rot}\,\vec{v}=\left[\frac{1}{a\lambda}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varphi}v_\psi+\frac{\partial v_\psi}{\partial\varphi}\right)-\frac{1}{a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\varphi}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\psi}\right]\vec{u}_\xi+$$
$$+\left[\frac{1}{a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\varphi}\frac{\partial v_\xi}{\partial\psi}-\frac{1}{a\lambda}\left(\frac{1}{\mathrm{th}\,\xi}v_\psi+\frac{\partial v_\psi}{\partial\xi}\right)\right]\vec{u}_\varphi+$$
$$+\left[\frac{1}{a\lambda^3}(\mathrm{ch}\,\xi\,\mathrm{sh}\,\xi\,v_\varphi-\cos\varphi\sin\varphi\,v_\xi)+\frac{1}{a\lambda}\left(\frac{\partial v_\psi}{\partial\xi}-\frac{\partial v_\xi}{\partial\varphi}\right)\right]\vec{u}_\psi.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relaţia

$$\Delta F=\frac{1}{R_1 R_2 R_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{R_2 R_3}{R_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{R_1 R_3}{R_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{R_1 R_2}{R_3}\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)\right]$$

rezultă

$$\Delta F=\frac{1}{a^2\lambda^2}\left(\frac{1}{\operatorname{th}\xi}\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\frac{\partial F}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\right)+\frac{1}{a^2 \operatorname{sh}^2\xi \sin^2\varphi}\frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2}.$$

2° Dacă rotim figura I.31 în jurul axei OB, se descriu elipsoizi de rotaţie turtiţi de hiperboloizi de rotaţie cu o pînză ortogonali, care formează primele două familii de suprafeţe de coordonate. A treia familie este formată din plane care trec prin axa de rotaţie. Luînd axele de coordonate OA, OB, OC, ecuaţiile suprafeţelor de coordonate sînt

$$\frac{x^2+y^2}{a^2 \operatorname{ch}^2\xi}+\frac{z^2}{a^2 \operatorname{sh}^2\xi}-1=0, \qquad \xi=\text{const};$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2\cos^2\varphi}-\frac{z^2}{a^2\sin^2\varphi}-1=0, \qquad \varphi=\text{const};$$

$$\frac{x}{y}=\operatorname{tg}\psi, \qquad \psi=\text{const},$$

iar ξ, φ, ψ sînt legate de coordonatele x, y, z prin relaţiile

$$x=a \operatorname{ch}\xi\cos\varphi\sin\psi,\quad y=a\operatorname{ch}\xi\cos\varphi\cos\psi,\quad z=a\operatorname{sh}\xi\sin\varphi. \tag{2}$$

Parametrii lui Lamé vor fi în acest caz

$$R_\xi=R_\varphi=a\,(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}},\quad R_\psi=a\operatorname{ch}\xi\cos\varphi.$$

Dacă ψ are o variaţie de amplitudine 2π iar $0\leqslant\xi<+\infty$, $+\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ sau $-\infty<\xi<+\infty$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, toate punctele spaţiului sînt descrise o singură dată. Elementul de lungime va fi

$$ds^2=a^2(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\varphi)\,[(d\xi)^2+(d\varphi)^2]+a^2\operatorname{ch}^2\xi\cos^2\varphi\,(d\psi)^2.$$

Procedînd ca la punctul 1°, găsim

$$\operatorname{grad}F=\frac{1}{a\lambda}\frac{\partial F}{\partial\xi}\vec{u}_\xi+\frac{1}{a\lambda}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi+\frac{1}{a\operatorname{ch}\xi\cos\varphi}\frac{\partial F}{\partial\psi}\vec{u}_\psi,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\lambda=(\mathrm{ch}^2\,\xi-\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$,

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{1}{a\lambda^3}\left[\operatorname{th}\xi\,(2\,\mathrm{ch}^2\,\xi-\cos^2\varphi)\,v_\xi+\operatorname{tg}\varphi\,(2\cos^2\varphi-\mathrm{ch}^2\,\xi)\,v_\varphi\right]+$$

$$+\frac{1}{a\lambda}\left(\frac{\partial v_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\varphi}\,\frac{\partial v_\psi}{\partial\psi},$$

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\left[\frac{1}{a\lambda}\left(\frac{\partial v_\psi}{\partial\varphi}-\operatorname{tg}\varphi\,v_\psi\right)-\frac{1}{a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\varphi}\,\frac{\partial v_\varphi}{\partial\psi}\right]\vec{u}_\xi+$$

$$+\left[\frac{1}{a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\varphi}\,\frac{\partial v_\xi}{\partial\psi}-\frac{1}{a\lambda}\left(\frac{\partial v_\psi}{\partial\xi}+\operatorname{th}\xi\;v_\psi\right)\right]\vec{u}_\varphi+$$

$$+\left[\frac{1}{a\lambda^3}\left(\mathrm{sh}\,\xi\,\mathrm{ch}\,\xi\,v_\varphi-\sin\varphi\cos\varphi\,v_\xi\right)+\frac{1}{a\lambda}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial\xi}-\frac{\partial v_\xi}{\partial\varphi}\right)\right]\vec{u}_\psi,$$

$$\Delta F=\frac{1}{a^2\lambda^2}\left(\operatorname{th}\xi\,\frac{\partial F}{\partial\xi}-\operatorname{tg}\varphi\,\frac{\partial F}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2F}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{1}{a^2\,\mathrm{ch}^2\,\xi\cos^2\varphi}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial\psi^2}.$$

32. Să se arate că cîmpul vectorial definit prin vectorul $\vec{v}=\frac{z}{\rho}\vec{u}_\theta+\theta\,\vec{u}_z$ este irotaţional şi solenoidal.

R. $\vec{v}$ este irotaţional dacă $\operatorname{rot}\vec{v}=0$. În coordonate cilindrice avem

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\theta)-\frac{\partial}{\partial z}(z)\right]\vec{u}_\rho+\left[-\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right]\vec{u}_\theta+\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial z}{\partial\rho}\,\vec{u}_z=0,$$

sau $\vec{v}$ este irotaţional dacă există un cîmp scalar φ aşa încît $\operatorname{grad}\varphi=\vec{v}$. În sistemul de coordonate cilindrice

$$\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\vec{u}_\rho+\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{u}_\theta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{u}_z.$$

Egalînd componentele scalare a celor doi vectori, rezultă

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{z}{\rho},\quad\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\theta,\quad\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}=0.$$

Soluţia acestui sistem este

$$\varphi=z\,\theta+\text{const.}$$

Scriind $\vec{v}=\operatorname{grad}\varphi$, avem

$$\operatorname{div}\vec{v}=\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\operatorname{div}\left[\frac{z}{\rho}\vec{u}_0+\theta\,\vec{u}_z\right]=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\cdot\frac{z}{\rho}\right)\right]+\frac{\partial\theta}{\partial z}=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

33. Să se arate că

$$\vec{v}=yz\,(2x+y+z)\,\vec{i}+zx\,(x+2y+z)\,\vec{j}+xy\,(x+y+2z)\,\vec{k}$$

este un cîmp vectorial irotaţional şi să se determine funcţia de forţă a acestui cîmp.

R. Dacă scriem

$$\vec{v}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k},$$

avem

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}=\frac{\partial v_2}{\partial x}=z\,(2x+2y+z),$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial z}=\frac{\partial v_3}{\partial y}=x\,(x+2y+2z),$$
$$\frac{\partial v_3}{\partial x}=\frac{\partial v_1}{\partial z}=y\,(2x+y+2z),$$

de unde rezultă rot $\vec{v}=0$.

Determinarea funcţiei de forţă a acestui cîmp revine la găsirea unei funcţii $\varphi(x, y, z)$ astfel încît

$$\vec{v}=\operatorname{grad}\varphi.$$

Aceasta conduce la rezolvarea sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=yz\,(2x+y+z),$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=zx\,(x+2y+z),$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=xy\,(x+y+2z).$$

Din prima ecuaţie a sistemului deducem

$$\varphi(x, y, z)=xyz\,(x+y+z)+f(y, z), \qquad (1)$$

unde $f(y, z)$ este o funcţie arbitrară de variabilele y, z.

Punînd condiţia ca $\varphi(x, y, z)$ astfel determinată să verifice şi ecuaţia a doua din sistem, găsim

$$xz\,(x+2y+z)+\frac{\partial f}{\partial y}=xz\,(x+2y+z),$$

de unde rezultă

$$f(y, z)=g(z),$$

unde $g(z)$ este o funcţie arbitrară; deci

$$\varphi(x, y, z)=xyz\,(x+y+z)+g(z).$$

Scanned with OKEN Scanner

Această funcție trebuie să verifice și ultima ecuație din sistem. Din această condiție rezultă

$$xy\,(x+y+2z)+g'(z)=xy\,(x+y+2z),$$

adică

$$g'(z)=0,$$

de unde rezultă $g(z)=C$, $(C=\text{const})$.

Înlocuind aceste rezultate în (1), obținem

$$\varphi(x, y, z)=xyz\,(x+y+z)+C.$$

34. Să se arate că $\vec{v}=z\vec{u}_\rho+\rho\vec{u}_z$ este un cîmp vectorial irotațional și să se determine funcția de forță a cîmpului.

R. În sistemul de coordonate cilindrice avem

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec{u}_\rho & \rho\vec{u}_\theta & \vec{u}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z & 0 & \rho\end{vmatrix}=0,$$

deci $\vec{v}$ este un cîmp vectorial irotațional și orice cîmp vectorial irotațional este gradientul unui cîmp scalar, deci

$$\vec{v}=\operatorname{grad}\varphi.$$

Avem

$$d\varphi=\vec{v}\,d\vec{r}=(z\vec{u}_\rho+\rho\vec{u}_z)\,(\vec{u}_\rho d\rho+\rho\vec{u}_\theta\,d\theta+\vec{u}_z dz)$$

sau

$$d\varphi=z\,d\rho+\rho\,dz=d(\rho z),$$

de unde rezultă

$$\varphi=\rho z+c, \qquad (c=\text{const}).$$

35. Se consideră triunghiul ABC dat prin vectorii $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ și vectorul $\vec{v}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{r})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{r})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{r})$.

1° Să se calculeze circulația cîmpului vectorial $\vec{v}$ pe conturul triunghiului.

2° Să se calculeze fluxul cîmpului vectorial $\vec{v}$ prin suprafața care mărginește tetraedrul $OABC$.

3° Dacă $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ formează un triedru tridreptunghic, $\vec{v}(P)$ este solenoidal. Să se determine un potențial vector al lui $\vec{v}$ de forma

$$\vec{u}=\alpha[(\vec{a}\,\vec{r})\,(\vec{b}\times\vec{r})+(\vec{b}\,\vec{r})\,(\vec{c}\times\vec{r})+(\vec{c}\,\vec{r})\,(\vec{a}\times\vec{r})], \qquad (\alpha=\text{const}).$$

Scanned with OKEN Scanner

R. 1° Aplicînd formula lui Stokes, obținem

$$\int_{\Gamma} \vec{v}\, d\vec{r} = \iint_{S_\Gamma} \operatorname{rot} \vec{v}\, \vec{n}\, d\sigma;$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{a} \operatorname{div} (\vec{b} \times \vec{r}) - (\vec{b} \times \vec{r}) \operatorname{div} \vec{a} + [(\vec{b} \times \vec{r}) \nabla] \vec{a} - (\vec{a} \nabla) (\vec{b} \times \vec{r}) =$$
$$= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}.$$

Deci

$$\int_{\Gamma} \vec{v}\, d\vec{r} = (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}) \iint_{S_\Gamma} \vec{n}\, d\sigma = 2\, S^2,$$

S fiind aria triunghiului ABC, iar $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = S$.

2° Pentru a calcula fluxul, aplicăm formula integrală a divergenței

$$\iint_{\Sigma} \vec{v}\, \vec{n}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v}\, d\omega.$$

Dar

$$\operatorname{div} \vec{v} = -2 [\vec{a}\, \vec{b} + \vec{b}\, \vec{c} + \vec{c}\, \vec{a}], \tag{1}$$

deci

$$\Phi = -2 (\vec{a}\, \vec{b} + \vec{b}\, \vec{c} + \vec{c}\, \vec{a}) \iiint_{\Omega} d\omega = -3 (\vec{a}\, \vec{b}\, \vec{c})\, (\vec{a}\, \vec{b} + \vec{b}\, \vec{c} + \vec{c}\, \vec{a}).$$

3° Dacă $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ formează un triedru tridreptunghic, din (1) rezultă $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Pentru ca $\vec{u}$ să fie potențial vector al lui $\vec{v}$, trebuie să avem

$$\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{u}.$$

Avem

$$\operatorname{rot} \vec{u} = 3\alpha [\vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{r}) + \vec{c} (\vec{b} \cdot \vec{r}) + \vec{a} (\vec{c} \cdot \vec{r})] =$$
$$= 3\alpha [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{r}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{r}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{r})] = 3\alpha \vec{v}$$

deoarece $\vec{a}\, \vec{b} = \vec{a}\, \vec{c} = \vec{b}\, \vec{c} = 0$. Rezultă $\alpha = 1/3$.

36. Se consideră cîmpul vectorial

$$\vec{v}(M) = \int_{\Gamma} \frac{d\vec{r}_P}{r},$$

unde $\vec{r} = \overrightarrow{MP}$, iar Γ o curbă simplă închisă descrisă de P.

R. 1° Aplicînd formula lui Stokes, obţinem

$$\int_\Gamma \vec{v}\,d\vec{r}=\iint_{S_\Gamma} \operatorname{rot}\vec{v}\;\vec{n}\,d\sigma;$$

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\vec{a}\operatorname{div}(\vec{b}\times\vec{r})-(\vec{b}\times\vec{r})\operatorname{div}\vec{a}+[(\vec{b}\times\vec{r})\nabla]\vec{a}-(\vec{a}\nabla)(\vec{b}\times\vec{r})=$$
$$=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}.$$

Deci

$$\int_\Gamma \vec{v}\,d\vec{r}=(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})\iint_{S_\Gamma}\vec{n}\,d\sigma=2\,S^2,$$

S fiind aria triunghiului ABC, iar $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=S$.

2° Pentru a calcula fluxul, aplicăm formula integrală a divergenţei

$$\iint_\Sigma \vec{v}\;\vec{n}\,d\sigma=\iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{v}\,d\omega.$$

Dar

$$\operatorname{div}\vec{v}=-2\,[\vec{a}\;\vec{b}+\vec{b}\;\vec{c}+\vec{c}\;\vec{a}], \tag{1}$$

deci

$$\Phi=-2\,(\vec{a}\;\vec{b}+\vec{b}\;\vec{c}+\vec{c}\;\vec{a})\iiint_\Omega d\omega=-3\,(\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c})\,(\vec{a}\;\vec{b}+\vec{b}\;\vec{c}+\vec{c}\;\vec{a}).$$

3° Dacă $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ formează un triedru tridreptunghic, din (1) rezultă $\operatorname{div}\vec{v}=0$. Pentru ca $\vec{u}$ să fie potenţial vector al lui $\vec{v}$, trebuie să avem

$$\vec{v}=\operatorname{rot}\vec{u}.$$

Avem

$$\operatorname{rot}\vec{u}=3\alpha\,[\vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{r})+\vec{c}\,(\vec{b}\cdot\vec{r})+\vec{a}\,(\vec{c}\cdot\vec{r})]=$$
$$=3\alpha\,[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{r})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{r})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{r})]=3\alpha\vec{v}$$

deoarece $\vec{a}\;\vec{b}=\vec{a}\;\vec{c}=\vec{b}\;\vec{c}=0$. Rezultă $\alpha=1/3$.

36. Se consideră cîmpul vectorial

$$\vec{v}(M)=\int_\Gamma \frac{d\vec{r}_P}{r},$$

unde $\vec{r}=\overrightarrow{MP}$, iar Γ o curbă simplă închisă descrisă de P.

1° Să se exprime $\vec{v}(M)$ printr-o integrală de suprafaţă şi să se calculeze divergenţa şi rotorul acestui cîmp.

2° Să se determine un potenţial vector $\vec{u}$ al lui $\vec{v}$.

R. 1° Vom transforma integrala care dă proiecţia lui $\vec{v}$ pe o direcţie oarecare $\vec{a}$ cu ajutorul formulei lui Stokes. Avem

$$\vec{a}\,\vec{v}(M)=\int_{\Gamma}\frac{\vec{a}}{r}\,d\vec{r}_P=\iint_S \operatorname{rot}\left(\frac{\vec{a}}{r}\right)\vec{n}\,d\sigma=\iint_S\frac{\vec{a}\times\vec{r}}{r^3}\,\vec{n}\,d\sigma=\vec{a}\iint_S\frac{\vec{r}\times\vec{n}}{r^3}\,d\sigma,$$

de unde rezultă

$$\vec{v}(M)=\iint_S\frac{\vec{r}\times\vec{n}}{r^3}\,d\sigma;$$

$$\operatorname{div}\vec{v}(M)=\iint_S\vec{\nabla}_M\left(\frac{\vec{r}\times\vec{n}}{r^3}\right)d\sigma=\iint_S \operatorname{rot}_M\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\,\vec{n}\,d\sigma=0;$$

$$\operatorname{rot}\vec{v}(M)=\iint_S\left(\vec{\nabla}_M\times\frac{\vec{r}\times\vec{n}}{r^3}\right)d\sigma=\iint_S\left[(\vec{n}\vec{\nabla}_M)\frac{\vec{r}}{r^3}-\left(\vec{\nabla}_M\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\vec{n}\right]d\sigma=$$

$$=\iint_S(\vec{n}\vec{\nabla}_M)\frac{\vec{r}}{r^3}\,d\sigma,\quad\text{deoarece}\quad\operatorname{div}_M\frac{\vec{r}}{r^3}=0.$$

2° Pentru a determina un potenţial vector al cîmpului $\vec{v}$, observăm că $\vec{n}\,d\sigma$ este constant în raport cu M şi din $\vec{r}=\overrightarrow{MP}$ rezultă $\dfrac{\vec{r}}{r^3}=-\operatorname{grad}_P\dfrac{1}{r}=\operatorname{grad}_M\dfrac{1}{r}$,

$\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3}=\dfrac{\overrightarrow{MP}}{MP^3}=-\dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right)$.

Avem

$$\vec{v}(M)=\iint_S\operatorname{grad}_M\frac{1}{r}\times\vec{n}\,d\sigma=\operatorname{rot}_M\iint_S\frac{1}{r}\,\vec{n}\,d\sigma,$$

deci potenţialii vectori au forma

$$\vec{u}(M)=\iint_S\frac{1}{r}\,n\,d\sigma+\operatorname{grad}f(M).$$

Notînd cu ω unghiul solid sub care se vede suprafața (S) din punctul M și calculînd gradientul lui ω, avem

$$\operatorname{grad}\omega(M)=\iint_S \vec{\nabla}_M\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\vec{n}\right)d\sigma=\iint_S\left[\vec{n}\times\operatorname{rot}_M\frac{\vec{r}}{r^3}+(\vec{n}\vec{\nabla}_M)\frac{\vec{r}}{r^3}\right]d\sigma=$$

$$=\iint_S(\vec{n}\vec{\nabla}_M)\frac{\vec{r}}{r^3}d\sigma=\operatorname{rot}\vec{v}(M).$$

Din punct de vedere electromagnetic, aceasta corespunde faptului că $\operatorname{rot}\vec{v}$ care reprezintă cîmpul magnetic se exprimă direct în funcție de unghiul solid sub care se vede din M curba pe care circulă curentul.

37. 1° Să se determine un potențial vector al cîmpului electrostatic $\vec{v}=\frac{a\cdot\vec{r}}{r^3}$ și să se stabilească legătura lui $\vec{v}$ cu unghiul solid sub care se vede o suprafață (S) de frontieră (Γ).

2° Să se calculeze potențialul vector al aceluiași cîmp, tangent conului $\theta=$ const.

R. 1° Calculînd

$$\operatorname{div}\vec{v}=\operatorname{div}\left(a\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=\frac{-3a}{r^3}+\frac{3a}{r^3}=0,$$

rezultă că $\vec{v}$ este rotorul unui cîmp vectorial $\vec{w}$, deci

$$\operatorname{rot}\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}=\frac{a}{r^3}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}). \tag{1}$$

O soluție particulară a ecuației $\vec{v}=\operatorname{rot}\vec{w}$ se obține luînd $\vec{w}_3=0$. Din (1) identificînd, avem

$$-\frac{\partial w_2}{\partial z}=\frac{ax}{r^3},$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial z}=\frac{ay}{r^3},$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial x}-\frac{\partial w_1}{\partial y}=\frac{az}{r^3}.$$

Din prima ecuație a sistemului rezultă

$$w_2 = -\int_{z_0}^{z} \frac{ax}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dz + f(x, y) = -\frac{axz}{r(x^2+y^2)} + f(x, y), \tag{2}$$

iar din ecuația a doua deducem

$$w_1 = \int_{z_0}^{z} \frac{ay}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dz + g(x, y) = \frac{ayz}{r(x^2+y^2)} + g(x, y). \tag{3}$$

Soluția particulară este

$$\vec{w} = \frac{az}{r(x^2+y^2)}(y\vec{i} - x\vec{j}) = \frac{az}{x^2+y^2}\frac{\vec{r}\times\vec{k}}{r},$$

unde am luat $f=g=0$. Aceasta este posibil deoarece, înlocuind în ultima ecuație a sistemului pe w_1 și w_2 dați de (2) și (3), obținem ecuația

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

care este satisfăcută și de $f=g=0$.

Prin permutări circulare se obțin soluții analoge, astfel pentru $w_1=0$ se obține soluția

$$\vec{w} = \frac{ax}{x^2+y^2}\frac{\vec{r}\times\vec{i}}{r},$$

iar pentru $w_2=0$

$$\vec{w} = \frac{ay}{x^2+y^2}\frac{\vec{r}\times\vec{j}}{r}.$$

Unghiul solid sub care se vede suprafața (S) este

$$\omega = \iint_S \frac{\vec{r}\,\vec{n}}{r^3}\,d\sigma$$

care este tocmai fluxul cîmpului electrostatic cu $a=1$. Unghiul solid este independent de (S) și depinde numai de (Γ), în virtutea teoremei lui Stokes

$$\omega = \int_\Gamma \vec{w}\,d\vec{r}.$$

2° Vom rezolva problema, utilizînd sistemul de coordonate sferice. În acest sistem

$$\vec{v} = \frac{a}{r^2}\vec{u}_r.$$

Pentru a determina potențialul vector cu $w_\theta = 0$, scriem ecuația $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{w}$ în coordonate sferice

$$\frac{a}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{u}_r & r\vec{u}_\theta & r\sin\theta\,\vec{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ w_r & 0 & r\sin\theta\, w_\varphi \end{vmatrix},$$

de unde rezultă

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\, w_\varphi) = a\sin\theta,$$

$$\frac{\partial w_r}{\partial\theta} = 0,$$

$$\frac{\partial w_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\, w_\varphi) = 0.$$

Din primele două ecuații obținem

$$r\sin\theta\, w_\varphi = -a\cos\theta + f(r, \varphi) \tag{4}$$

și

$$w_r = g(r, \varphi), \tag{5}$$

unde f și g sînt funcții arbitrare derivabile.

Din ultima ecuație și din (4) și (5), obținem ecuația

$$\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial g}{\partial\varphi} = 0,$$

care este satisfăcută de soluția particulară $f = g = 0$.

Potențialul vector va fi

$$\vec{w} = -\frac{a}{r}\operatorname{cotg}\theta\,\vec{u}_\varphi.$$

38. Fie $\vec{v} = yz(y+z)\vec{i} + xz(x+z)\vec{j} + xy(x+y)\vec{k}$. Să se determine suprafețele ortogonale liniilor de cîmp și să se scrie $\vec{v}$ sub forma $\vec{v} = \lambda \operatorname{grad} F$.

R. Avem

$$\operatorname{rot}\vec{v} = 2x(y-z)\vec{i} + 2y(z-x)\vec{j} + 2z(x-y)\vec{k}$$

și

$$\vec{v}\operatorname{rot}\vec{v} = 2xyz(y^2-z^2) + 2xyz(z^2-x^2) + 2xyz(x^2-y^2) = 0,$$

deci cîmpul vectorial $\vec{v}$ este biscalar și admite o familie de suprafețe ortogonale liniilor de cîmp. Dacă într-un domeniu D există o suprafață (S) ortogonală liniilor de cîmp,

în fiecare punct al suprafeței (S), rot $\vec{v}$ este tangent suprafeței, deci suprafețele ortogonale liniilor de cîmp trebuie căutate printre suprafețele de cîmp ale lui rot $\vec{v}$.

Liniile de cîmp ale lui rot $\vec{v}$ sînt soluțiile sistemului

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$$

și anume

$$x+y+z=C_1, \quad xyz=C_2, \quad (C_1, C_2=\text{const}).$$

Dar

$$\text{rot } \vec{v} \text{ grad } (x+y+z)=0, \quad \text{rot } \vec{v} \text{ grad } (xyz)=0,$$

deci în fiecare punct din D, vectorii $\vec{v}$, grad $(x+y+z)$, grad (xyz) sînt coplanari, deoarece sînt perpendiculari pe rot $\vec{v}$. Putem descompune $\vec{v}$ după direcțiile vectorilor grad $(x+y+z)$ și grad (xyz):

$$\vec{v}=\alpha \text{ grad } (x+y+z)+\beta \text{ grad } (xyz).$$

Calculînd gradienții și identificînd cu $\vec{v}$ dat inițial, obținem

$$\alpha=-xyz, \quad \beta=x+y+z,$$

deci

$$\vec{v}=-xyz \text{ grad } (x+y+z)+(x+y+z) \text{ grad } (xyz).$$

Cu aceasta ecuația cu diferențiale totale $\vec{v}\,d\vec{r}=0$ devine

$$(x+y+z)\,d(xyz)-(xyz)\,d(x+y+z)=0.$$

Integrala generală a acestei ecuații este o funcție de C_1 și C_2 și anume

$$\frac{x+y+z}{xy}=C, \qquad (C=\text{const}).$$

Această ecuație reprezintă familia de suprafețe ortogonale liniilor de cîmp. Cîmpul vectorial se poate scrie sub forma

$$\vec{v}=\lambda \text{ grad } \frac{x+y+z}{xyz},$$

iar λ se determină prin identificare

$$\vec{v}=\lambda \frac{(xyz) \text{ grad } (x+y+z)-(x+y+z) \text{ grad } (xyz)}{(xyz)^2}.$$

Comparînd cu expresia de mai înainte, se obține $\lambda=-(xyz)^2$, deci

$$\vec{v}=-x^2y^2z^2 \text{ grad } \frac{x+y+z}{xyz}.$$

Scanned with OKEN Scanner

39. Să se determine suprafețele ortogonale liniilor de cîmp ale cîmpului vectorial definit prin vectorul

$$\vec{v}=z(1-e^y)\,\vec{i}+xze^y\vec{j}+x(1-e^y)\vec{k}.$$

R. Avem $\operatorname{rot}\vec{v}=-2\,xe^y\,\vec{i}+2\,ze^y\,\vec{k}$. Rezultă

$$\vec{v}\operatorname{rot}\vec{v}=-2\,xze^y+2\,xze^y-2\,xze^{2y}+2\,xze^{2y}=0,$$

deci $\vec{v}$ este un cîmp biscalar.

Liniile de vîrtej se obțin integrînd sistemul

$$\frac{dx}{-xe^y}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{ze^y}.$$

Se obține

$$xz=C_1,\quad y=C_2,\quad (C_1,\ C_2=\text{const}).$$

Cîmpul vectorial $\vec{v}$ se poate scrie sub forma

$$\vec{v}=\alpha\ \operatorname{grad}(xz)+\beta\ \operatorname{grad}e^y.$$

Comparînd expresia

$$\vec{v}=\alpha\,z\,\vec{i}+\beta\,e^y\,\vec{j}+x\alpha\,\vec{k}$$

cu vectorul $\vec{v}$ dat, rezultă

$$\alpha=1-e^y,\quad \beta=xz,$$

deci, putem scrie

$$\vec{v}=(1-e^y)\ \operatorname{grad}(xz)-xz\ \operatorname{grad}(1-e^y). \tag{1}$$

Ecuația cu diferențiale totale $\vec{v}\,d\vec{r}=0$ este

$$(1-e^y)\,d(xz)-(xz)\,d(1-e^y)=0$$

cu soluția

$$\frac{1-e^y}{xz}=C,\quad (C=\text{const}).$$

Această ecuație reprezintă familia de suprafețe ortogonale liniilor de cîmp ale vectorilor $\vec{v}$. Cîmpul vectorial $\vec{v}$ se poate scrie

$$\vec{v}=\lambda\ \operatorname{grad}\frac{1-e^y}{xz}.$$

Comparînd expresia

$$\vec{v}=\lambda\,\frac{(xz)\ \operatorname{grad}(1-e^y)-(1-e^y)\ \operatorname{grad}(xz)}{(xz)^2}$$

cu (1), rezultă $\lambda = -x^2z^2$, deci

$$\vec{v} = -x^2z^2 \operatorname{grad} \frac{1-e^y}{xz}.$$

40. Să se arate că $\vec{v} = \sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,\vec{u}_\varphi$ este un cîmp biscalar şi să se determine liniile de vîrtej şi suprafeţele ortogonale.

R. În sistemul de coordonate sferice avem

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{u}_r & r\vec{u}_\theta & r\sin\theta\,\vec{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \sin\theta & \cos\theta & -r\sin\theta\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\left[-\operatorname{cotg}\theta\,\vec{u}_r + \vec{u}_\theta\right].$$

Deoarece

$$\vec{v}\operatorname{rot}\vec{v} = \frac{1}{r}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\left[-\sin\theta\operatorname{cotg}\theta + \cos\theta\right] = 0,$$

rezultă că $\vec{v}$ este biscalar.

Liniile de vîrtej sînt date de ecuaţia $\operatorname{rot}\vec{v}\times d\vec{r} = 0$ sau

$$\frac{dr}{-\operatorname{cotg}\theta} = \frac{r\,d\theta}{1} = \frac{r\sin\theta\,d\varphi}{0}.$$

Acest sistem admite integralele prime

$$\varphi = C_1,\quad r\sin\theta = C_2,\quad (C_1, C_2 = \text{const}).$$

Ecuaţia suprafeţelor ortogonale $\vec{v}\cdot d\vec{r} = 0$ este

$$\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta - r\sin\theta\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 0.$$

Această ecuaţie se poate integra observînd că $\frac{1}{r\sin\theta}$ este un factor integrant sau luînd ca variabile pe $r\sin\theta$ şi φ şi scriind-o sub forma

$$d(r\sin\theta) - r\sin\theta\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 0$$

cu soluţia

$$r\sin\theta\,(1+\cos\varphi) = C,\quad (C = \text{const}),$$

reprezentînd o familie de cilindri parabolici verticali.

41. Să se arate că cîmpul vectorial definit de vectorul

$$\vec{v}=2(\vec{a}\,\vec{r})\,\vec{a}+2(\vec{b}\,\vec{r})\,\vec{b}-\frac{(\vec{a}\,\vec{r})^2+(\vec{b}\,\vec{r})^2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})}\cdot\vec{a}\times\vec{b}$$

este biscalar. Să se determine suprafețele ortogonale liniilor de cîmp și să se scrie $\vec{v}$ sub forma $\vec{v}=\lambda$ grad F.

R. Avem

$$\operatorname{rot}\vec{v}=-\frac{2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})^2}\left[(\vec{a}\,\vec{r})\,\vec{a}+(\vec{b}\,\vec{r})\,\vec{b}\right]\times(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Scriem $\operatorname{rot}\vec{v}$ sub forma

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\mu\vec{v}_1\times(\vec{a}\times\vec{b})\ \text{ cu }\ \mu=-\frac{2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})^2},\ \vec{v}_1=(\vec{a}\,\vec{r})\,\vec{a}+(\vec{b}\,\vec{r})\,\vec{b},$$

iar cîmpul vectorial $\vec{v}$ este de forma

$$\vec{v}=2\vec{v}_1+\vec{\lambda a}\times\vec{b},\ \text{unde}\ \lambda=-\frac{(\vec{a}\,\vec{r})^2+(\vec{b}\,\vec{r})^2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})}.$$

Rezultă

$$\vec{v}\operatorname{rot}\vec{v}=\left[2\vec{v}_1+\lambda\vec{a}\times\vec{b}\right]\left[\mu\,\vec{v}_1\times(\vec{a}\times\vec{b})\right]=0,$$

deci $\vec{v}$ este un cîmp biscalar.

Ecuația vectorială a liniilor de vîrtej

$$\operatorname{rot}\vec{v}\times d\vec{r}=0$$

sau

$$\mu\left[\vec{v}_1\times(\vec{a}\times\vec{b})\right]\times d\vec{r}=0$$

conduce la ecuațiile diferențiale vectoriale

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,d\vec{r})=0,\ \vec{v}_1\,d\vec{r}=0$$

cu soluțiile

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})=C_1,\ (\vec{a}\,\vec{r})^2+(\vec{b}\,\vec{r})^2=C_2,\ (C_1,\ C_2=\text{const}).$$

Ecuația vectorială a suprafețelor ortogonale liniilor de cîmp

$$\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r}=0$$

se scrie

$$2\left[(\vec{a}\,\vec{r})\,\vec{a}+(\vec{b}\,\vec{r})\,\vec{b}\right]\mathrm{d}\vec{r}-\frac{(\vec{a}\,\vec{r})^2+(\vec{b}\,\vec{r})^2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})}(\vec{a}\times\vec{b})\mathrm{d}\vec{r}=0$$

sau

$$\mathrm{d}\left[(\vec{a}\,\vec{r})^2+(\vec{b}\,\vec{r})^2\right]-\frac{(\vec{a}\,\vec{r})^2+(\vec{b}\,\vec{r})^2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})}\mathrm{d}\,(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})=0.$$

Integrala generală a acestei ecuații este

$$\frac{(\vec{a}\,\vec{r})^2+(\vec{b}\,\vec{r})^2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})}=C,\quad (C=\text{const}).$$

Această ecuație reprezintă familia de suprafețe ortogonale liniilor de cîmp ale cîmpului $\vec{v}$. Cîmpul vectorial $\vec{v}$ se poate scrie sub forma

$$\vec{v}=\lambda\,\mathrm{grad}\,\frac{(\vec{a}\,\vec{r})^2+(\vec{b}\,\vec{r})^2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})},$$

iar λ se determină prin identificare. Avem

$$\vec{v}=\lambda\left[\frac{2\,(\vec{a}\,\vec{r})\,\vec{a}+2\,(\vec{b}\,\vec{r})\,\vec{b}}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})}-\frac{(\vec{a}\,\vec{r})^2+(b\,\vec{r})^2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})}\,\vec{a}\times\vec{b}\right].$$

Comparînd cu expresia dată a lui $\vec{v}$, se obține

$$\lambda=(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r}),$$

deci

$$\vec{v}=(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})\,\mathrm{grad}\,\frac{(\vec{a}\,\vec{r})^2+(\vec{b}\,\vec{r})^2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})}.$$

42. Să se determine potențialul vector al cîmpului magnetic produs de un curent.

R. Să considerăm o sarcină electrică e care se deplasează cu viteza $\vec{v}$; ea este echivalentă cu un element de curent electric de intensitate i și lungime $\mathrm{d}l$, astfel încît

$$i\mathrm{d}\vec{l}=e\vec{v}. \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Numărul i este pozitiv cînd curentul se deplasează în sensul pozitiv al vectorului $\vec{dl}$. Cîmpul produs la o distanță r de o particulă electrizată care se deplasează cu viteza $\vec{v}$ este

$$\vec{H}=\frac{e\,\vec{v}\times\vec{r}}{4\pi r^3}.$$

În interiorul unui mediu magnetic apar magneți elementari și aceasta conduce la definirea unui vector inducție magnetică $\vec{B}$, a cărui divergență este totdeauna nulă:

$$\operatorname{div}\vec{B}=0.$$

Să căutăm un potențial vector al vectorului $\vec{B}$ astfel ca

$$\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}.$$

Se știe că în vid

$$\vec{B}=\mu_0\vec{H},$$

deci vectorul $\vec{A}$ va fi definit de

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{e\,\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

sau

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[e\vec{v}\times\vec{i}\frac{x}{r^3}+e\vec{v}\times\vec{j}\,\frac{y}{r^3}+e\vec{v}\times\vec{k}\,\frac{z}{r^3}\right]=$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\vec{i}\times\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e\vec{v}}{r}\right)+\vec{j}\times\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e\vec{v}}{r}\right)+\vec{k}\times\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e\vec{v}}{r}\right)\right].$$

Comparînd acest rezultat cu

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\vec{i}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}+\vec{j}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}+\vec{k}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial z},$$

se deduce

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\vec{V}}{r}.$$

În cazul în care mișcarea particulelor încărcate se reduce la o translație (curentul într-un fir), dacă notăm cu $d\sigma$ un element din suprafața prin care trece un curent $\vec{i}$ și cu $\vec{J}$ vectorul densitate de curent, avem $\vec{J}\,d\sigma=\vec{i}$ iar formula (1) ne dă imediat potențialul vector al curentului într-un fir printr-o integrală extinsă la volumul firului considerat:

$$\vec{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\vec{J}d\omega}{r}.$$

43. Presupunînd că potențialul vector $\vec{A}$ într-un punct P datorită unui curent i care se scurge într-un circuit închis (Γ) este dat prin

$$\vec{A}=i\int_{\Gamma}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{r},$$

unde r este distanța de la un element vectorial $\mathrm{d}\vec{r}$ al curbei (Γ) la P, atunci cîmpul vectorial $\vec{H}$ în punctul P este dat de

$$\vec{H}=i\int_{\Gamma}\frac{\mathrm{d}\vec{r}\times\vec{r}}{r^3}.$$

R. Avem

$$\vec{H}=\operatorname{rot}\vec{A}.$$

Aplicînd operatorul diferențial relativ la punctul P, obținem

$$\vec{H}=\operatorname{rot}\vec{A}=\operatorname{rot}\left[i\int_{\Gamma}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{r}\right]=i\int_{\Gamma}\operatorname{rot}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{r}\right),$$

dar

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{r}\right)=\frac{1}{r}\operatorname{rot}\mathrm{d}\vec{r}+\operatorname{grad}\frac{1}{r}\times\mathrm{d}\vec{r}=\frac{1}{r^3}\mathrm{d}\vec{r}\times\vec{r},$$

deoarece $\operatorname{rot}\mathrm{d}\vec{r}=0$, rotorul fiind calculat în P.

Rezultă

$$\vec{H}=i\int_{\Gamma}\frac{\mathrm{d}\vec{r}\times\vec{r}}{r^3}.$$

44. Dacă φ este o funcție scalară de x, y, z, t și satisface ecuația

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=c^2\Delta\varphi,$$

să se arate că vectorii

$$\vec{E}=(\vec{k}\vec{\nabla})\vec{\nabla}\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\vec{k},\quad \vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\varphi\times\vec{k})$$

satisfac ecuațiile lui Maxwell.

R. Avem

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{1}{c}\operatorname{rot}\left[\frac{\partial}{\partial t}\ (\vec{\nabla}\varphi\times\vec{k})\right]=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\operatorname{rot}\ (\vec{\nabla}\varphi\times\vec{k})\right]=$$

$$=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[-\vec{k}\Delta\varphi+\frac{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}{\partial z}\right]=\frac{1}{c}\frac{\partial^2(\vec{\nabla}\varphi)}{\partial z\partial t}-\frac{1}{c}\frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial t}\vec{k}. \tag{1}$$

De asemenea

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[(\vec{k}\vec{\nabla})\ (\vec{\nabla}\varphi)-\frac{1}{c^2}\vec{k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right]=\frac{1}{c}\frac{\partial^2(\vec{\nabla}\varphi)}{\partial z\partial t}-\frac{1}{c^3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\vec{k}. \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\ \text{dacă}\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=c^2\Delta\varphi.$$

Similar

$$\operatorname{rot}\vec{E}=\operatorname{rot}\left[(\vec{k}\vec{\nabla})\ (\vec{\nabla}\varphi)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\vec{k}\right]=\operatorname{rot}\left[\frac{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}{\partial t}\right]-\frac{1}{c^2}\operatorname{rot}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\vec{k}\right]=$$

$$=\operatorname{rot}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\vec{i}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\vec{j}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\vec{k}\right]-\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\operatorname{rot}\vec{k}+\vec{\nabla}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\times\vec{k}\right]=$$

$$=-\frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\times\vec{k}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial t}\ (\vec{\nabla}\varphi\times\vec{k})\right]$$

deoarece

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\vec{\nabla}\varphi).$$

Rezultă

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}.$$

45. Să se determine potențialul newtonian pentru o placă circulară omogenă $x^2+y^2=a^2$ în punctul $(0, 0, z)$.

R. Fie punctul $M\ (0, 0, z)$ și $P\ (\xi, \eta, 0)$ punctul mobil (fig. I.45). Avem

$$u\ (M)=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mu}{r}\ d\sigma,$$

unde $r=\sqrt{\xi^2+\eta^2+z^2}$.

Cu transformarea $\xi=\rho\cos\theta$, $\eta=\rho\sin\theta$, $0\leqslant\rho\leqslant a$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, avem

$$u(M)=\mu\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}=2\pi\mu[\sqrt{a^2+z^2}-z].$$

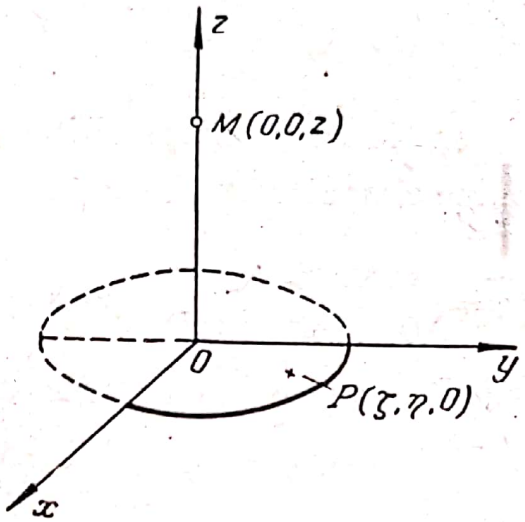


Fig. I.45

46. Să se determine potențialul newtonian al jumătății superioare a sferei omogene $x^2+y^2+z^2=a^2$ de densitate μ în punctul $M(0, 0, z)$, $z>a$.

R. Potențialul newtonian de volum corespunzător unei distribuții continue pe Ω cu densitatea $\mu(P)$ este

$$u(M)=-\iiint_\Omega\mu(P)\frac{d\omega_p}{r},$$

unde $\vec{r}=\overrightarrow{MP}$.

Fie $P(\xi, \eta, \zeta)$. Avem $r=\sqrt{\xi^2+\eta^2+(z-\zeta)^2}$ și $\mu=\text{const}$, deci

$$u(M)=-\mu\iiint_\Omega\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(z-\zeta)^2}}.$$

Trecînd la coordonate sferice

$$\xi=\rho\sin\theta\cos\varphi, \qquad 0\leqslant\rho\leqslant a,$$
$$\eta=\rho\sin\theta\sin\varphi, \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$
$$\zeta=\rho\cos\theta, \qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,$$

obținem

$$u(M)=-\mu\int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi}{\sqrt{\rho^2-2z\rho\cos\theta+z^2}}=-\frac{2\pi\mu}{z}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{z\rho^2\sin\theta\,d\theta\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-2z\rho\cos\theta+z^2}}=$$

$$=-\frac{2\pi\mu}{z}\int_0^a\rho\left(\sqrt{\rho^2+z^2}-\rho-z\right)d\rho=\frac{2\pi\mu}{3z}\left[z^3+a^3+\frac{3}{2}a^2z-(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

47. Fie domeniul D avînd ca frontieră cilindrul circular de rază a și axă Oz. Să se determine cîmpul vectorial $\vec{v}(M)$ irotațional în tot spațiul și pentru care

$$\operatorname{div}\vec{v}=\begin{cases}\alpha, & \text{dacă } M\in D,\\ 0, & \text{dacă } M\notin D,\end{cases}\quad(\alpha=\text{const}).$$

R. Soluția sistemului $\operatorname{div}\vec{v}=f(M)$, $\operatorname{rot}\vec{v}=0$, $f(M)$ fiind definit în tot spațiul, este

$$\vec{v}(M)=\operatorname{grad}\varphi,\quad \varphi(M)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{V_\infty}\frac{f(P)}{MP}\,d\omega_P, \tag{1}$$

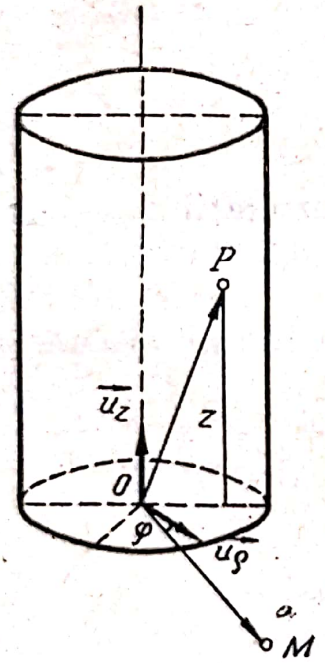


Fig. I.47

unde $MP=\left|\overrightarrow{MP}\right|$ iar $d\omega_p$ este elementul de volum al punctului variabil P din domeniul de integrare V_∞ (tot spațiul) în ipoteza convergenței integralei improprii. Avem (fig. I.47)

$$\overrightarrow{MP}^2=(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM})^2,\quad \overrightarrow{OM}=\vec{r},\quad \overrightarrow{OP}=\rho\vec{u}_\rho+z\vec{u}_z,$$

considerînd un sistem de coordonate cilindrice cu originea în O iar semiplanul meridian-origine trecînd prin M. Deci

$$\overrightarrow{MP}^2=(\rho\vec{u}_\rho+z\vec{u}_z-\vec{r})^2=\rho^2-2\rho r\cos\varphi+r^2+z^2,\ (\vec{u}_z\perp\vec{r}).$$

Potențialul este dat de integrala

$$\varphi=-\frac{1}{4\pi}\iiint_D\frac{\alpha}{\sqrt{\rho^2-2\rho r\cos\varphi+r^2+z^2}}\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=$$

$$=-\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^a\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}\left\{\lim_{l\to\infty}\left[\ln\left(z+\sqrt{\rho^2-2\rho r\cos\varphi+r^2+z^2}\right)\Big|_0^l\right]\right\}d\varphi$$

care este divergentă.

Această problemă conduce la un potențial infinit dat de ecuația (1). În acest caz vom căuta o diferență de potențiale finită

$$\varphi-\varphi_0=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{V_\infty}\left[\frac{1}{MP}-\frac{1}{M_0P}\right]f(P)\,d\omega_p, \tag{2}$$

M_0 fiind un punct fix. Deoarece $\vec{v}(M)=\operatorname{grad}(\varphi-\varphi_0)$, cîmpul $\vec{v}(M)$ este invariant la o asemenea schimbare de potențial. Avem

$$\varphi-\varphi_0=-\frac{\alpha}{4\pi}\iiint_D\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2\rho r\cos\varphi+r^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2\rho r_0\cos(\varphi-\varphi_0)+r_0^2+z^2}}\right]\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz,$$

unde $\vec{r}_0=\overrightarrow{AM_0}$, A fiind proiecția lui M_0 pe axa cilindrului (Oz); iar $\varphi-\varphi_0=\measuredangle(\vec{r}_0,\vec{u}_\rho)$. Integrînd în raport cu z și observînd că MP și M_0P sînt funcții pare de z, avem

$$\varphi-\varphi_0=-\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^a\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\left\{\lim_{l\to\infty}\left[\ln\left(z+\sqrt{\rho^2-2\rho r\cos\varphi+r^2+z^2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ln\left(z+\sqrt{\rho^2-2\rho r_0\cos(\varphi-\varphi_0)+r_0^2+z^2}\right)\right]\Big|_0^l\right\}=\frac{\alpha}{4\pi}\int_0^a\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}\ln\frac{\rho^2-2\rho r\cos\varphi+r^2}{\rho^2-2\rho r_0\cos(\varphi-\varphi_0)+r_0^2}\,d\varphi.$$

Se știe că

$$\int_0^{2\pi}\ln(\rho^2-2\rho r\cos\varphi+r^2)\,d\varphi=\begin{cases}4\pi\ln\rho, & \text{dacă } \rho>r,\\ 4\pi\ln r_1 & \text{dacă } \rho<r,\end{cases}$$

deci pentru M exterior lui D, $(r>a)$, putem lua și M_0 exterior lui D, $(r_0>a)$, iar $0\leqslant\rho\leqslant a$, $\rho<r$, $\rho<r_0$ și

$$\varphi-\varphi_0=\frac{\alpha}{4\pi}\int_0^a[4\pi\ln r-4\pi\ln r_0]\,\rho d\rho=\frac{1}{2}a^2\alpha\ln\frac{r}{r_0}.$$

Dacă $r\to\infty$, atunci $\varphi-\varphi_0\to+\infty$, deci pentru M_0 în interior nu putem avea $r=r_0$.

Dacă M este interior lui D, $(r<a)$, putem lua M_0 interior, $(r_0<a)$, și din $0\leqslant\rho\leqslant a$ rezultă

$$\varphi-\varphi_0=\frac{\alpha}{4\pi}\left[\int_0^r(4\pi\ln r)\,\rho d\rho+\int_r^a(4\pi\ln\rho)\,\rho d\rho-\int_0^{r_0}(4\pi\ln r_0)\rho d\rho-\int_{r_0}^a(4\pi\ln\rho)\rho d\rho\right]=$$

$$=\frac{\alpha}{4}(r^2-r_0^2)=\frac{\alpha}{4}r^2+C,\quad (C=\text{const}).$$

Pentru M exterior lui D, $(r>a)$, avem

$$\vec{v}(M)=\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}a^2\alpha\ln\frac{r}{r_0}\right)\text{ sau }\vec{v}(M)=\frac{1}{2}a^2\alpha\frac{\vec{r}}{r^2}.$$

Pentru $r\to\infty$, $\vec{v}\to 0$, iar dacă $\vec{r}\to a+0$, $\vec{v}\to\frac{1}{2}\alpha\vec{r}\big|_{r=a}$.

Pentru $r<a$, (M interior), $\vec{v}(M)=\text{grad}\left(\frac{\alpha}{4}r^2-\frac{\alpha}{4}r_0^2\right)=\frac{1}{2}\vec{u}_r$. În acest caz dacă $r\to 0$, $\vec{v}\to 0$, iar dacă $r\to a-0$, $\vec{v}\to\frac{1}{2}\alpha\vec{r}\Big|_{r=a}$.

Pe suprafaţa cilindrului potenţialul $\varphi-\varphi_0$ are discontinuităţi de prima speţă, iar $\vec{v}(M)$ este continuu.

48. Fiind dat planul (P) printr-un punct O şi un vector $\vec{a}\perp(P)$, să se determine cîmpul vectorial $\vec{v}(M)$ în tot spaţiul ştiind că

$$\text{rot}\,\vec{v}=\begin{cases}\vec{c}, & \text{pentru } M\in(P)\\ 0, & \text{pentru } M\notin(P)\end{cases} \quad \text{şi} \quad \text{div}\,\vec{v}(M)\equiv 0.$$

R. Soluţia sistemului $\text{div}\,\vec{v}\equiv 0$, $\text{rot}\,\vec{v}=\vec{f}(M)$, vectorul $\vec{f}(M)$ fiind definit în tot spaţiul, este

$$\vec{v}=\text{rot}\,\vec{w} \text{ cu } \vec{w}(M)=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{V_\infty}\frac{\vec{f}(P)}{MP}\,d\omega_p,$$ unde $MP=|\overrightarrow{MP}|$, iar $d\omega_p$ este elementul de volum al punctului variabil P din V_∞ (tot spaţiul).

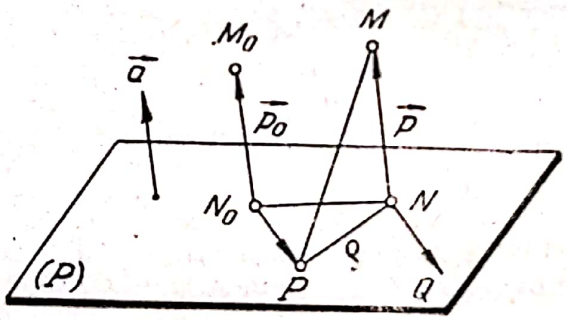


Fig. I.48

Fie N proiecţia ortogonală a lui M pe planul (P) şi $\overrightarrow{MN}=\vec{p}$ (fig. I.48). Dacă $d\omega_p=hd\sigma_p$, $\overrightarrow{NP}=\vec{\rho}$, $\overrightarrow{PM}^2=\vec{p}^2+\vec{\rho}^2$, $(\vec{p}\perp\vec{\rho})$, avem

$$\vec{w}(M)=\frac{h}{4\pi}\vec{c}\iint\limits_{(P)}\frac{d\sigma_p}{\sqrt{p^2+\rho^2}}.$$

Această integrală dublă este divergentă deoarece

$$\iint\limits_{(P)}\frac{d\sigma_p}{\sqrt{p^2+\rho^2}}=\lim_{\rho\to\infty}\iint\limits_{(P)}\frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{\sqrt{p^2+\rho^2}}=2\pi\lim_{\rho\to\infty}\left[\sqrt{p^2+\rho^2}-p\right]=\infty.$$

În acest caz se înlocuiește potențialul $\vec{w}$ cu $\vec{w}-\vec{w}_0$, ($\vec{w}_0=\text{const}$), astfel încît integrala

$$\vec{w}-\vec{w}_0=\frac{1}{4\pi}\iiint_{V_\infty}\left[\frac{1}{MP}-\frac{1}{M_0P}\right]\vec{f}(P)\,d\omega_p$$

să fie convergentă (finită și determinată), iar M_0 este fix. Evident, $\vec{w}$ și $\vec{w}-\vec{w}_0$ au același rotor. Avem

$$\vec{w}-\vec{w}_0=\frac{h\vec{c}}{4\pi}\iint_{(P)}\left[\frac{1}{\sqrt{\overrightarrow{MN}^2+\overrightarrow{NP}^2}}-\frac{1}{\sqrt{\overrightarrow{M_0N_0}^2+\overrightarrow{N_0P}^2}}\right]d\sigma_p$$

unde N_0 este proiecția ortogonală pe planul (P) a unui punct fix M_0.

Fie (P') un domeniu care tinde către tot planul (P). Notînd $\overrightarrow{N_0M_0}=\vec{p}_0$, avem

$$\vec{w}-\vec{w}_0=\frac{h}{4\pi}\vec{c}\lim_{(P')\to(P)}\left[\iint_{(P')}\frac{d\sigma_p}{\sqrt{\overrightarrow{MN}^2+\overrightarrow{NP}^2}}-\iint_{(P')}\frac{d\sigma_p}{\sqrt{\overrightarrow{M_0N_0}^2+\overrightarrow{N_0P}^2}}\right].$$

Aplicînd celei de-a doua integrale o transformare dată de translația $\overrightarrow{N_0P}=\overrightarrow{NQ}$, avem

$$\vec{w}-\vec{w}_0=\frac{h}{4\pi}\vec{c}\lim_{(P'),\,(P'')\to(P)}\left[\iint_{(P')}\frac{d\sigma_p}{\sqrt{\vec{p}^2+\overrightarrow{NP}^2}}-\iint_{(P'')}\frac{d\sigma_p}{\sqrt{\vec{p}_0^2+\overrightarrow{NQ}^2}}\right],$$

unde (P'') se deduce din (P') printr-o translație. Trecînd la limită și înlocuind Q cu P, obținem

$$\vec{w}-\vec{w}_0=\frac{h}{4\pi}\vec{c}\iint_{(P)}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2+\rho^2}}-\frac{1}{\sqrt{p_0^2+\rho^2}}\right]d\sigma_p.$$

Trecînd în coordonate polare, în planul (P) avem

$$\vec{w}-\vec{w}_0=\frac{h}{4\pi}\vec{c}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2+\rho^2}}-\frac{1}{\sqrt{p_0^2+\rho^2}}\right]\rho\,d\rho=$$

$$=\frac{h\vec{c}}{2}\left[\lim_{\rho\to\infty}\frac{p^2+\rho^2-(p_0^2+\rho^2)}{\sqrt{p^2+\rho^2}+\sqrt{p_0^2+\rho^2}}-(p-p_0)\right]=\frac{h}{2}(p-p_0)\vec{c}.$$

Avem $\vec{v}(M)=\text{rot}\,[\vec{w}(M)-\vec{w}_0(M)]$ și cum $p=\frac{\vec{a}}{a}\vec{r}-\alpha$, dacă ecuația planului (P) este $\vec{a}\cdot\vec{r}=\alpha$, rezultă

$$\vec{v}(M)=\text{rot}\left[-\frac{h}{2}p\vec{c}\right]=\frac{h}{2a}\vec{c}\times\vec{a}=\text{const}.$$

Se arată ușor că potențialul vector $\vec{w}-\vec{w}_0$ este biscalar.

49. Să se determine cîmpul vectorial $\vec{v}(M)$ în tot spaţiul ştiind că

$$\operatorname{div}\vec{v}(M)=\begin{cases}\alpha, & \text{dacă } M\in D,\\ 0, & \text{dacă } M\notin D,\end{cases}\qquad \operatorname{rot}\vec{v}(M)=\begin{cases}\vec{b}, & M\in(\Sigma),\\ 0, & M\notin(\Sigma),\end{cases}$$

unde α, $\vec{b}$ sînt constante, domeniul D este interiorul unei sfere pline date de raza a, (Σ) este frontiera domeniului D.

R. Soluţia sistemului $\operatorname{div}\vec{v}=f(M)$, $\operatorname{rot}\vec{v}=\vec{u}(M)$, $f(M)$ şi $\vec{u}(M)$ fiind definiţi în tot spaţiul, este

$$\vec{v}(M)=\operatorname{grad}\varphi(M)+\operatorname{rot}\vec{w}(M),\ \text{cu}$$

$$\varphi(M)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{V_\infty}\frac{f(P)}{MP}\,d\omega_p,\qquad \vec{w}(M)=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{V_\infty}\frac{\vec{u}(P)}{MP}\,d\omega_p.$$

Fie $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$, $\theta=\sphericalangle(\vec{r},\vec{p})$. Rezultă

$$\overrightarrow{MP}^2=(\vec{p}-\vec{r})^2=\vec{p}^2-2\vec{p}\,\vec{r}+r^2=p^2-2pr\cos\theta+r^2$$

şi

$$d\omega_p=p^2\sin\theta\,dp\,d\theta\,d\varphi$$

unde p, θ, φ sînt coordonatele sferice ale lui P relativ la $\vec{r}$, (fig. I.49).

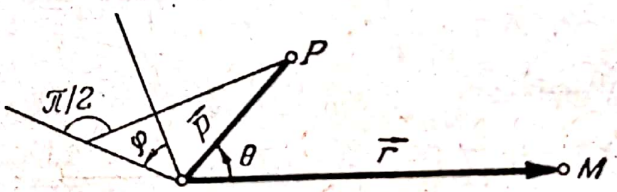


Fig. I.49

Avem

$$\varphi(M)=-\frac{\alpha}{4\pi}\iiint\limits_{D}\frac{p^2\sin\theta\,dp\,d\theta\,d\varphi}{\sqrt{p^2-2pr\cos\theta+r^2}}=-\frac{\alpha}{2r}\int_0^a\left[\sqrt{(p+r)^2}-\sqrt{(p-r)^2}\right]p\,dp.$$

Dacă $M\notin D$, atunci $r\geqslant a$, $\varphi(M)=-\dfrac{\alpha}{2r}\displaystyle\int_0^a 2p^2\,dp=-\frac{a^3\alpha}{3}\cdot\frac{1}{r}$.

Dacă $M\in D$, $r<a$, avem

$$\varphi(M)=-\frac{\alpha}{2r}\left[\int_0^r 2p^2\,dp+\int_r^a 2pr\,dp\right]=-\frac{\alpha}{2r}\left[\frac{2}{3}r^3+r(a^2-r^2)\right].$$

Dacă $r=a-0$, $\varphi(M)=-\frac{\alpha}{3}a^2$, iar pentru $r=a+0$, $\varphi(M)=-\frac{\alpha}{3}a^2$, deci $\varphi(M)$ nu este discontinuu pe (Σ).

Pentru $r<a$, grad $\varphi(M)=\frac{\alpha}{3}\vec{r}$. Pentru $r\geqslant a$, grad $\varphi(M)=\frac{a^3\alpha}{3}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}$ și grad $\varphi(M)$ nu este discontinuu pe (Σ).

Pentru potențialul vector avem

$\vec{w}(M)=\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma\frac{\vec{b}}{MP}d\sigma_p$, unde $d\omega_p=l\,d\sigma_p$, $d\sigma_p$ fiind elementul de arie pe (Σ) relativ la punctul P, iar l este grosimea stratului sferic. Aici $p=a$. Avem

$$\vec{w}(M)=\frac{1}{4\pi}\vec{b}\iint_\Sigma\frac{a^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{\sqrt{a^2-2ar\cos\theta+r^2}}=\frac{al}{2r}\vec{b}\,[|a+r|-|a-r|].$$

Dacă $M\in D$, $r<a$, atunci $\vec{w}(M)=al\vec{b}$. Dacă $M\notin D$, $r\geqslant a$, rezultă $\vec{w}(M)=\frac{a^2l}{r}\vec{b}$, iar pe sfera $r=a$, $\vec{w}(M)$ nu este discontinuu.

Avem

$$\operatorname{rot}\vec{w}(M)=\begin{cases}0, \text{ pentru } r<a,\\ a^2l\dfrac{\vec{b}\times\vec{r}}{r^3} \text{ pentru } r\geqslant a,\end{cases}$$

iar pe (Σ), rot $\vec{w}(M)$ este discontinuu deoarece rot $\vec{w}=0$ pentru $r=a-0$ și rot $\vec{w}=\frac{l}{a}\vec{b}\times\vec{r}\neq 0$ pentru $r=a+0$. Deci cîmpul vectorial $\vec{v}(M)$ va fi

$$\vec{v}(M)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{3}\vec{r}, \text{ pentru } r<a,\\ \dfrac{a^2}{r^3}\left(\dfrac{\alpha a}{r^3}\vec{r}+l\vec{b}\times\vec{r}\right), \text{ pentru } r>a.\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul II

FUNCȚII DE O VARIABILĂ COMPLEXĂ

Mulțimea numerelor complexe este mulțimea perechilor ordonate de numere reale (x, y) care satisfac axiomele:

1) $(x, y)=(x', y') \rightleftarrows x=x', y=y'$;

2) $(1, 0)=1$;

3) $k(x, y)=(x, y)k=(kx, ky)$;

4) $(x, y)+(x', y')=(x+x', y+y')$;

5) $(x, y)\cdot(x', y')=(xx'-yy', xy'+x'y)$.

Notăm $(0, 1)=i$. Cu aceasta avem

$$(x, y)=x+iy, \quad i^2=-1.$$

Numărul $\bar{z}=x-iy$ se numește *conjugatul* numărului complex z.

Forma trigonometrică a numărului complex este

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

iar *forma exponențială*

$$z=\rho e^{i\varphi},$$

unde *modulul* ρ și *argumentul* φ sînt dați de relațiile

$$\rho=|z|=(z\bar{z})^{1/2}=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=\arccos\frac{x}{\rho}\\ \varphi&=\arcsin\frac{y}{\rho}\end{aligned}\right\}.$$

Două numere complexe z_1 și z_2 sînt *egale* dacă

$$\rho_1=\rho_2,\quad \varphi_1=\varphi_2+2k\pi,\qquad (k=\text{const}).$$

Dacă avem două numere complexe $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, atunci

$$z_1\pm z_2=x_1\pm x_2+i\,(y_1\pm y_2),$$

$$z_1z_2=x_1x_2-y_1y_2+i\,(x_1y_2+x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2},$$

$$z_1^n=\rho_1^n\,(\cos n\varphi_1+i\sin n\varphi_1),$$

$$\sqrt[n]{z_1}=\rho_1^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}\right].$$

Fie $Z=f(z)$ o funcție de variabila complexă $z=x+iy$. Avem

$$f(z)=P(x,y)+iQ(x,y),$$

unde $P(x,y)$ și $Q(x,y)$ sînt două funcții reale de variabilele reale x, y.

O funcție $f(z)$ se numește *uniformă* dacă unei valori date lui z îi corespunde o singură valoare pentru $f(z)$. O funcție care nu este uniformă se numește *multiformă*.

Seria

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots, \tag{1}$$

unde z este variabilă complexă iar a_k sînt constante complexe, se numește *serie întreagă* sau *serie de puteri*.

Teorema lui Abel. *Orice serie întreagă are un disc de convergență cu centrul în origine, raza R a discului depinzînd de coeficienții seriei. În punctele discului seria este absolut convergentă, iar în punctele exterioare circumferinței este divergentă. În orice cerc plin $|z|\leqslant r<R$ seria este uniform convergentă.*

Scanned with OKEN Scanner

Teorema lui Cauchy-Hadamard. *Raza de convergență a seriei* (1) *este*

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

sau

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

Teorema Abel. *Dacă* a_k *sînt numere reale pozitive și raza de convergență a seriei este* R, *și dacă* $a_0\geqslant a_1R\geqslant a_2R^2\geqslant\cdots\geqslant a_nR^n\geqslant\cdots$ *și* $\lim\limits_{n\to\infty}a_nR^n=0$, *seria* (1) *este convergentă pe cercul de convergență, afară, eventual, de valoarea* $z=R$.

O serie de forma

$$a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots,$$

unde a_k și z_0 sînt constante complexe, se numește *serie Taylor*.

O serie de forma

$$\sum_{n=\mu}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

unde μ este un întreg oarecare, se numește *serie polară*. Dacă $\mu=-\infty$, seria se numește *serie Laurent*.

Fiind dat un domeniu D, o funcție $f(z)$ definită univoc în fiecare punct din D se numește *funcție olomorfă*, sau *analitică* în D, dacă ea este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul oricărui punct $z_0\in D$.

O funcție $f(z)$ definită univoc într-un domeniu D este *meromorfă* în acest domeniu, dacă în vecinătatea oricărui punct $z_0\in D$ ea este reprezentabilă printr-o serie polară.

Punctele $z_0\in D$ în care funcția $f(z)$ este reprezentabilă printr-o serie polară cu $\mu<0$ se numesc *poli* ai funcției $f(z)$, numărul $|\mu|$ fiind *ordinul* polului.

Funcția $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$ se numește *funcție exponențială*.

Funcțiile circulare $\sin z$ și $\cos z$ sînt definite prin egalitățile

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},\quad \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}.$$

Avem

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Funcțiile hiperbolice sh z și ch z sînt definite de relațiile

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}.$$

Funcția $f(z)$ definită uniform într-un domeniu D din planul complex este *monogenă* în punctul $z_0 \in D$ dacă

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

există și este unic determinată.

O condiție necesară ca funcția $f(z)$ definită uniform în domeniul D să fie monogenă în punctul $z_0 \in D$ este ca funcțiile $P(x, y) = \operatorname{Re}[f(z)]$ și $Q(x, y) = \operatorname{Im}[f(z)]$, să admită derivate parțiale în punctul (x_0, y_0) și să verifice ecuațiile lui Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Dacă funcțiile $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ admit derivate parțiale de ordinul întîi continue în punctul (x, y), care verifică ecuațiile lui Cauchy-Riemann, funcția $f(x)$ este monogenă în punctul $z = x + iy$.

Funcțiile olomorfe într-un domeniu sînt monogene în acel domeniu și reciproc.

Dacă funcția $f(z)$ este monogenă într-un domeniu și dacă funcțiile $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ admit în acest domeniu derivate parțiale de ordinul doi, aceste funcții sînt armonice în domeniu.

Fiind dată funcția $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ continuă pe un arc de curbă rectificabilă C, avem

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C P(x, y)\,dx - Q(x, y)\,dy + i \int_C Q(x, y)\,dx + P(x, y)\,dy.$$

Teorema lui Cauchy. *Integrala unei funcții monogene într-un domeniu simplu conex D de-a lungul unei curbe simple, închise, rectificabile C, situată în întregime în D, este nulă.*

Formula integrală a lui Cauchy. *Dacă $f(z)$ este o funcție olomorfă într-un domeniu D, C o curbă simplă închisă, rectificabilă și z_0 un punct din interiorul domeniului mărginit de C, atunci*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

În aceleaşi condiţii avem

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz.$$

Fie funcţia $f(z)=(1+z)^\alpha$, unde α este un număr complex oarecare, iar pentru $f(z)$ considerăm ramura care în origine ia valoarea 1. Atunci în discul $|z|<1$ avem

$$(1+z)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots$$

Numărul $a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$, unde C este un cerc cu centrul în z_0, se numeşte *reziduul* funcţiei $f(z)$ relativ la punctul z_0 şi se notează

$$\operatorname*{Rez}_{z=z_0} f(z) \text{ sau } R_{z_0}.$$

Formula reziduului unui pol. Dacă $f(z)$ este o funcţie care are în punctul z_0 un pol de ordinul p, atunci

$$\operatorname*{Rez}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^p f(z)]^{(p-1)}.$$

Teorema reziduurilor (Cauchy). *Dacă C este o curbă simplă închisă, rectificabilă, în interiorul căreia o funcţie uniformă $f(z)$ are un număr finit de puncte singulare izolate $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, atunci*

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{h=1}^{p}\operatorname*{Rez}_{z=\alpha_h} f(z).$$

Pentru calculul anumitor integrale definite, reale cu ajutorul teoriei reziduurilor, se folosesc următoarele leme:

Lema 1. *Fie AB un arc de pe cercul $|z|=R$, astfel încît*

$$\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta.$$

Dacă

$$\lim_{|z|\to\infty} zf(z)=k, \qquad (k=\text{const}),$$

atunci

$$\lim_{R\to\infty}\int_{AB} f(z)\,dz=i(\beta-\alpha)k.$$

Lema 2. *Fie AB un arc de pe cercul $|z-a|=R$, astfel încît*

$$\alpha \leqslant \arg(z-a) \leqslant \beta.$$

Dacă

$$\lim_{|z|\to 0}(z-a)f(z)=k, \qquad (k=\text{const}),$$

atunci

$$\lim_{R\to 0}\int_{AB} f(z)\,dz = i(\beta-\alpha)k.$$

O transformare biunivocă $u=f(z)$ se numește *conformă* dacă păstrează unghiurile, adică, dacă unghiul dintre două curbe oarecare din planul (x, y) este egal cu unghiul dintre curbele transformate din planul (u, v).

O funcție monogenă care are derivata nenulă într-un domeniu D realizează o *transformare conformă* în acel domeniu.

O transformare conformă plană este realizată de o funcție monogenă sau de una antimonogenă (funcție a cărei conjugată este o funcție monogenă) care nu este constantă.

Transformarea

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \quad (\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0), \tag{2}$$

unde α, β, γ, δ sînt constante complexe, se numește *transformare liniară* sau *omografică*.

Un punct z se numește *punct dublu* sau *unit* al transformării (2) dacă este propriul său transformat adică, dacă $w=z$.

Orice transformare liniară se poate scrie sub forma

$$\frac{w-z_1}{w-z_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2}, \tag{2'}$$

dacă are punctele unite z_1 și z_2 distincte, sau sub forma

$$\frac{1}{w-z_1}=\frac{1}{z-z_1}+h, \tag{2''}$$

dacă are punctele unite confundate.

Transformările liniare se împart în următoarele clase:

1° transformările (2′) cu k=real se numesc *hiperbolice*;

2° transformările (2′) cu $|k|=1$, $(k\neq\pm 1)$, se numesc *eliptice*;

3° transformările (2′) cu k nereal și $|k|\neq 1$ se numesc *loxodromice*;

4° transformările (2″) se numesc *parabolice*.

Transformarea lui Schwartz-Christoffel. Transformarea

$$w=\alpha\int_{z_0}^{z}(z-z_1)^{a_1-1}\cdots(z-z_n)^{a_n-1}\,dz$$

reprezintă conform semiplanul superior din planul (z) pe interiorul unui poligon cu n laturi, cu unghiurile egale cu πa_k, din planul (w), cu $0\leqslant a_i\leqslant 2$, $\sum_{i=1}^{n} a_i=n-2$.

PROBLEME

1. Să se calculeze numerele complexe:

1° $z_1=\sin(2-i)$; 2° $z_2=\operatorname{ch}(1+i)$; 3° $z_3=i^{\sqrt{\pi}}$; 4° $z_4=i_i$; 5° $z_5=\operatorname{cotg}\left(\ln 2+\frac{\pi i}{3}\right)$.

R. 1° Avem

$$z_1=\sin 2\cos i-\sin i\cos 2.$$

Avînd în vedere că

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

rezultă că

$$\sin i=\frac{e^{-1}-e}{2i}=\frac{i(e^2-1)}{2e},\quad \cos i=\frac{e+e^{-1}}{2}=\frac{e^2+1}{2e};$$

adică

$$z_1=\frac{1}{2e}[(e^2+1)\sin 2+i(1-e^2)\cos 2].$$

2° Ținînd seama de formula

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

deducem

$$z_2=\frac{e^{1+i}+e^{-(1+i)}}{2}.$$

Dar

$$e^{i}=\cos 1+i\sin 1 \text{ și } e^{-i}=\cos 1-i\sin 1,$$

deci

$$z_2=\frac{e\,(\cos 1+i\sin 1)+\dfrac{\cos 1-i\sin 1}{e}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2e}\left[(e^2+1)\ \cos 1+i\,(e^2-1)\sin 1\right].$$

3° Aplicînd logaritmii egalității $z_3=i^{\sqrt{\pi}}$, obținem

$$\ln z_3=\sqrt{\pi}\ln i=\sqrt{\pi}\ln\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\right)=\pi^{1/2}\left(2k+\frac{1}{2}\right)i,$$

deci

$$z_3=e^{\pi^{1/2}\left(2k+\frac{1}{2}\right)i}\ ;\quad (k=0,\pm 1,\ldots).$$

4° Aplicînd logaritmii, obținem

$$\ln z_4=i\ln i=i\ln e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}=-\pi\left(2k+\frac{1}{2}\right),$$

de unde

$$z_4=e^{-\pi\left(2k+\frac{1}{2}\right)},\quad (k=0,\pm 1,\ldots).$$

5° Se știe că

$$\operatorname{cotg} z=i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}},$$

deci

$$z_5=i\,\frac{e^{i\left(\ln 2+\frac{\pi i}{3}\right)}+e^{-i\left(\ln 2+\frac{\pi i}{3}\right)}}{e^{i\left(\ln 2+\frac{\pi i}{3}\right)}-e^{-i\left(\ln 2+\frac{\pi i}{3}\right)}}.$$

Dar

$$e^{i\left(\ln 2+\frac{\pi i}{3}\right)}=e^{i\ln 2}\,e^{-\frac{\pi}{3}}=2^{i}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{3}-\operatorname{sh}\frac{\pi}{3}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$z_5 = i\,\frac{2^i\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{3}-\operatorname{sh}\frac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{2^i\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{3}-\operatorname{sh}\frac{\pi}{3}\right)}}{2^i\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{3}-\operatorname{sh}\frac{\pi}{3}\right)-\dfrac{1}{2^i\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{3}-\operatorname{sh}\frac{\pi}{3}\right)}} =$$

$$= \frac{2^{2i}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{3}-\operatorname{sh}\frac{\pi}{3}\right)^2+1}{2^{2i}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{3}-\operatorname{sh}\frac{\pi}{3}\right)^2-1}.$$

2. Să se determine expresiile lui $|\sin z|$ și $|\cos z|$ și să se demonstreze apoi că dacă $-\pi<a<\pi$ și n este un număr natural, avem

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right| \leqslant \frac{\operatorname{ch} ay}{\operatorname{ch} \pi y} \text{ pentru } z=\frac{2n+1}{2}+iy$$

și

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right| \leqslant \frac{\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\,a}{2}}{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\,\pi}{2}}, \text{ pentru } z=x+\frac{2n+1}{2}i.$$

R. Avem

$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x \operatorname{ch} y+i\cos x \operatorname{sh} y$, de unde, ținînd cont de relația $\operatorname{ch}^2 y-\operatorname{sh}^2 y=1$, obținem

$$|\sin z|=(\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y)^{1/2}.$$

Analog, din

$$\cos z=\cos(x+iy)=\cos x \operatorname{ch} y-i\sin x \operatorname{sh} y$$

avem

$$|\cos z|=(\cos^2 x+\operatorname{sh}^2 y)^{1/2}.$$

Dacă $z=\dfrac{2n+1}{2}+iy$, avem

$$|\sin az|^2=\sin^2\frac{(2n+1)\,a}{2}+\operatorname{sh}^2 ay=\operatorname{ch}^2 ay-\cos^2\frac{(2n+1)\,a}{2}\leqslant \operatorname{ch}^2 ay,$$

$$|\sin \pi z|^2=\sin^2\frac{(2n+1)\,\pi}{2}+\operatorname{sh}^2 \pi y=1+\operatorname{sh}^2 \pi y=\operatorname{ch}^2 \pi y,$$

de unde

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right|^2 \leqslant \left(\frac{\operatorname{ch} ay}{\operatorname{ch} \pi y}\right)^2$$

şi, avînd în vedere că $-\pi<a<\pi$, rezultă

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right| \leqslant \frac{\operatorname{ch} ay}{\operatorname{ch} \pi y}.$$

Pentru $z=x+\frac{2n+1}{2}i$, avem

$$|\sin az|^2 = \operatorname{ch}^2 \frac{(2n+1)a}{2} - \cos^2 ax \leqslant \operatorname{ch}^2 \frac{(2n+1)a}{2}$$

şi

$$|\sin \pi z|^2 = \sin^2 \pi x + \operatorname{sh}^2 \frac{(2n+1)\pi}{2} \geqslant \operatorname{sh}^2 \frac{(2n+1)\pi}{2},$$

deci

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right|^2 \leqslant \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)a}{2}}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{2}}\right],$$

de unde

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right| \leqslant \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)a}{2}}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{2}}.$$

3. Să se rezolve ecuaţiile

$$1^\circ\ \sin z=\sqrt{3};\quad 2^\circ\ \operatorname{cotg} z=2+i.$$

R. 1° Înlocuind pe $\sin z$ cu valoarea lui în funcţie de e^{iz}, obţinem ecuaţia

$$e^{2iz}-2i\sqrt{3}\,e^{iz}-1=0.$$

Rezolvînd această ecuaţie în raport cu e^{iz}, avem

$$e^{iz}=i(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}).$$

Avînd în vedere că $\sqrt{3}\pm\sqrt{2}>0$, această egalitate se mai poate scrie

$$e^{iz}=(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},$$

de unde

$$iz=\ln(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})+i\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

sau

$$z=2k\pi+\frac{\pi}{2}-i\ln(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}).$$

Ținînd seama că $\sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, rezultă

$$z=2k\pi+\frac{\pi}{2}\pm i\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}),$$

unde pentru logaritm se consideră determinarea principală.

2° Avem

$$\operatorname{cotg} z=i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1},$$

de unde

$$i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}=2+i$$

și deci

$$e^{2iz}=1+i.$$

Rezultă

$$z=-\frac{i}{2}\ln(1+i)$$

sau, avînd în vedere că $|1+i|=\sqrt{2}$, $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$,

$$z=-\frac{i}{2}\left[\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right],$$

adică

$$z=\frac{(8k+1)\pi}{8}-\frac{i}{4}\ln 2.$$

4. Să se determine raza de convergență a seriei

$$1+\frac{z}{1^2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{n^2}+\cdots$$

și să se studieze apoi seria pe cercul de convergență.

R. Raza de convergență a seriei este dată de formula

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|},$$

deci

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}}=1.$$

Seria este absolut convergentă în domeniul $|z|<1$.

Pentru a determina comportarea seriei pe cercul de convergență, aplicăm teorema Abel. Considerăm deci seria cu termenul general $u_n=a_nR^n$, unde $u_n=\frac{1}{n^2}$. Termenii acestei serii sînt pozitivi și descresc tinzînd către zero. Deci, seria este convergentă pe tot cercul $|z|=1$, afară, eventual, de punctul $z=1$.

Pentru $z=1$, seria devine

$$1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

și este convergentă. Deci, seria dată este convergentă în tot domeniul $|z|\leqslant 1$.

5. Să se determine raza de convergență a seriilor

$1^\circ\ \sum\limits_{n\geqslant 0}q^{n^2}z^n,\ (|q|<1);\quad 2^\circ\ \sum\limits_{n\geqslant 0}n^pz^n,\ p$ întreg și pozitiv.

R. 1° Raza de convergență a acestei serii este

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{q^{(n+1)^2}}{q^{n^2}}\right|}=\infty.$$

Seria este absolut și uniform convergentă în tot planul în afară de punctul de la infinit.

2° Pentru această serie avem

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^p}{n^p}\right|}=1.$$

Pe discul $|z|<1$ seria este absolut convergentă iar pe cercul $|z|=1$ seria este divergentă.

6. Să se determine raza de convergență a seriei

$$1+\frac{z^p}{1}+\frac{z^{2p}}{2}+\cdots+\frac{z^{np}}{n}+\cdots \qquad (1)$$

și să se studieze seria pe cercul de convergență.

R. Cu substituția $\zeta=z^p$ seria (1) devine

$$1+\frac{\zeta}{1}+\frac{\zeta^2}{2}+\cdots+\frac{\zeta^n}{n}+\cdots \tag{2}$$

Raza de convergență a acestei serii este

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}}=1.$$

Seria (2) este absolut convergentă în domeniul $|\zeta|<1$.
Termenii seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

sînt pozitivi și descresc tinzînd către zero, deci seria (2) este convergentă pe tot cercul $|\zeta|=1$ în afară de punctul $\zeta=1$. În acest punct seria (2) se scrie

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

și este divergentă.

Rezultă că seria (2) este convergentă în domeniul $|\zeta|\leqslant 1$, în afară de punctul $\zeta=1$.

Prin transformarea $\zeta=z^p$, domeniul $|\zeta|\leqslant 1$ devine domeniul $|z|\leqslant 1$, iar punctul $\zeta=1$ corespunde imaginilor soluțiilor ecuației

$$z^p=1$$

care sînt punctele

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{p}+i\sin\frac{2k\pi}{p},\quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1). \tag{3}$$

Deci, seria (1) este convergentă în domeniul $|z|\leqslant 1$, în afară de punctele (3).

7. Să se dezvolte funcția

$$f(z)=\frac{z^2+4z+1}{-z^3-2z^2+z+2}$$

în serie în jurul punctelor $z=0$, $z=\pm 1$, $z=2$.

R. Funcția $f(z)$ admite punctele $z=\pm 1$, $z=2$ ca poli simpli. Putem scrie funcția sub forma

$$f(z)=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2+z}-\frac{1}{1+z}. \tag{1}$$

În cercul $|z|<1$, funcția $f(z)$ este olomorfă și avem

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots,$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots+(-1)^n z^n+\cdots,$$

$$\frac{1}{2+z}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\cdots+(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n+\cdots\right].$$

Deci, în cercul $|z|<1$, dezvoltarea funcției este

$$f(z)=\frac{1}{2}+\frac{7}{4}z+\frac{1}{8}z^2+\frac{31}{16}z^3+\cdots+\left[1-(-1)^n+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right]z^n+\cdots$$

Pentru a dezvolta funcția $f(z)$ în jurul punctului $z=-1$, scriem relația (1) sub forma

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}+\frac{1}{1+(z+1)}-\frac{1}{1+z}.$$

În interiorul cercului cu centrul în punctul -1 și de raza 1 avem $|z+1|<1$, $\left|\frac{z+1}{2}\right|<1$ și deci,

$$\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}=1+\frac{z+1}{2}+\frac{(z+1)^2}{4}+\cdots,$$

$$\frac{1}{1+(z+1)}=1-(z+1)+(z+1)^2-(z+1)^3+\cdots,$$

și deci, dezvoltarea funcției $f(x)$ în jurul punctului $z=-1$ este

$$f(z)=-\frac{1}{1+z}+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}(z+1)+\frac{9}{8}(z+1)^2-\frac{15}{16}(z+1)^3+\cdots$$

Dacă scriem relația (1) sub forma

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$$

Scanned with OKEN Scanner

în interiorul cercului cu centrul în punctul $z=1$ și cu raza 1, avem $|z-1|<1$, $\left|\frac{z-1}{2}\right|<1$, $\left|\frac{z-1}{3}\right|<1$ și deci,

$$\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\cdots+(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n+\cdots,$$

$$\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}=1-\frac{z-1}{3}+\left(\frac{z-1}{3}\right)^2-\cdots+(-1)^n\left(\frac{z-1}{3}\right)^n+\cdots$$

Deci, dezvoltarea funcției $f(z)$ în jurul punctului $z=1$ este

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-1)^n.$$

Să scriem acum funcția (1) sub forma

$$f(z)=-\frac{1}{1+(z-2)}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{4}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{3}}.$$

În interiorul cercului cu centrul în punctul $z=2$ și cu raza 1, avem $|z-2|<1$, $\left|\frac{z-2}{4}\right|<1$, $\left|\frac{z-2}{3}\right|<1$, deci

$$\frac{1}{1+(z-2)}=1-(z-2)+(z-2)^2-\cdots+(-1)^n(z-2)^n+\cdots,$$

$$\frac{1}{1+\frac{z-2}{3}}=1-\frac{z-2}{3}+\left(\frac{z-2}{3}\right)^2-\cdots+(-1)^n\left(\frac{z-2}{3}\right)^n+\cdots,$$

$$\frac{1}{1+\frac{z-2}{4}}=1-\frac{z-2}{4}+\left(\frac{z-2}{4}\right)^2-\cdots+(-1)^n\left(\frac{z-2}{4}\right)^n+\cdots$$

Rezultă că în coroana circulară $0<|z-2|<1$ avem

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right)(z-2)^n.$$

8. Se dă funcția

$$f(z)=\sqrt{1-z^2}+\sqrt{4-z^2}$$

unde pentru cei doi radicali se consideră ramurile care în origine iau valorile 1, respectiv 2.

Să se dezvolte această funcție în serie de puteri ale lui z în domeniile:

$$1^\circ\ |z|<1;\quad 2^\circ\ 1<|z|<2;\quad 3^\circ\ |z|>2.$$

R. Funcția $\sqrt{1+z^2}$ are punctele critice $z=\pm 1$, deci ramura considerată este uniformă în interiorul și în exteriorul cercului de ecuație $|z|=1$.

Funcția $\sqrt{4-z^2}$ are punctele critice $z=\pm 2$, deci ramura considerată este uniformă în interiorul și în exteriorul cercului de ecuație $|z|=2$.

Rezultă că ramura considerată a funcției $f(z)$ este uniformă în domeniile date.

Scriem funcția $f(z)$ sub forma

$$f(z)=(1-z^2)^{\frac{1}{2}}+2\left(1-\frac{z^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

În domeniul $|z|<1$ avem $|z^2|<1$ și $\left|\frac{z^2}{4}\right|<1$, și aplicînd formula seriei binomiale avem

$$(1-z^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2\cdot 4}z^4-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}z^6-\cdots-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}z^{2n}-\cdots \qquad (1)$$

$$\left(1-\frac{z^2}{4}\right)^2=1-\frac{1}{2}\frac{z^2}{4}-\frac{1}{2\cdot 4}\frac{z^4}{4^2}-\frac{1\cdot 3\cdot z^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 4^3}-\cdots-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{z^{2n}}{4^n}+\cdots, \qquad (1')$$

de unde

$$f(z)=3-\frac{3}{4}z^2-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\left(1+\frac{1}{2^{2n-1}}\right)z^{2n}.$$

Pentru a dezvolta funcția $f(z)$ în domeniul $1<|z|<2$, o scriem sub forma

$$f(z)=iz\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}+2\left(1-\frac{z^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

În domeniul considerat avem $\left|\frac{z^2}{4}\right|<1$, rezultă că formula (1') este satisfăcută, iar $\left|\frac{1}{z^2}\right|<1$, deci avem

$$\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2\cdot 4}\frac{1}{z^4}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{z^6}-\cdots-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{z^{2n}}\cdots \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, în domeniul $1<|z|<2$ funcția $f(z)$ are dezvoltarea

$$f(z)=-\frac{i}{2z}+2+iz-\frac{z^2}{4}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\left(2z^{2n}+\frac{i}{z^{2n-1}}\right).$$

Scriem acum funcția $f(z)$ sub forma

$$f(z)=iz\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}+iz\left(1-\frac{4}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

În domeniul $|z|>2$ avem $\left|\frac{1}{z^2}\right|<1$, deci formula (2) este satisfăcută și $\left|\frac{4}{z^2}\right|<1$, deci

$$\left(1-\frac{4}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{z^2}-\frac{1}{2\cdot4}\frac{4^2}{z^4}-\cdots-\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\frac{4^n}{z^{2n}}-\cdots$$

Rezultă dezvoltarea funcției

$$f(z)=2iz-\frac{51}{2z}-i\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot\frac{1+4^n}{z^{2n-1}}.$$

9. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui z în jurul originii funcția

$$f(z)=\frac{z}{\sin z^3}.$$

R. Funcția $\sin z^3$ fiind olomorfă pentru orice z finit, avem

$$\sin z^3=z^3-\frac{z^9}{3!}+\frac{z^{15}}{5!}-\cdots$$

Funcția $f(z)$ are originea ca pol dublu, iar punctele $z=\sqrt[3]{k\pi}$, $(k=\pm1,\ \pm2,\ \ldots)$, ca poli simpli.

Ținînd seama de expresia funcției $\sin z^3$, obținem

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{12}}{5!}-\cdots}.$$

Funcția

$$\frac{1}{1-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{12}}{5!}-\cdots}$$

este olomorfă în domeniul $|z|<1$, deci se poate dezvolta în serie Taylor și putem scrie

$$\frac{1}{1-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{12}}{5!}}=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$$

Identificînd coeficienţii, găsim

$$a_0=1,\ a_1=0,\ a_2=0,\ a_3=0,\ a_4=0,\ a_5=0,\ a_6=\frac{1}{3},$$

$$a_7=0,\ a_8=0,\ a_9=0,\ a_{10}=0,\ a_{11}=0,\ a_{12}=-\frac{35}{36},\ \cdots$$

deci

$$f(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}z^4-\frac{35}{36}z^{10}+\cdots$$

10. Să se dezvolte în serie în jurul punctului $z=1$ funcţia

$$f(z)=\sin\frac{z}{z-1}.$$

R. Avem

$$\sin\frac{z}{z-1}=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\sin\frac{1}{z-1}.$$

Ţinînd seama de formulele de dezvoltare în serie a funcţiilor trigonometrice, rezultă

$$\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!\,(z-1)^{2n+1}}+\cdots,$$

$$\cos\frac{1}{z-1}=1-\frac{1}{2!\,(z-1)^2}+\frac{1}{4!\,(z-1)^5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!\,(z-1)^{2n}}+\cdots$$

De aici obţinem

$$\sin\frac{z}{z-1}=\sin 1+\frac{\cos 1}{z-1}-\frac{\sin 1}{2!\,(z-1)^2}-\frac{\cos 1}{3!\,(z-1)^3}+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{\sin 1}{(2n)!\,(z-1)^{2n}}+(-1)^n\frac{\cos 1}{(2n+1)!\,(z-1)^{2n+1}}+\cdots$$

11. Să se dezvolte în serie întreagă funcţia

$$f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}.$$

R. În domeniul $|z|<1$, putem scrie

$$e^{\frac{1}{1-z}}=e^u=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots,$$

unde

$$u=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

Făcînd $z=0$, găsim $c_0=e$. Prin derivare, obținem

$$e^{\frac{1}{1-z}}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}=c_1+2c_2z+3c_3z^2+\cdots,$$

deci $c_1=e$. Scriind din nou, avem

$$e^{\frac{1}{1-z}}\left[\frac{1}{(1-z)^4}+2\frac{1}{(1-z)^3}\right]=2c_2+2\cdot 3c_3z+\cdots,$$

de unde $c_2=\frac{3}{2}e$ etc. Primii termeni ai dezvoltării sînt

$$e^{\frac{1}{1-z}}=e+ez+\frac{3}{2}ez^2+\cdots$$

12. Se consideră funcția

$$f(z)=\frac{1}{1-z^2}\ln\frac{i-z}{i+z},$$

unde pentru logaritm se consideră determinarea care se anulează în origine. Se cere să se dezvolte această funcție în seria de puteri ale lui z în domeniile:

$$1^\circ\ |z|<1;\quad 2^\circ\ |z|>1.$$

R. Funcția $f_1(z)=\ln\frac{i-z}{i+z}$ are două puncte critice $z=\pm i$. Determinarea considerată pentru această funcție este uniformă în domeniile date.

Funcția $f(z)$ are doi poli simpli în punctele $z=\pm 1$.

Pentru $|z|<1$ avem

$$f(z)=\frac{1}{1-z^2}\ln\frac{1-\frac{z}{i}}{1+\frac{z}{i}}$$

și $\left|\frac{z}{i}\right|<1$, $|z^2|<1$, deci,

$$\ln\left(1-\frac{z}{i}\right)=\frac{z}{i}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{z}{i}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{z}{i}\right)^n+\cdots,$$

$$\ln\left(1+\frac{z}{i}\right)=\frac{z}{i}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{i}\right)^2+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{z}{i}\right)^n\cdot\frac{1}{n}+\cdots,$$

$$\frac{1}{1-z^2}=1+z^2+z^4+\cdots+z^{2n}+\cdots$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că în domeniul $|z|<1$ avem

$$f(z)=(1+z^2+z^4+\cdots+z^{2n}+\cdots)\left[-z^2+\frac{z^4}{2}-\frac{z^6}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{n}+\cdots\right].$$

Efectuînd produsul celor două serii, obținem

$$f(z)=-z^2-\left(1-\frac{1}{2}\right)z^4-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)z^6-\cdots-\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]z^{2n}+\cdots$$

Pentru a dezvolta funcția $f(z)$ în domeniul $|z|>1$, vom face substituția $z=\frac{1}{u}$. Domeniul $|z|>1$ se transformă prin această substituție în domeniul $|u|<1$, iar $f(z)$ devine

$$F(u)=\frac{u^2}{u^2-1}\ln\frac{ui-1}{ui+1}.$$

Ținînd seama că pentru logaritm am considerat determinarea care se anulează în origine, rezultă

$$\ln\frac{ui-1}{ui+1}=\pi i-\ln\frac{1-ui}{1+ui},$$

adică

$$\ln\frac{ui-1}{ui+1}=\pi i-u^2+\frac{1}{2}u^4-\frac{1}{3}u^6+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{n}u^{2n}+\cdots$$

De asemenea, în domeniul $|u|<1$ avem

$$\frac{u^2}{u^2-1}=-u^2-u^4-u^6-\cdots-u^{2n}-\cdots$$

Rezultă

$$F(u)=-(u^2+u^4+u^6+\cdots+u^{2n})\left[\pi i-u^2+\frac{1}{2}u^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}u^{2n}+\cdots\right]=$$
$$=-\pi iu^2-(\pi i-1)u^4-\left(\pi i-1+\frac{1}{2}\right)u^6-\left(\pi i-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)u^8-\cdots$$
$$\cdots-\left[\pi i-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n-1}\right]u^{2n}-\cdots$$

Revenind la variabila z, deducem dezvoltarea funcției $f(z)$ în domeniul $|z|>1$:

$$f(z)=-\pi i\frac{1}{z^2}-(\pi i-1)\frac{1}{z^4}-\left(\pi i-1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{z^6}-\left(\pi i-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{z^8}-\cdots$$
$$\cdots-\left[\pi i-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n-1}\right]\frac{1}{z^{2n}}+\cdots$$

13. Să se dezvolte după puterile lui z funcția

$$Z=\sin m\,(\arcsin z),$$

unde se ia acea ramură a funcției $u=\arcsin z$ care se anulează pentru $z=0$, m fiind o constantă oarecare.

R. Funcția Z este olomorfă în interiorul cercului $|z|=1$, deoarece avem

$$\frac{dZ}{dz}=\frac{m\cos mu}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Pentru a determina coeficienții seriei, observăm că Z satisface ecuația diferențială

$$(1-z^2)\frac{d^2Z}{dz^2}-z\frac{dZ}{dz}+m^2Z=0.$$

Derivînd de p ori și făcînd, în rezultat, $z=0$, se obține relația de recurență

$$\left(\frac{d^{p+2}Z}{dz^{p+2}}\right)_{z=0}=(p^2-m^2)\left(\frac{d^pZ}{dz^p}\right)_{z=0},$$

deci

$$Z=\frac{mz}{1\,!}+\frac{m\,(1^2-m^2)}{3\,!}z^3+\frac{m\,(1^2-m^2)\,(3^2-m^2)}{5\,!}z^5+\cdots$$

$$\cdots+\frac{m(1^2-m^2)\cdots[(2n-1)^2-m^2]}{(2n+1)\,!}z^{2n+1}+\cdots$$

14. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui z funcția

$$f(z)=\frac{z\sin\alpha}{1-2z\cos\alpha+z^2}$$

unde α este real și să se calculeze pentru $|z|\neq 1$ integrala

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\alpha\sin n\alpha}{1-2z\cos\alpha+z^2}\,d\alpha.$$

R. Funcția $f(z)$ se mai scrie

$$f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-ze^{i\alpha}}-\frac{1}{1-ze^{-i\alpha}}\right).$$

Dezvoltînd în serie cele două funcţii din paranteză, pentru $|z|<1$, avem

$$\frac{1}{1-ze^{i\alpha}}=1+ze^{i\alpha}+z^2e^{2i\alpha}+\cdots+z^n e^{ni\alpha}+\cdots,$$

$$\frac{1}{1-ze^{-i\alpha}}=1+ze^{-i\alpha}+z^2e^{-2i\alpha}+\cdots+z^n e^{-ni\alpha}+\cdots,$$

de unde

$$f(z)=z\sin\alpha+z^2\sin 2\alpha+\cdots+z^n\sin n\alpha+\cdots$$

Avem

$$zI=i\int_0^{2\pi} f(z)\sin n\alpha\,d\alpha,$$

deci, înmulţind seria de mai sus cu $\sin n\alpha$, integrînd apoi termen cu termen şi ţinînd seama de egalităţile

$$\int_0^{2\pi}\sin n\alpha\sin k\alpha d\alpha=\begin{cases}0, & \text{pentru } n\neq k,\\ \pi, & \text{pentru } n=k,\end{cases}$$

găsim

$$I=\pi z^{n-1}.$$

Pentru $|z|>1$, facem în integrala I schimbarea

$$z=\frac{1}{\zeta}$$

şi avem

$$\zeta^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin\alpha\sin n\alpha}{\zeta^2-2\zeta\cos\alpha+1}d\alpha=\pi(\zeta)^{n+1}=\frac{\pi}{z^{n+1}}.$$

Pentru $|z|=1$, integrala nu are sens, deoarece numitorul lui $f(z)$ se anulează în intervalul de integrare.

15. Să se determine punctele în care funcţia

$$f(z)=z^2-z\bar{z}-\bar{z}^2+\bar{z}-2z$$

este monogenă şi să se calculeze în acele puncte derivata funcţiei.

R. Avem

$$f(z)=-x^2-3y^2-x+iy(4x-3).$$

Înlocuind aceste valori în ecuațiile Cauchy-Riemann, obținem sistemul

$$-2x-1=4x-3, \quad 6y=4y,$$

care are soluția $x=\frac{1}{3}$, $y=0$.

Deci funcția dată este monogenă doar în punctul $z=1/3$.

Avem

$$\Delta f=f(z+\Delta z)-f(z)=2z\Delta z+(\Delta z)^2-z\overline{\Delta z}-\bar{z}\Delta z-\Delta z\overline{\Delta z}-2\bar{z}\overline{\Delta z}-(\overline{\Delta z})^2-2\Delta z+\overline{\Delta z}.$$

În punctul $z=\frac{1}{3}$ avem $\bar{z}=\frac{1}{3}$ și deci această expresie are valoarea

$$\Delta f=-\frac{5}{3}\Delta z-\overline{\Delta z}-\Delta z\overline{\Delta z}+(\Delta z)^2-(\overline{\Delta z})^2,$$

deci

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=-\frac{5}{3}-\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\Delta z-\frac{(\overline{\Delta z})^2}{\Delta z}.$$

Dacă $\Delta z\to 0$, avem $\overline{\Delta z}\to 0$ și

$$\left|\frac{(\overline{\Delta z})^2}{\Delta z}\right|=\frac{|\overline{\Delta z}|^2}{|\Delta z|}=\frac{|\Delta z|^2}{|\Delta z|}=|\Delta z|$$

și trecînd la limită avem

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=-\frac{5}{3},$$

adică

$$|f'(z)|_{z=\frac{1}{3}}=-\frac{5}{3}.$$

16. Fie $f(z)=Z$ o funcție de variabilă complexă z.

Se dă un punct z și notăm prin Z' derivata lui Z după direcția de coeficient unghiular λ.

Să se calculeze Z' și să se arate că, în general, dacă λ variază, imaginea numărului complex Z' descrie un cerc.

Caz particular $Z=\bar{z}$.

R. Fie $Z=P(x, y)+iQ(x, y)$ o funcție de variabilă complexă $z=x+iy$. Presupunem că P și Q admit derivate de ordinul întîi continue.

Ne plasăm într-un punct de referință, care poate fi ales ca origine. Dacă derivata lui Z există, ea este limita lui $\frac{\Delta Z}{\Delta z}$ cînd $|\Delta z|$ tinde la zero. Dacă derivata nu

există, există în general o derivată după fiecare direcție, (dacă Δz tinde la 0 după o direcție de parametru director λ dat). Această derivată este egală cu

$$Z' = \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{hP'_x + kP'_y + i(hQ'_x + kQ'_y)}{h+ik},$$

h și k tinzînd la zero astfel încît $\frac{k}{h}$ să tindă la λ. Deci

$$Z' = \frac{P'_x + iQ'_x + \lambda\,(P'_y + iQ'_y)}{1+i\lambda}.$$

În general Z' depinde de λ. Pe de altă parte Z' este o funcție omografică de λ. Dacă numărul real λ variază, numărul complex Z' descrie deci un cerc γ, imaginea prin transformarea omografică a axei reale. γ trece prin punctele

$$A = P'_x + iQ_x, \qquad \text{imaginea lui } \lambda = 0,$$

$$B = \frac{P'_y + iQ'_y}{i}, \quad \text{imaginea lui } \lambda = \infty.$$

Putem scrie

$$Z' = (A-B)\,t + B$$

cu $t = \frac{1}{1+i\lambda}$. Cînd λ descrie axa reală, t descrie un cerc γ' de diametru (0,1), (fig. II. 16).

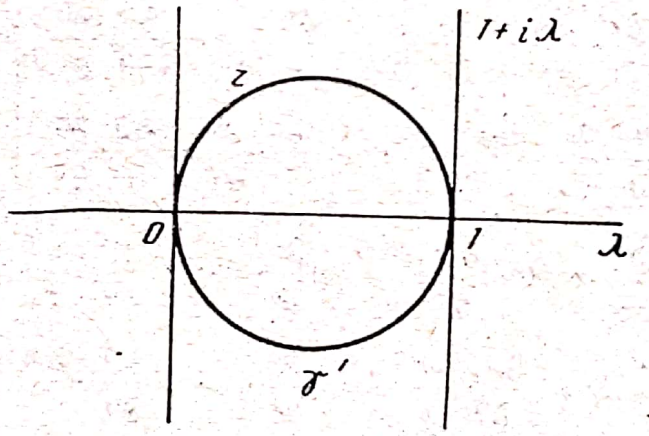


Fig. II.16

Punctul $(A-B)\,t$ descrie un cerc γ'' de diametru $|A-B|$, dedus din γ' printr-o similitudine de centru O. Cercul γ se deduce din γ'' prin translația B.

Pentru ca Z să admită derivată, este necesar ca Z' să ia aceeași valoare în toate direcțiile, adică să nu depindă de λ. Cercul γ se reduce la un punct, diametrul său fiind nul:

$|A-B|=0$. Altfel spus, cele două numere complexe A și B sînt egale. Egalînd părțile reale și imaginare, obținem condițiile Cauchy-Riemann.

Funcția $Z=\bar{z}$ nu este olomorfă. În origine avem

$$Z'=\frac{1-i\lambda}{1+i\lambda}$$

și deci $|Z'|=1$, de unde rezultă că Z' descrie cercul unitate.

17. Să se stabilească ecuațiile Cauchy-Riemann în coordonate polare. Să se determine apoi funcția olomorfă $f(z)$ a cărei parte reală depinde numai de $r=|z|$.

R. Să considerăm funcția olomorfă

$$f(z)=P(x, y)+iQ(x, y).$$

Ecuațiile Cauchy-Riemann se scriu

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Fie

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\theta \\ y&=r\sin\theta \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} dx&=\cos\theta\, dr-r\sin\theta\, d\theta \\ dy&=\sin\theta\, dr-r\cos\theta\, d\theta \end{aligned}\right\},$$

de unde

$$\begin{aligned} dr&=\cos\theta\, dx+\sin\theta\, dy, \\ r d\theta&=-\sin\theta\, dx+\cos\theta\, dy. \end{aligned}$$

În coordonate polare pentru ecuațiile Cauchy-Riemann avem

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}&=\frac{\partial Q}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}&=-\frac{\partial Q}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \end{aligned}\right\}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial P}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}&=\frac{\partial Q}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial Q}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} \\ \frac{\partial P}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial P}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}&=-\frac{\partial Q}{\partial r}\cos\theta+\frac{\partial Q}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \end{aligned}\right\}$$

care sînt echivalente, prin combinații liniare evidente, cu

$$\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta}, \quad -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}=\frac{\partial Q}{\partial r}.$$

Pentru a determina funcția olomorfă $f(z)$ a cărei parte reală P nu depinde decît de r, ecuația a doua Cauchy-Riemann exprimă că Q depinde numai de θ. Atunci

$$r\frac{\partial P}{\partial r} \text{ și } \frac{\partial Q}{\partial \theta}$$

sînt egale cu aceeași constantă k. Deci

$$P=k \ln r+a,$$

$$Q=k\theta+b$$

unde a, b, k sînt constante reale. De aici

$$Z=P+iQ=k\,(\ln r+i\theta)+a+bi=k \ln z+z_0,$$

unde k este un număr real iar z_0 un număr complex arbitrar.

18. Să se determine funcția analitică a cărei parte reală este

$$P(x, y)=\frac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2y-\cos 2x}.$$

R. Avem

$$f(z)=P(x, y)+iQ(x, y) \text{ și } \overline{f(z)}=P(x, y)-iQ(x, y).$$

Rezultă

$$2P(x, y)=f(z)+\overline{f(z)}. \tag{1}$$

Prin ipoteză $P(x, y)$ este armonică, adică

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=0,$$

sau dacă întrebuințăm variabile z și $\bar{z}$, $\dfrac{\partial^2 P}{\partial z \partial \bar{z}}=0$.

Deci membrul al doilea al egalității (1) se descompune într-o sumă de două funcții, una de z și alta de $\bar{z}$.

Pentru a găsi funcția de z, înlocuim în $P(x, y)$ pe x și y în funcția de z și $\bar{z}$ și obținem

$$2P\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)=f(z)+\overline{f(z)}. \tag{2}$$

Pentru a determina pe $f(z)$, vom pune membrul întîi al egalității (2) sub forma unei sume de două funcții, una în z și alta în $\bar{z}$. Funcția în z este cea căutată.

În cazul problemei, membrul întîi al egalității (2) devine

$$2P\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)=2\frac{\sin (z+\bar{z})}{\frac{1}{2}\left(e^{-i(z-\bar{z})}+e^{i(z-\bar{z})}\right)-\cos (z+\bar{z})}=$$

$$=2\frac{\sin (z+\bar{z})}{\cos (z-\bar{z})-\cos (z+\bar{z})}=\frac{\sin (z+\bar{z})}{\sin z \sin \bar{z}}=\operatorname{cotg} z+\operatorname{cotg} \bar{z}.$$

Deci $f(z)=\operatorname{cotg} z+Ai$, unde A este un număr real oarecare, căci punînd în (2) pe $f(z)+Ai$ în loc de $f(z)$, egalitatea nu se schimbă.

19. Să se determine funcția analitică a cărei parte reală este

$$P(x, y)=\frac{x}{2}\ln(x^2+y^2)-y\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

și care în punctul $z=1$ ia valoarea zero.

R. Avem

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+1,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Din ecuațiile lui Cauchy-Riemann, rezultă

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+1,$$

deci

$$dQ=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx+\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+1\right]dy.$$

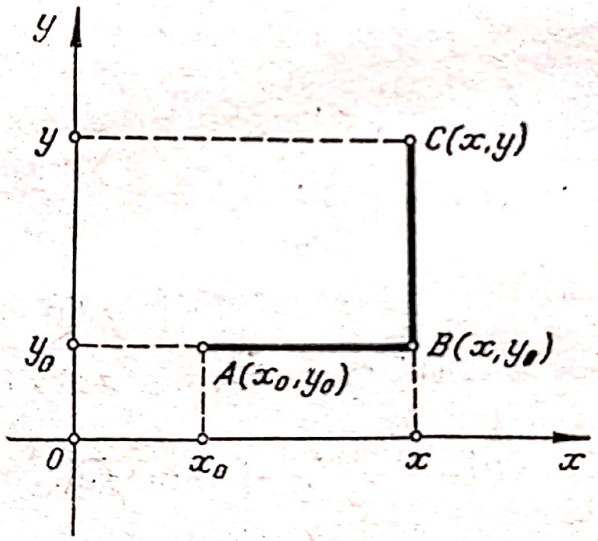


Fig. II.19

Integrînd pe drumul din fig. II.19, avem

$$Q=\int_{x_0}^{x}\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x}\,dx+\frac{1}{2}\int_{y_0}^{y}[\ln(x^2+y^2)+1]\,dy=$$

$$=x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\frac{1}{2}y\ln(x^2+y^2)-\frac{1}{2}y+C,\quad (C=\text{const}).$$

Funcția analitică $f(z)$ este

$$f(z)=\frac{x}{2}\ln(x^2+y^2)-y\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+i\left[x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\frac{y}{2}\ln(x^2+y^2)-\frac{y}{2}+C\right].$$

Făcînd aici $y=0$, obținem $z=x$, deci

$$f(x)=x\ln x+iC,$$

de unde rezultă

$$f(z)=z\ln z+iC.$$

Pentru $z=1$ avem $0=iC$, de unde $C=0$. Funcția căutată este

$$f(z)=z\ln z.$$

O altă metodă este următoarea:

Luînd $z=re^{i\theta}$, avem

$$P=x\ln r-y\theta.$$

Dacă

$$\zeta=\ln z=\ln r+i\theta,$$

observăm că

$$\zeta z=x\ln r-y\theta+i(x\theta+y\ln r).$$

Obținem

$$f(z)=z\ln z+iC,$$

C fiind o cónstantă reală, iar din condiția dată rezultă că $C=0$, deci

$$f(z)=z\ln z.$$

20. Să se determine funcția analitică a cărei parte reală este

$$P(x,y)=\varphi(x^2+y^2).$$

R. Funcția $P(x,y)$ este armonică, deci $\dfrac{\partial^2P}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2P}{\partial y^2}=0.$ (1)

Notăm $u=x^2+y^2$; avem

$$\frac{\partial P}{\partial x}=2x\varphi'(u),\quad \frac{\partial P}{\partial y}=2y\varphi'(u),$$

$$\frac{\partial^2P}{\partial x^2}=4x^2\varphi''(u)+2\varphi'(u),\quad \frac{\partial^2P}{\partial y^2}=4y^2\varphi''(u)+2\varphi'(u).$$

Condiția (1) se scrie

$$4(x^2+y^2)\varphi''(u)+4\varphi'(u)=0$$

sau

$$u\varphi''(u)+\varphi'(u)=0,$$

de unde obținem

$$\varphi'(u)=\frac{\alpha}{u} \text{ și } \varphi(u)=\alpha \ln u+\beta$$

cu $u=x^2+y^2$.

Deci $P(x, y)=\alpha \ln (x^2+y^2)+\beta$.

Din ecuațiile Cauchy-Riemann obținem

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2\alpha y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{2\alpha x}{x^2+y^2}$$

și

$$dQ=2\alpha \frac{x dy-y dx}{x^2+y^2},$$

de unde rezultă

$$Q=2\alpha \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\gamma.$$

Funcția $f(z)$ este

$$f(z)=\alpha \ln (x^2+y^2)+\beta+i\left(2\alpha \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\gamma\right)$$

sau făcînd $y=0$, $z=x$,

$$f(z)=2\alpha \ln z+\beta+i\gamma$$

cu α, β, γ constante reale.

21. Să se determine funcția analitică $f(z)=P+iQ$, a cărei parte reală este funcție de $x\cos\varphi+y\sin\varphi$, unde φ este un unghi dat.

R. Avem

$$P(x, y)=F(x\cos\varphi+y\sin\varphi),$$

de unde

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=F''(x\cos\varphi+y\sin\varphi)\cos^2\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=F''(x\cos\varphi+y\sin\varphi)\sin^2\varphi.$$

Condiția $\Delta P=0$ devine $F''=0$, deci $F(u)=au+b$, unde a și b sînt constante reale. Deci

$$P(x, y)=a(x\cos\varphi+y\sin\varphi)+b$$

și din ecuațiile Cauchy-Riemann

$$Q(x, y)=a(-x\sin\varphi+y\cos\varphi)+C.$$

Funcția olomorfă, a cărei parte reală este P, este

$$f(z)=ce^{-i\varphi}z+b+ic,$$

unde a, b, c sînt constante reale.

22. Să se determine condiția ca funcția $P(x, y)=a(x)b(y)$ să fie o funcție armonică. În acest caz să se găsească funcția monogenă a cărei parte reală este $P(x, y)$.

R. Punînd condiția ca $P(x, y)$ să fie armonică

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=0,$$

găsim

$$a''(x)b(y)+a(x)b''(y)=0$$

cu

$$\frac{a''(x)}{a(x)}=-\frac{b''(y)}{b(y)}=k.$$

Avem

$$a''(x)-ka(x)=0;\ b''(y)+kb(y)=0.$$

Pentru $k=0$, $a(x)=a_1x+a_2$; $b(y)=b_2y+b_2$;

pentru $k=h^2$, $a(x)=a_1e^{hx}+a_2e^{-hx}$, $b(y)=b_1 \sin hy+b_2 \cos hy$;

pentru $k=-h^2$, $a(x)=a_1 \sin hx+a_2 \cos hx$, $b(y)=b_1e^{hy}+b_2e^{-hy}$.

1) Dacă $P(x, y)=(a_1x+a_2)\cdot(b_1y+b_2)$, din ecuațiile Cauchy-Riemann obținem

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-b_1(a_1x+a_2),\qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=a_1(b_1y+b_2).$$

Integrînd prima relație, avem

$$Q=-\frac{a_1b_1}{2}x^2-a_2b_1x+\lambda(y),$$

iar din relația a doua găsim

$$\lambda'(y)=a_1b_1y+a_1b_2,$$

deci

$$\lambda(y)=\frac{a_1b_1}{2}y^2+a_1b_2y+c,\qquad (c=\text{const}),$$

de unde

$$Q(x, y)=-\frac{a_1b_1}{2}(x^2-y^2)-a_2b_1x+a_1b_2y+c.$$

Funcția $f(z)$ va fi

$$f(z)=(a_1x+a_2)(b_1y+b_2)+i\left[-\frac{a_1b_1}{2}(x^2-y^2)-a_2b_1x+a_1b_2y+c\right].$$

Făcînd $y=0$, obținem $z=x$, deci

$$f(x)=b_2(a_1x+a_2)-i\left(\frac{a_1b_1}{2}x^2-a_2b_1x+c\right),$$

deci

$$f(z)=b_2(a_1z+a_2)-i\left(\frac{a_1b_1}{2}\,z^2-a_2b_1z+c\right).$$

2) Pentru $P(x, y)=(a_1e^{hx}+a_2e^{-hx})\ (b_1\sin hy+b_2\cos hy)$, ecuațiile Cauchy-Riemann ne dau

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=(a_1e^{hx}+a_2e^{-hx})\ (-b_1h\cos hy+b_2h\sin hy),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=h(a_1e^{hx}-a_2e^{-hx})\ (b_2\sin hy+b_2\cos hy).$$

Integrînd în raport cu x, obținem

$$Q=\int\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx=(a_1e^{hx}-a_2e^{-hx})\ (-b_1\cos hy+b_2\sin hy)+\varphi(y).$$

Calculînd $\frac{\partial Q}{\partial y}$, se găsește $\varphi'(y)=0$, adică $\varphi(y)$ este o constantă. Deci

$$Q(x, y)=(a_1e^{hx}-a_2e^{-hx})\ (-b_1\cos hy+b_2\sin hy)+c.$$

Avem

$$f(x, y)=(a_1e^{hx}+a_2e^{-hx})\ (b_1\sin hy+b_2\cos hy)+$$
$$+i[(a_1e^{hx}-a_2e^{-hx})\cdot(b_2\sin hy-b_1\cos hy)+c].$$

Făcînd $y=0$, avem $z=x$, deci

$$f(z)=a_1(b_2-ib_1)e^{hz}+a_2(b_2+ib_1)e^{-hz}+ic.$$

3) Dacă $P(x, y)=(a_1\sin hx+a_2\cos hx)\ (b_1e^{hy}+b_2e^{-hy})$, avem

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-(a_1\sin hx+a_2\cos hx)\ (b_1he^{hx}-b_2he^{-hy}),$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y}=(a_1h\cos hx-a_2h\sin hx)\ (b_1e^{hy}+b_2e^{-hy}).$$

Integrînd în raport cu x, obținem

$$Q=\int\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx=(a_1\cos hx-a_2\sin hx)\ (b_1e^{hy}-b_2e^{-hy})+\psi(y).$$

Calculînd $\frac{\partial Q}{\partial y}$, găsim $\psi'(y)=0$, deci $\psi(y)=c$, (c=const).

Avem

$$Q(x, y)=(a_1\cos hx-a_2\sin hx)\ (b_1e^{hy}-b_2e^{-hy})+c,$$

de unde

$$f(x,\ y)=(a_1 \sin hx + a_2 \cos hx)\ (b_1 e^{hy} + b_2 e^{-hy}) +$$
$$+i[(a_1 \cos hx - a_2 \sin hx)\ (b_1 e^{hy} - b_2 e^{-hy}) + c].$$

Pentru $y=0$, $z=x$ avem deci

$$f(z)=[a_1(b_1+b_2)+ia_2(b_2-b_1)] \sin hz+[a_2(b_1+b_2)+ia_1(b_1-b_2)] \cos hz+ic.$$

23. Să se studieze funcţiile multiforme

$$1^\circ\ Z=\sqrt{z^4+1}\ ,\quad 2^\circ\ Z=\sqrt[4]{z^4+1}\ .$$

R. 1° Dacă notăm

$$z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=\rho_1 e^{i\theta_1}\ ,\quad z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)=\rho_2 e^{i\theta_2}\ ,$$

$$z-\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)=\rho_3 e^{i\theta_3},\quad z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=\rho_4 e^{i\theta_4},$$

funcţia Z se scrie

$$Z=(\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4)^{\frac{1}{2}}\, e^{k\pi i+\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)} \qquad (k=0,\ 1).$$

Avînd în vedere reprezentarea geometrică a adunării şi scăderii numerelor complexe, rezultă că ρ_1 este segmentul care uneşte punctul $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ cu z, iar θ_1 unghiul dintre axa reală şi acest segment, în sens direct; analog pentru ρ_2, ρ_3, ρ_4, θ_2, θ_3 şi θ_4.

Cele două ramuri ale funcţiei Z sînt

$$Z_1=(\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4)^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)},$$

$$Z_2=(\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4)^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{i}{2}(2\pi+\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)}.$$

Dacă punctul z descrie arcul de curbă zMz_1 care uneşte z cu z_1 (fig. II.23, *a*) funcţia Z ia valoarea

$$Z'=\rho^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{i}{2}(\theta+2k\pi)}\ ,\quad (\rho=\rho_1'\rho_2'\rho_3'\rho_4',\ \theta=\theta_1'+\theta_2'+\theta_3'+\theta_4').$$

Dacă z descrie arcul de curbă zNz_1 care uneşte z cu z_1 înconjurînd unul dintre cele patru puncte $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, de exemplu pe $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ (fig. II.23, *b*), funcţia Z ia valoarea

$$Z''=\rho^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{i}{2}(\theta+2\pi+2k\pi)} = -Z'.$$

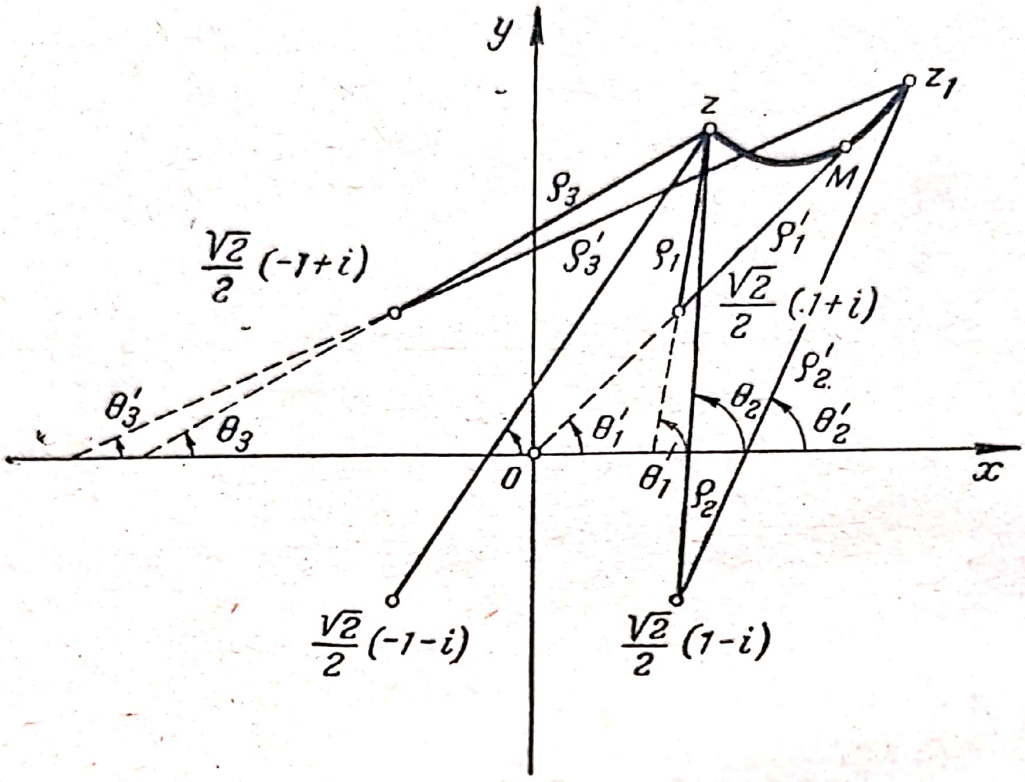


Fig. II.23, *a*

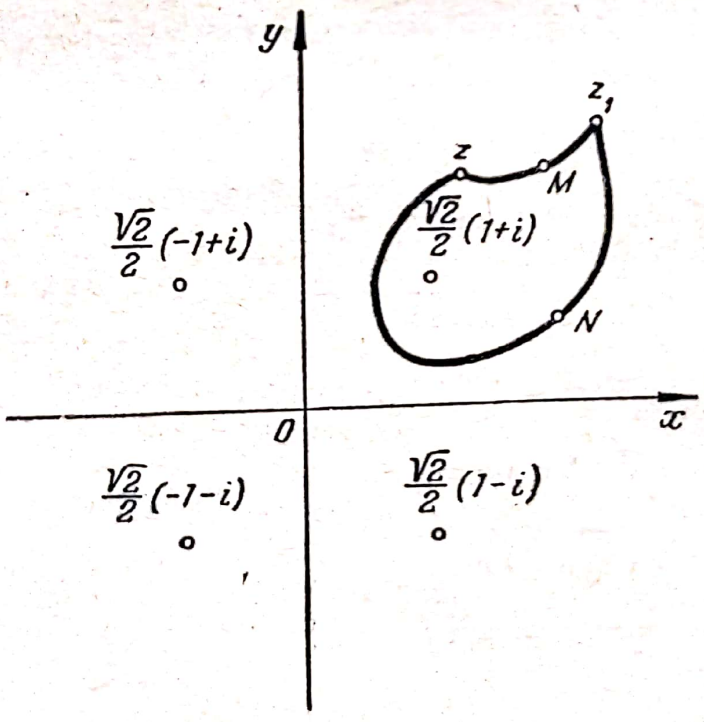


Fig. II.23, *b*

Dacă punctul z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1 înconjurînd trei intre punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcția Z ia valoarea

$$Z'''=\rho^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i}{2}(\theta+6\pi+2k\pi)}=-Z'.$$

Dacă z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1 înconjurînd două sau toate punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcția Z ia valoarea Z'.

Deci, dacă punctul z descrie o curbă care înconjură un număr impar dintre punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcția Z trece de la o determinare la alta, iar dacă curba înconjoară un număr par de puncte, valoarea funcției Z nu se schimbă.

Punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ sînt puncte critice ale funcției Z.

Dacă facem o tăietură care să unească două puncte critice și o altă tăietură care să le unească pe celelalte două, ramurile funcției devin funcții uniforme (fig. II.23, *c*).

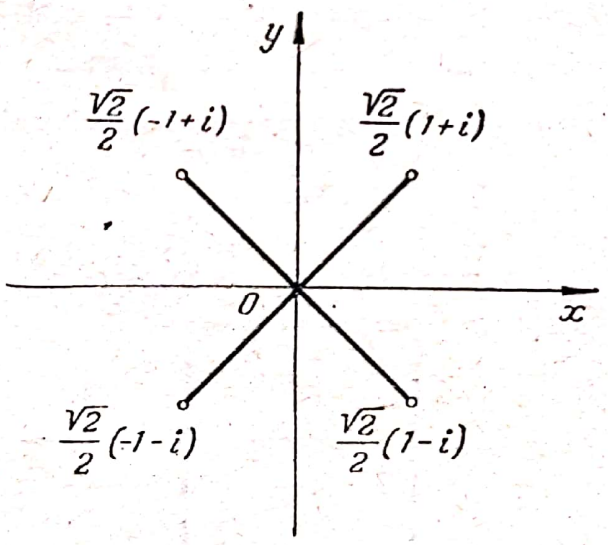


Fig. II.23, *c*

2° Cu relațiile de la punctul 1° avem

$$Z=(\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4)^{\frac{1}{4}}e^{\frac{i}{4}(2k\pi+\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Dacă z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1, fără a înconjura nici unul dintre punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcția Z ia valoarea

$$Z'=\rho^{\frac{1}{4}}e^{\frac{i}{4}(2k\pi+\theta)}.$$

Dacă z descrie un arc de curbă care unește z cu z_1 înconjurînd unul dintre punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcția Z ia valoarea

$$Z''=\rho^{\frac{1}{4}}e^{\frac{i}{4}(2k\pi+2\pi+\theta)}=e^{\frac{\pi}{2}i}Z'.$$

Dacă arcul de curbă descris de z, care unește z cu z_1, înconjură două sau trei dintre punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcția Z ia valoarea

$$Z'''=\rho^{\frac{1}{4}}e^{\frac{i}{4}(2k\pi+4\pi+\theta)}=e^{\pi i}Z',$$

respectiv

$$Z^{IV}=e^{\frac{3\pi}{2}i}Z'.$$

Dacă z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1 înconjurînd toate punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcția Z ia valoarea Z'.

Deci, dacă z descrie o curbă care înconjură unul, două sau trei dintre punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcția Z trece de la o determinare la alta, iar dacă curba înconjură toate punctele, funcția Z nu-și schimbă valoarea.

Punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ sînt puncte critice ale funcției.

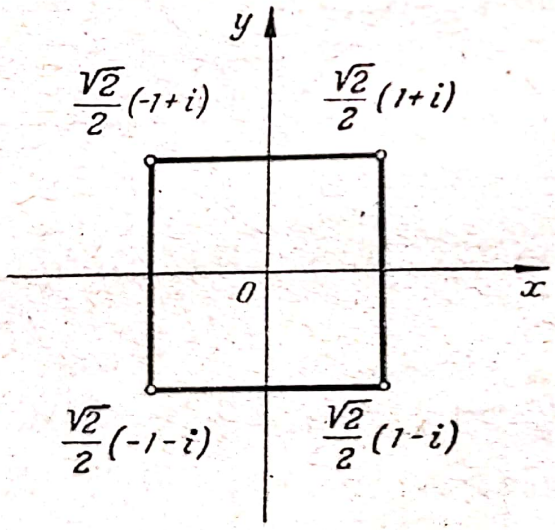


Fig. II.23, *d*

Dacă facem o tăietură care unește punctele $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ cu $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ și $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ cu $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ sau o tăietură de-a lungul pătratului cu vîrfuri în cele patru puncte, ramurile funcției Z devin uniforme (fig. II.23, *d*).

Ramurile funcției Z mai sînt uniforme și în orice domeniu simplu conex care nu conține nici unul dintre punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, (fig. II.23, *e*).

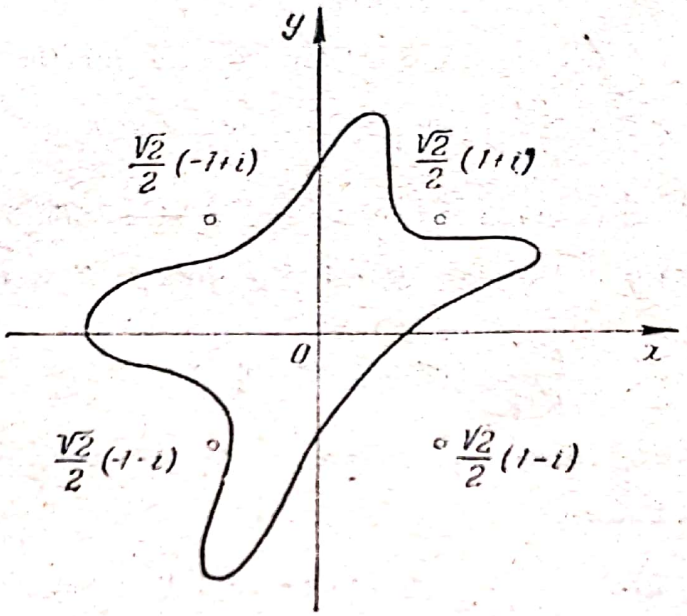


Fig. II.23, *e*

24. Să se studieze funcția multiformă

$$Z=\ln\frac{z^2-i}{z^2+i}.$$

R. Dacă notăm

$$z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=\rho_1 e^{i\theta_1},\quad z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=\rho_2 e^{i\theta_2},$$

$$z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)=\rho_3 e^{i\theta_3},\quad z-\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)=\rho_4 e^{i\theta_4},$$

funcția Z se scrie

$$Z=\ln\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3\rho_4}+i(\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4+2k\pi).$$

Semnificațiile geometrice ale numerelor ρ_h, θ_h $(h=1, 2, 3, 4)$ sînt cele din problema 23.

Dacă punctul z descrie arcul de curbă zMz_1 (fig. II.23, *a*), funcția Z ia valoarea

$$Z_1=\ln\frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'}+i(\theta_1'+\theta_2'-\theta_3'-\theta_4'+2k\pi).$$

Dacă punctul z descrie un arc de curbă care unește z cu z_1 înconjurînd unul dintre punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ fără a înconjura celelalte puncte, funcția Z ia valoarea

$$Z_2=\ln\frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'}+i(\theta_1'+\theta_2'+2\pi-\theta_3'-\theta_4'+2k\pi).$$

Dacă z descrie un arc de curbă care unește z cu z_1 și înconjură unul dintre punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ fără a le înconjura pe celelalte, funcția Z ia valoarea

$$Z_3=\ln\frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'}+i(\theta_1'+\theta_2'-\theta_3'-\theta_4'-2\pi+2k\pi).$$

Dacă arcul de curbă descris de z, care unește pe z cu z_1, înconjură punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, funcția Z devine

$$Z_4=\ln\frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'}+i(\theta_1'+\theta_2'+4\pi-\theta_3'-\theta_4'+2k\pi).$$

În cazul în care arcul descris de z înconjură punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcția Z devine

$$Z_5=\ln\frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'}+i(\theta_1'+\theta_2'-\theta_3'-\theta_4'-4\pi+2k\pi).$$

Dacă arcul de curbă descris de z care unește z cu z_1 înconjură punctele $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ sau $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ sau $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ sau $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, funcția Z devine

$$Z_6=\ln\frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'}+i(\theta_1'+\theta_2'+2\pi-\theta_3'-\theta_4'-2\pi+2k\pi)=Z_1.$$

Dacă arcul de curbă înconjură trei dintre punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcția Z descrie

$$Z_7=\ln\frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'}+i(\theta_1'+\theta_2'-\theta_3'-\theta_4'+2\pi+2k\pi)$$

sau

$$Z_8=\ln\frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'}+i(\theta_1'+\theta_2'-\theta_3'-\theta_4'-2\pi+2k\pi).$$

În cazul în care arcul de curbă descris de z, care unește z cu z_1, înconjură toate punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcția Z se scrie

$$Z_2=\ln\frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'}+i(\theta_1'+\theta_2'+4\pi-\theta_3'-\theta_4'-4\pi+2k\pi).$$

Avem

$$Z_2=Z_7=Z_1+2\pi i,\quad Z_3=Z_8=Z_1-2\pi i,\quad Z_4=Z_1+4\pi i,\quad Z_5=Z_1-4\pi i,\quad Z_6=Z_9=Z_1.$$

Deci punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ sînt puncte critice ale funcției Z.

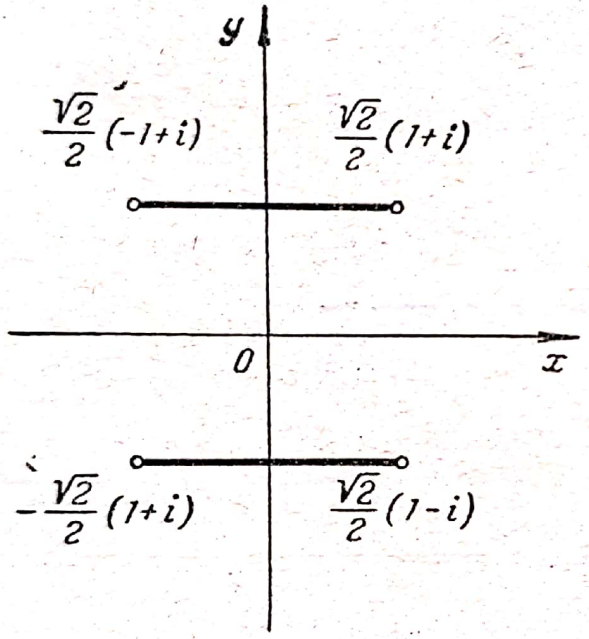


Fig. II.24, *a*

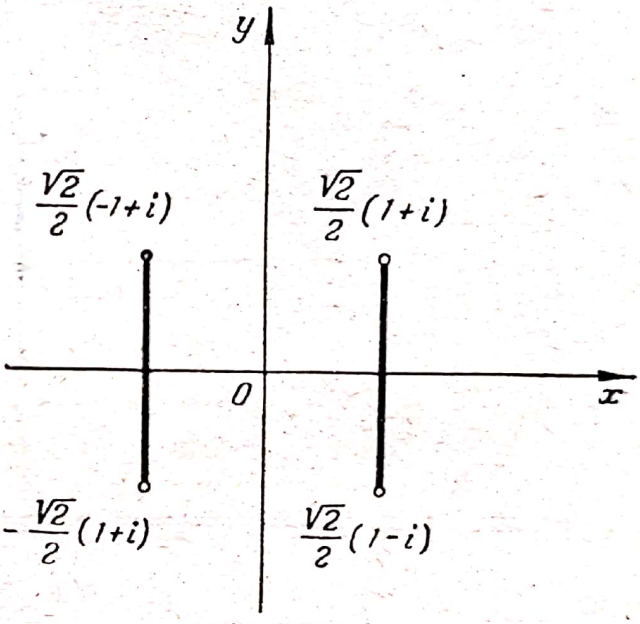


Fig. II.24, *b*

Făcînd una din tăieturile din figurile II.23, *c*, *d*, II.24, *a*, *b*, ramurile funcției Z devin uniforme. De asemenea aceste ramuri sînt uniforme în orice domeniu simplu conex care nu conține nici unul din punctele critice ale funcției Z (fig. II. 23, *e*).

25. Să se studieze funcția multiformă

$$Z=\operatorname{arctg} z.$$

R. Avem

$$\operatorname{arctg} z=\frac{1}{2i}\ln\frac{i-z}{i+z},\quad (z\neq\pm i).$$

Deci, notînd

$$\frac{i-z}{i+z}=\rho e^{i\theta},\quad z_1=\frac{1}{2i}\ln\rho+\frac{\theta}{2},$$

funcția dată se scrie

$$Z=z_1+k.$$

Această funcție este multiformă, avînd o infinitate de ramuri, punctele ei critice fiind $z=\pm i$.

Dacă z descrie o curbă închisă care înconjură în sens direct o singură dată numai unul din cele două puncte critice, funcția Z ia valoarea

$$Z_1=Z+\pi.$$

Dacă z descrie o curbă închisă care înconjură ambele puncte critice, funcția Z reia aceeași valoare.

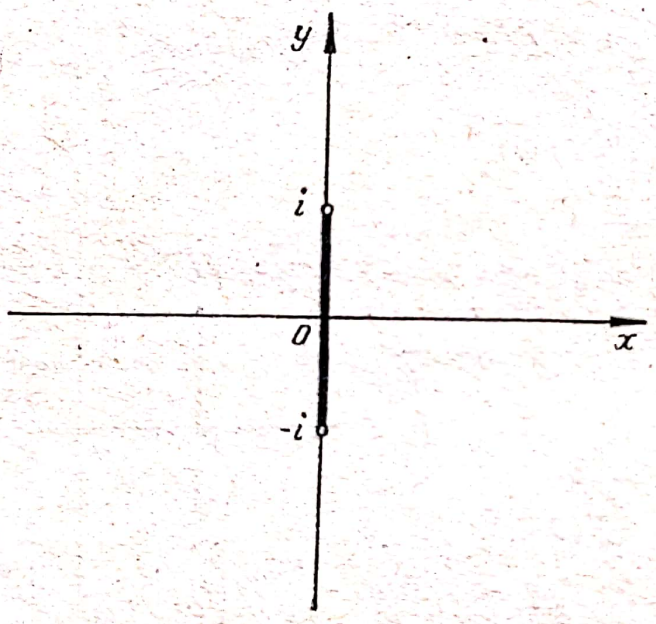


Fig. II.25

Ramurile funcției sînt uniforme în planul complex în care se face o tăietură de-a lungul segmentului de pe axa imaginară care unește punctele $\pm i$, (fig. II.25).

De asemenea, ramurile funcției sînt uniforme în orice domeniu simplu conex care nu conține nici unul din punctele $\pm i$.

26. Să se calculeze integralele

$$I_1=\int_C z^n dz,\quad I_2=\int_C z^{\frac{1}{2}}dz$$

de-a lungul unui cerc cu centrul în origine și de rază r, n fiind număr întreg.

R. Pe conturul C avem $z=re^{i\theta}$, $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$.

Vom lua ca punct de plecare un punct oarecare M pe cerc de argument α, deci punctul de sosire $N=M$ va avea argumentul $2\pi+\alpha$. Avem

$$I_1=\int_M^N z^n dz=i\int_\alpha^{\alpha+2\pi} r^{n+1}\, e^{i(n+1)\theta}\, d\theta=ir^{n+1}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} e^{i(n+1)\theta}\, d\theta=$$

$$=\frac{r^{n+1}}{n+1}\left[e^{i(n+1)(\alpha+2\pi)}-e^{i(n+1)\alpha}\right].$$

Dacă n este întreg şi diferit de -1,

$$I_1=0.$$

Pentru $n=-1$

$$I_1=\int_M^N \frac{dz}{z}=i\int_\alpha^{\alpha+2\pi} d\theta=2\pi i.$$

Pentru I_2 avem

$$I_2=\int_M^N z^{\frac{1}{2}}\, dz=i\int_\alpha^{\alpha+2\pi} r^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}i\theta}\, d\theta=\frac{4}{3}r^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}i\alpha}.$$

Din rezultatele obţinute este de remarcat faptul că funcţia z^n (n întreg) este o funcţie uniformă în domeniul dat, deci valorile integralei I_1 nu depind de punctul de plecare, deci de α. Funcţia $z^{\frac{1}{2}}$ are pe $z=0$ punct critic situat în interiorul conturului C. Această funcţie nu este uniformă, deci rezultatul depinde de determinarea cu care am plecat.

27. Să se calculeze integrala

$$I=\int_C \frac{dz}{(z-\alpha)^m(z-\beta)^n},$$

m şi n fiind numere naturale, α şi β numere complexe al căror modul este diferit de 1, iar C este $|z|=1$, (fig. II.27).

R. Funcţia

$$f(z)=\frac{1}{(z-\alpha)^m(z-\beta)^n}$$

este uniformă avînd punctul $z=\alpha$ ca pol de ordinul m iar punctul $z=\beta$ ca pol de ordinul n.

Fie γ_1 și γ_2 cercurile cu centrul în punctele $z_1=\alpha$, $z_2=\beta$ și cu raze foarte mici. Avem

$$\int_C f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Aplicînd formula care ne dă derivata unei funcții analitice exprimată prin integrale curbilinii, avem

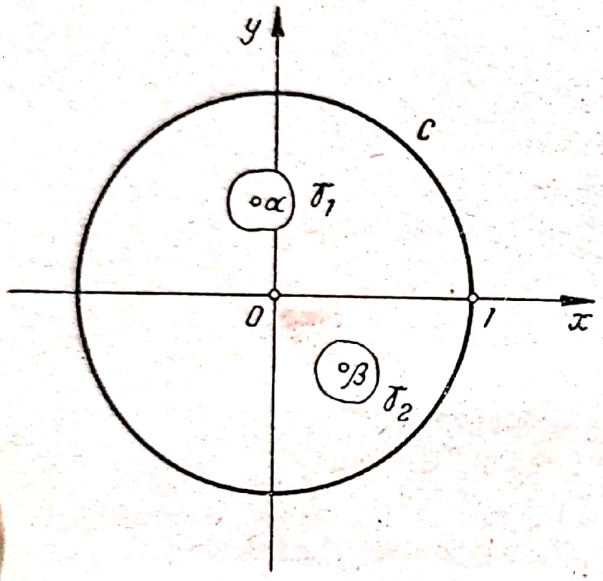


Fig. II.27

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{(z-\beta)^n}}{(z-\alpha)^m}\,dz =$$

$$= \frac{2\pi i}{(m-1)!}\left[(z-\beta)^{-n}\right]^{(m-1)}_{z=\alpha} =$$

$$= \frac{2\pi i}{(\alpha-\beta)^{m+n-1}}(-1)^{m-1}\,C^{m-1}_{m+n-2};$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} \frac{\frac{1}{(z-\alpha)^m}}{(z-\beta)^n}\,dz =$$

$$= \frac{2\pi i}{(n-1)!}\left[(z-\alpha)^{-m}\right]^{(n-1)}_{z=\beta} =$$

$$= \frac{2\pi i}{(\beta-\alpha)^{m+n-1}}(-1)^{n-1}\,C^{n-1}_{m+n-2}.$$

De aici

$$I = 2\pi i\left[\frac{(-1)^{m-1}}{(\alpha-\beta)^{m+n-1}}\,C^{m-1}_{m+n-2} + \frac{(-1)^{n-1}}{(\beta-\alpha)^{m+n-1}}\,C^{n-1}_{m+n-2}\right].$$

Dacă $|\alpha|>1$, $|\beta|>1$, punctele $z_1=\alpha$, $z_2=\beta$ nu sînt în interiorul conturului C, deci

$$I=0.$$

Dacă $|\alpha|<1$, $|\beta|>1$ sau $|\alpha|>1$ și $|\beta|<1$, integrala se va reduce la integrala pe γ_1, respectiv γ_2.

28. Să se calculeze

$$\int_{-i}^{i} |z|\,dz$$

1° pe un arc de cerc cu extremităţile în punctele i şi $-i$;
2° de-a lungul axei imaginare.

R. Fie arcul de cerc din fig. II.28. Pe acest arc avem $z=e^{i\theta}$, $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, $dz=ie^{i\theta}d\theta$, deci

$$\int_{-i}^{i}|z|\,dz=i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{i\theta}d\theta=2i.$$

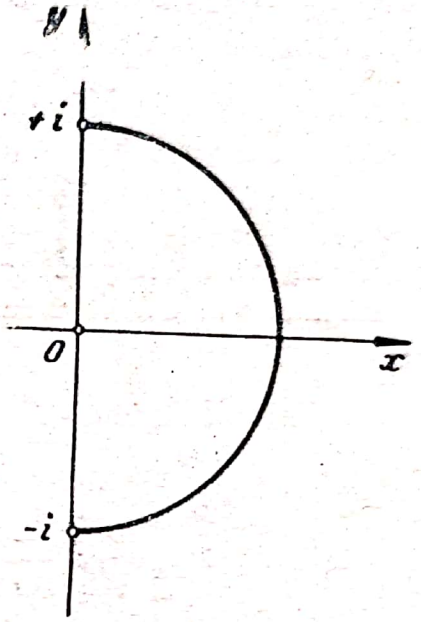


Fig. II.28

2° Pe axa imaginară avem $z=iy$, $dz=idy$, deci

$$\int_{-i}^{i}|z|\,dz=-i\int_{-i}^{0}y\,dy+i\int_{0}^{i}y\,dy=-i.$$

Funcţia $|z|$ nu este uniformă, deci integrala depinde de drum.

29. Să se calculeze integrala

$$I=\int_{C}\frac{e^{iz}}{z^2(1+z)}\,dz,$$

unde curba C are ecuaţia $4x^2+y^2-1=0$.

R. Funcţia

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2(1+z)}$$

este o funcţie meromorfă, avînd originea ca pol dublu şi punctul $z=-1$ pol simplu. Notînd cu R_0, R_{-i} reziduurile funcţiei $f(z)$ relativ la cei doi poli (notaţie utilizată şi în celelalte probleme), avem

$$R_0=\lim_{z\to 0}\left[\frac{e^{iz}}{1+z}\right]'=i-1,$$

$$R_{-i}=\lim_{z\to -1}\frac{e^{iz}}{z^2}=\frac{1}{e^{i}}=e^{-i}.$$

Curba este o elipsă raportată la axele de coordonate, avînd semiaxele $\frac{1}{2}$ şi 1. În interiorul curbei C funcţia $f(z)$ are polul $z=0$, deci

$$I=2\pi iR_0=-2\pi(1+i).$$

30. Să se calculeze integrala

$$I=\int_C \frac{dz}{z^2 \sin z},$$

C fiind cercul de ecuație $|z|=R$, cu $n\pi<R<(n+1)\pi$, (n=număr natural).

R. Funcția

$$f(z)=\frac{1}{z^2 \sin z}$$

este meromorfă avînd polul triplu $z=0$ și polii simpli $z=k\pi$, ($k=\pm 1, \pm 2, \ldots$).

În interiorul curbei C funcția are polii $z=0$ și $z=k\pi$, ($k=\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$), deci

$$I=2\pi i\left[R_0+\sum_{k=1}^{n}(R_{k\pi}+R_{-k\pi})\right].$$

Avem

$$R_{k\pi}=\lim_{z\to k\pi}\frac{z-k\pi}{z^2 \sin z}=\frac{1}{k^2\pi^2}\lim_{\zeta\to 0}\frac{\zeta}{\sin(\zeta+k\pi)}=\frac{(-1)^k}{k^2\pi^2},$$

de unde rezultă că

$$R_{k\pi}+R_{-k\pi}=\frac{2(-1)^k}{k^2\pi^2}.$$

Pentru a calcula reziduul funcției $f(z)$ relativ la polul $z=0$, vom folosi dezvoltarea în serie de puteri ale lui z a funcției $f(z)$:

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\left(1+\frac{z^2}{6}+\frac{z^4}{360}+\ldots\right),$$

deci

$$R_0=\frac{1}{6}.$$

Avînd în vedere valorile determinate pentru reziduuri, deducem

$$I=2\pi i\left[\frac{1}{6}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2\pi^2}\right].$$

31. Să se calculeze integrala

$$I=\int_C \frac{dz}{(1+z^4)\sqrt{1+z^2}},$$

unde C este parabola $y^2=x$, în sensul y - cilor crescători. Pentru radical se consideră determinarea care în origine ia valoarea 1.

R. Funcția

$$f(z)=\frac{1}{(1+z^4)\sqrt{1+z^2}}$$

are două puncte critice $z=\pm i$ și patru poli simpli

$$z_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\quad z_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Funcția $f(z)$ fiind regulată în punctul de la infinit, putem considera conturul din fig. II.31. În interiorul domeniului de integrat funcția are polii $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ și $z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, iar reziduările relative la acești poli sînt

$$R_{z_1}=\lim_{z\to z_1}\frac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{(1+z^4)\sqrt{1+z^2}}=-\frac{\sqrt{1+i}}{4\sqrt{2}},\quad R_{z_3}=-\frac{\sqrt{1-i}}{4\sqrt{2}}.$$

Rezultă

$$\int_C\frac{dz}{(1+z^4)\sqrt{1+z^2}}=\frac{\pi i}{2}\left[\sqrt{1+i}+\sqrt{1-i}\right]=$$

$$=\frac{\pi i}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

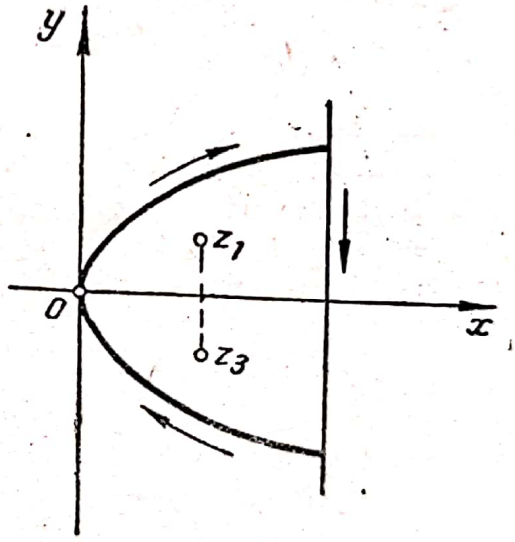


Fig. II.31

32. Să se calculeze integrala

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}dz$$

pe cercul C de centrul O și rază R

1° aplicînd direct teorema reziduurilor,

2° făcînd schimbarea de variabilă $z=\frac{1}{t}$.

R. 1° Funcția $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}$ admite $z=1$ pol simplu și $z=0$ punct singular esențial.

Pentru a determina reziduul funcției relativ la origine, vom dezvolta funcția $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}$ în serie de puteri ale lui z în jurul originii.

Făcînd produsul dezvoltărilor

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots,$$

$$\frac{1}{z-1}=1-z-z^2-\cdots-z^n-\cdots,$$

găsim

$$a_{-1}=-1-\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{n!}-\cdots=1-e,$$

deci

$$R_0=1-e.$$

Reziduul funcției $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}$ relativ la punctul $z=1$ este

$$R_1=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}\right]=e.$$

Dacă $R<1$, în interiorul cercului γ avem numai punctul $z=0$, deci $I=1-e$.

Dacă $R>1$, în interiorul cercului γ avem și punctul $z=1$, deci $I=1-e+e=1$.

2° Făcînd schimbarea de variabilă $z=1/t$, t va descrie în sens negativ un cerc γ' de rază $1/R$.

Dacă γ' este descris în sens direct, integrala devine

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{e^t}{t(1-t)}\,dt.$$

Funcția $f(t)=\frac{e^t}{t(1-t)}$ este meromorfă. Ea are pe $t=0$ și $t=1$ ca poli simpli cu reziduurile

$$R_0=\lim_{t\to 0}\frac{e^t}{1-t}=1,\quad R_1=\lim_{t\to 1}\frac{-e^t}{t}=-e.$$

Dacă $R<1$, atunci $\frac{1}{R}>1$, deci polii sînt în interiorul cercului γ' și $I=1-e$.

Dacă $R>1$, atunci $\frac{1}{R}<1$ și în interiorul lui γ' avem numai $t=0$, deci $I=1$.

33. Să se calculeze integrala

$$I=\int_C \frac{\sqrt{1+z^2}}{(1-z^2)\,(z^2-4)}\,dz,$$

unde pentru radical se consideră ramura care în origine ia valoarea 1, iar curba C este una din curbele de ecuații:

1° $|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2° $\frac{x^2}{2}+4y^2-1=0$ pentru $x>0$ și $x+y-\frac{1}{4}=0$ pentru $x<0$;

3° $|z|=\sqrt{2}$;

4° $x^2+y^2-1=0$ pentru $x>0$ și $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}-1=0$ pentru $x<0$.

R. Avînd în vedere ramura considerată pentru radical, funcția

$$f(z)=\frac{\sqrt{1+z^2}}{(1-z^2)\,(z^2-4)}$$

este uniformă în orice domeniu simplu conex care nu conține nici unul din punctele critice $z=\pm i$. De asemenea funcția este uniformă în planul complex din care am scos segmentul $[-i,\ i]$.

Funcția $f(z)$ are ca poli simpli punctele $z=\pm 1$, $z=\pm 2$.

Reziduurile funcției relative la acești poli sînt

$$R_1=-\left.\frac{\sqrt{1+z^2}}{(1+z)\,(z^2-4)}\right|_{z=1}=+\frac{\sqrt{2}}{6},\quad R_1=\left.\frac{\sqrt{1+z^2}}{(1-z)\,(z^2-4)}\right|_{z=-1}=-\frac{\sqrt{2}}{6},$$

$$R_2=\left.\frac{\sqrt{1+z^2}}{(1-z^2)\,(z+2)}\right|_{z=2}=-\frac{\sqrt{5}}{12},\quad R_{-2}=\left.\frac{\sqrt{1+z^2}}{(1-z^2)\,(z-2)}\right|_{z=-2}=+\frac{\sqrt{5}}{12}.$$

În cazul 1° există un domeniu D care conține curba C, dar nu conține punctele critice $z=\pm i$ (fig. II.33, *a*). În interiorul lui funcția $f(z)$ este olomorfă și $I=0$.

În cazul 2° există un domeniu D care conține curba C, dar nu conține punctele critice $z=\pm i$. În exteriorul lui funcția $f(z)$ are polul simplu $z=1$ (fig. II.33, *b*), deci

$$I=2\pi i R_1=\frac{\pi i\sqrt{2}}{3}.$$

În cazul 3° domeniul D este un domeniu din care s-a scos segmentul $[-i,\ i]$, (fig. II.33, *c*). În acest domeniu funcția $f(z)$ este uniformă avînd polii simpli $z=\pm 1$. Avem

$$I=2\pi i(R_1+R_{-1})=0$$

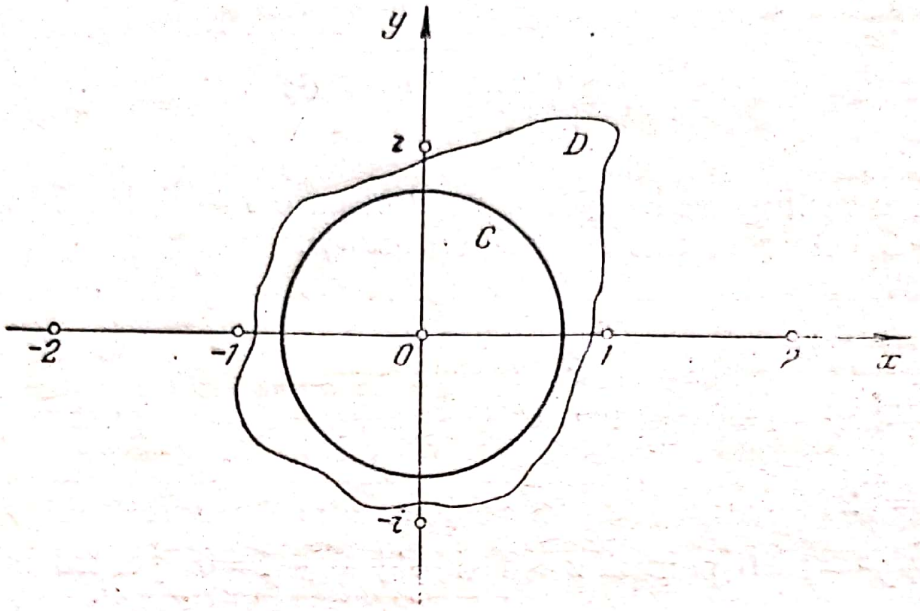


Fig. II.33, *a*

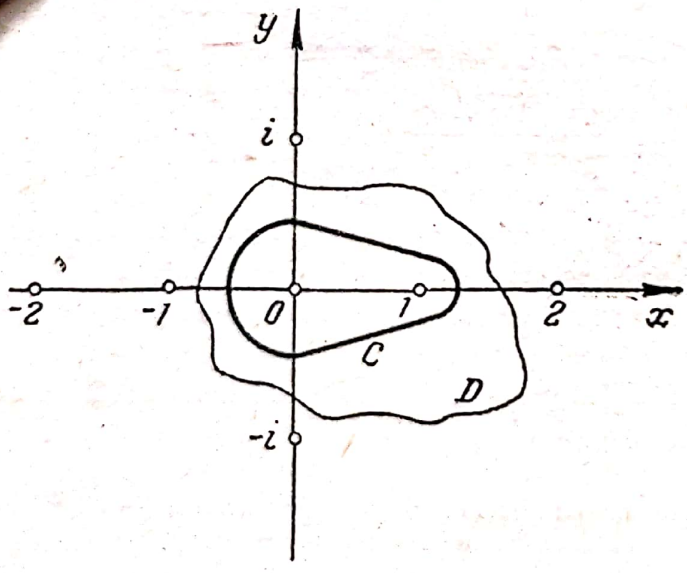


Fig. II.33, *b*

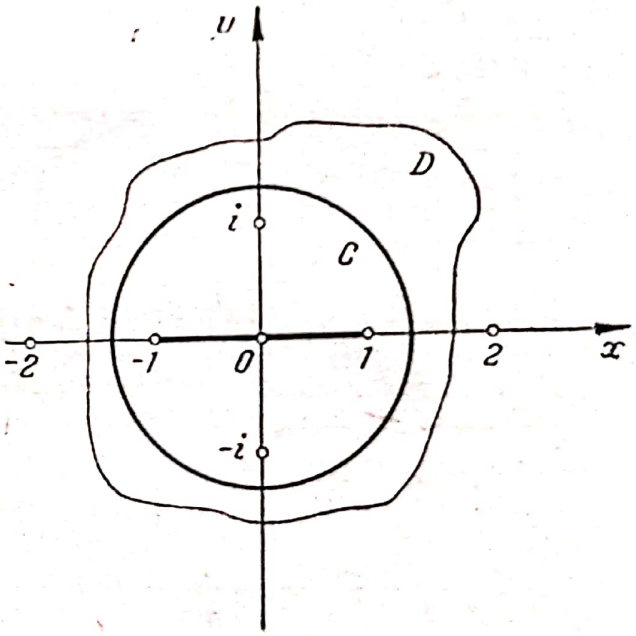


Fig. II.33, *c*

Scanned with OKEN Scanner

În cazul 4° domeniul D este un domeniu din care s-a scos segmentul $[-i, i]$ și care conține curba C (fig. II.33, d). În acest domeniu funcția $f(z)$ este uniformă și are polii simpli $z=\pm 1$, $z=-2$. Avem

$$I=2\pi i\,(R_{+1}+R_{-1}+R_{-2})=\frac{\pi i\sqrt{5}}{6}.$$

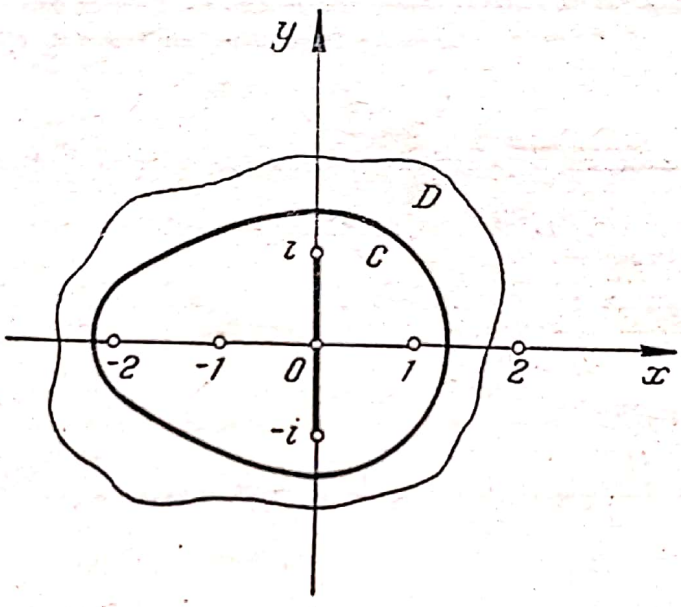


Fig. II.33, d

34. Să se calculeze integrala

$$I=\int_C \frac{z^{a+ib-1}}{1+z}\,dz,$$

unde a și b sînt două numere reale cu $0<a<1$, iar C este conturul din fig. II.34.

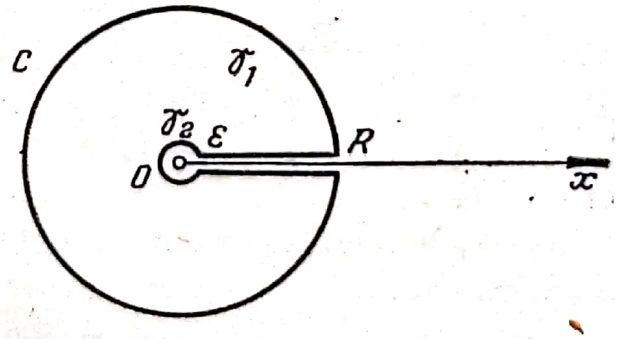


Fig. II.34

R. Funcția

$$f(z)=\frac{z^{a+ib-1}}{1+z}$$

are originea ca punct critic, iar punctul $z=-1$ pol simplu. Această funcție este olomorfă în planul complex în care am făcut o tăietură care unește originea cu punctul de la infinit de-a lungul semiaxei reale pozitive. În planul complex cu această tăietură determinarea lui z^{a+ib-1} este bine precizată dacă luăm spre exemplu

$$z^{a+ib-1}=e^{(a+ib-1)\ln x}$$

într-un punct de abscisă reală pozitivă x, deasupra tăieturii, $\ln x$ fiind determinarea reală a logaritmului.

Reziduul funcției $f(z)$ relativ la polul $z=-1$ este valoarea în acest punct a lui $z^{a+ib-1}=e^{(a+ib-1)\ln z}$.

Dacă într-un punct $z=x$ (deasupra tăieturii) argumentul lui z este 0, atunci în $z=-1$, $\ln z=i\pi$, deci

$$R_{-1}=e^{(a+ib-1)\,i\pi}=e^{\pi[-b+i(a-1)]}=-e^{\pi(ai-b)}.$$

Deci

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=-2\pi i e^{\pi(ai-b)}. \tag{1}$$

Dar

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z-\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\varepsilon}^{R} f(z)\mathrm{d}z+\int_{R}^{\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z. \tag{2}$$

Ținînd seama că $0<a<1$, rezultă că raportul

$$\left|\frac{zz^{a+ib-1}}{1+z}\right|=\frac{|z|^a}{|1+z|}$$

tinde la zero cînd $|z|\to 0$ sau cînd $|z|\to\infty$, deci

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z=0 \quad \text{și} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z=0. \tag{3}$$

Pe partea de deasupra tăieturii avem

$$\int_{\varepsilon}^{R} f(z)\mathrm{d}z=\int_{\varepsilon}^{R}\frac{x^{a+ib-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x, \tag{4}$$

unde x^{a+ib-1} este definit prin $e^{(a+ib-1)\ln x}$.

Pe partea de jos a tăieturii avem

$$z^{a+ib-1}=e^{(2\pi i+\ln x)(a+ib-1)}=e^{2\pi(ai-b)}\,x^{a+ib-1},$$

deci

$$\int_R^\varepsilon f(z)\,dz = e^{2\pi(a-ib)} \int_R^\varepsilon \frac{x^{a+ib-1}}{1+x}\,dx. \tag{5}$$

Trecînd la limită în egalitatea (2) și ținînd seama de relațiile (1), (3), (4) și (5), obținem

$$[1-e^{2\pi(a-ib)}] \int_0^\infty \frac{x^{a+ib-1}}{1+x}\,dx = -2\pi i e^{\pi(ai-b)},$$

adică

$$\int_0^\infty \frac{x^{a+ib-1}}{1+x}\,dx = -\frac{2\pi i e^{\pi(ai-b)}}{1-e^{2\pi(a-ib)}}.$$

Observație. În rezultatul obținut, dacă luăm $a=\frac{1}{2}$, avem

$$(1+e^{-2\pi b}) \int_0^\infty \frac{x^{ib-\frac{1}{2}}}{1+x}\,dx = 2\pi e^{-\pi b}$$

sau

$$\int_0^\infty \frac{x^{ib-\frac{1}{2}}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi b}.$$

Punînd $x=e^{2t}$, $b=\omega$, obținem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\operatorname{ch} t}\,dt = \frac{\pi}{\operatorname{ch}\frac{\omega\pi}{2}}, \text{ de unde } \int_0^\infty \frac{\cos\omega t}{\operatorname{ch} t}\,dt = \frac{\pi}{2\operatorname{ch}\frac{\omega\pi}{2}}.$$

ω fiind real.

35. Să se calculeze integrala

$$I = \int_C \frac{\ln\frac{z-1}{z+1}}{(z^2+1)(z^2-4)}\,dz,$$

unde pentru logaritm se consideră determinarea care în origine are valoarea πi, iar conturul C este:

$1°\ |z|=\frac{1}{2}$; $3°\ |z|=\sqrt{2}$;

$2°\ 3x^2+y^2-2=0$; $4°\ |z|=3$.

R. Funcția $\ln\frac{z-1}{z+1}$ are ca puncte critice punctele $z=\pm 1$. Fiecare determinare a acestei funcții este uniformă în orice domeniu simplu conex care nu conține punctele $z=\pm 1$ sau în tot planul complex din care este scos segmentul $[-1, 1]$.

Funcția

$$f(z)=\frac{\ln\frac{z-1}{z+1}}{(z^2+1)(z^2-4)}$$

are ca poli simpli punctele $z=\pm i$, $z=\pm 2$.

În cazul 1° există un domeniu D care conține curba C și în interiorul căruia nu există nici unul din punctele $z=\pm 1$, $z=\pm i$, $z=\pm 2$ (fig. II.35, *a*). În interiorul lui D funcția $f(z)$ este olomorfă și

$$I=0.$$

În cazul 2° considerăm domeniul D, un domeniu care conține curba C în interior dar nu conține nici unul din punctele $z=\pm 1$, $z=\pm 2$ (fig. II.35, *b*). În acest domeniu

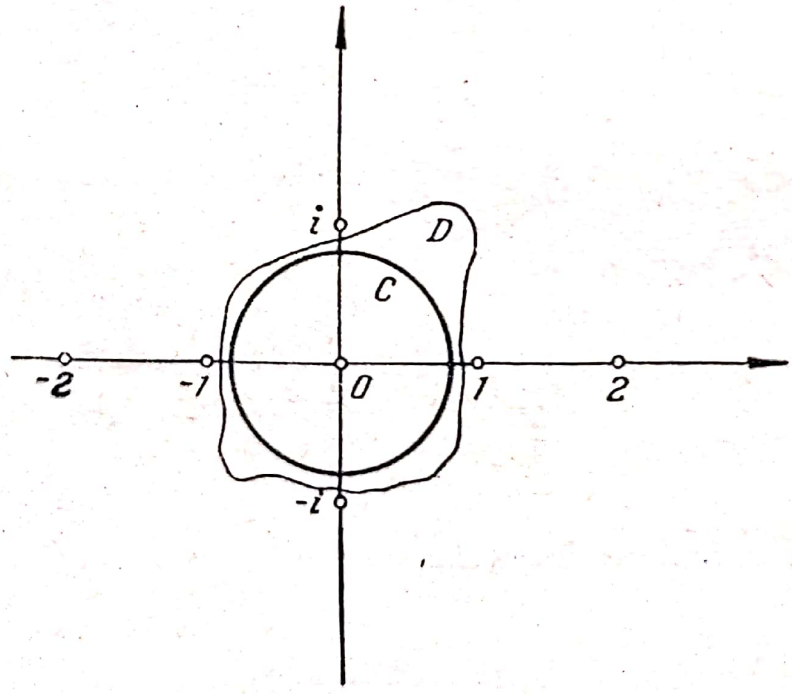


Fig. II.35, *a*

funcția $f(z)$ este meromorfă având poli simpli $z=\pm i$ cu reziduurile relativ la acești poli

$$R_i=\lim_{z\to i}\frac{\ln\dfrac{z-1}{z+1}}{(z+i)\,(z^2-4)}=-\frac{\pi}{20},\quad R_{-i}=\lim_{z\to -i}\frac{\ln\dfrac{z-1}{z+1}}{(z-i)\,(z^2-4)}=\frac{-\pi}{20},$$

deci

$$I=2\pi i(R_i+R_{-i})=\frac{\pi^2 i}{-5}.$$

În cazul 3° considerăm domeniul D care conține curba C fără să conțină punctul ± 2 și din care am scos segmentul $[-1, 1]$, (fig. II.35, *c*). În acest domeniu, funcția $f(z)$ este meromorfă având polii simpli $z=\pm i$, deci avem

$$I=2\pi i(R_i+R_{-i})=\frac{\pi^2 i}{-5}.$$

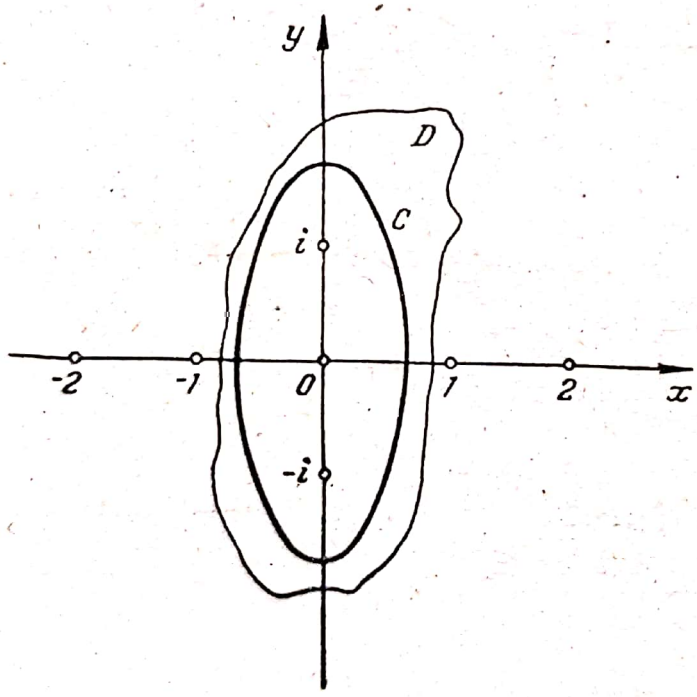


Fig. II.35, *b*

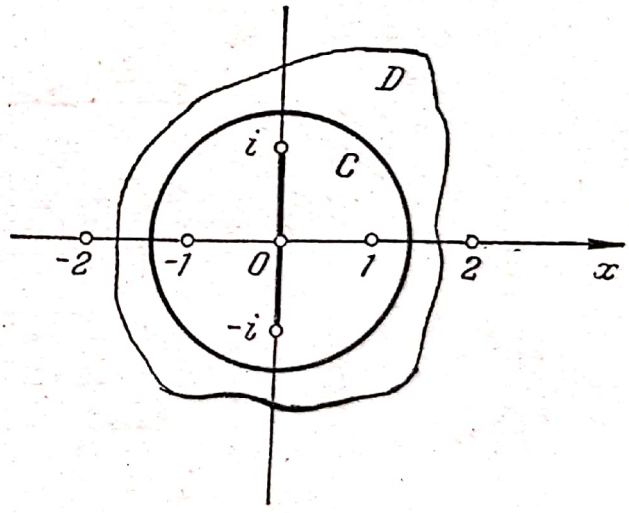


Fig. II.35, *c*

În cazul 4° domeniul D conține în interior curba C și din care s-a scos segmentul $[-1, 1]$, (fig. II.35, *d*). În acest domeniu funcția $f(z)$ este meromorfă având polii simpli $z=\pm i$, $z=\pm 2$, deci

$$I=2\pi i(R_i+R_{-i}+R_2+R_{-2}).$$

unde

$$R_2=\lim_{z\to 2}\frac{\ln\frac{z-1}{z+1}}{(z^2+1)\,(z+2)}=-\frac{\ln 3}{20},\quad R_{-2}=\lim_{z\to -2}\frac{\ln\frac{z-1}{z+1}}{(z^2+1)\,(z-2)}=\frac{-\ln 3}{20},$$

de unde

$$I=\frac{\pi i}{5}\,[\pi-\ln 3].$$

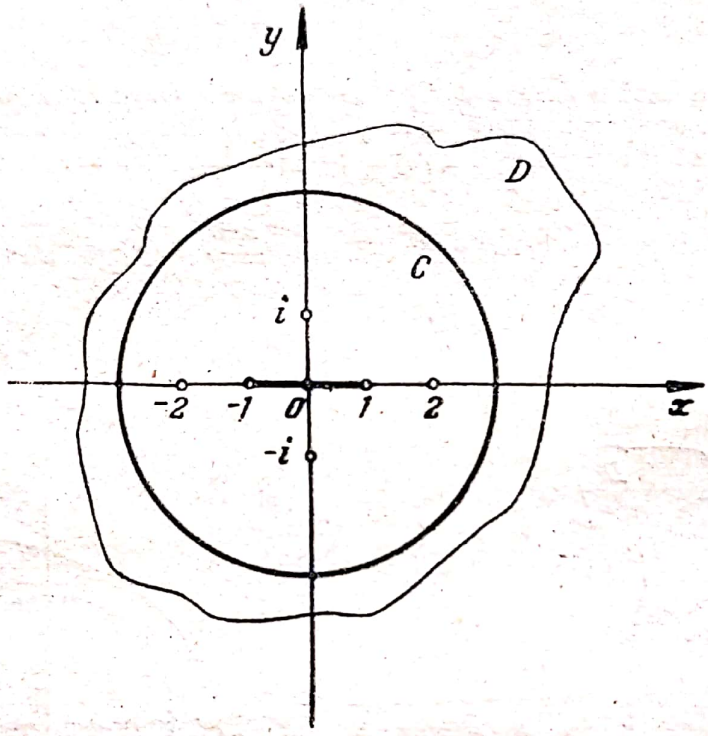


Fig. II.35, *d*

36. Să se calculeze reziduurile funcției

$$f(z)=\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}.$$

R. Funcția $f(z)$ are poli de ordinul n în $z=-1$ și $z=\infty$.

Pentru a calcula reziduul acestei funcții relativ la polul $z=-1$, o vom dezvolta în serie în jurul punctului $z=-1$. Avem

$$\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}=\frac{1}{(1+z)^n}\,[1-(1+z)]^{2n}=\frac{1}{(z+1)^n}\left[1-\frac{2n}{1!}(1+z)+\right.$$

$$\left.+\frac{2n(2n-1)}{2!}(1+z)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2n(2n-1)\cdots[2n-(n-2)]}{(n-1)!}(1+z)^{n-1}+\cdots\right]$$

de unde

$$R_{-1}=(-1)^{n-1}\frac{2\,n(2\,n-1)\cdots[2\,n-(n-2)]}{(n-1)!}=(-1)^{n+1}\,C_{2n}^{n+1}.$$

În vecinătatea punctului de la infinit avem dezvoltarea

$$\frac{z^{2n}}{(1-z)^n}=z^n\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-n}=$$

$$=z^n\left[1-\frac{n}{z}+\frac{n\,(n+1)}{2!}\frac{1}{z^2}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)\cdots(n+n)}{(n+1)!}\frac{1}{z^{n+1}}+\cdots\right].$$

Rezultă

$$R_\infty=(-1)^n\,C_{2n}^{n+1}.$$

37. Să se calculeze reziduul în origine al funcției

$$f(z)=\frac{e^{\lambda z+\frac{z^2}{2}}}{z^{n+1}},\ n \text{ întreg.}$$

R. Reziduul va fi coeficientul lui z^n din dezvoltarea funcției $e^{\lambda z+\frac{z^2}{2}}$ în serie în jurul originii. Pentru calcularea acestui coeficient putem proceda în diverse moduri.

1° $$e^{\lambda z}=1+\lambda z+\cdots+\frac{\lambda^n z^n}{n!}+\cdots,$$

$$e^{\frac{z^2}{2}}=1+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^{2m}}{2^m m!}+\cdots$$

Făcînd produsul acestor dezvoltări, găsim pentru coeficientul lui z^n:

$$R_{-1}=\frac{\lambda^n}{n!}+\frac{\lambda^{n-2}}{2\,(n-2)!}+\frac{\lambda^{n-4}}{2^2(n-1)!\,2!}+\cdots$$

2° Scriind $e^{\lambda z+\frac{z^2}{2}}=1+\left(\lambda z+\frac{z^2}{2}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(\lambda z+\frac{z^2}{2}\right)^k+\cdots$

și căutînd coeficientul lui z^n în termenii pentru care $k\leqslant n\leqslant 2k$, avem același rezultat ca la 1°.

3° Dacă scriem

$$e^{\lambda z+\frac{z^2}{2}}=e^{\frac{1}{2}(z+\lambda)^2}\,e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

și dezvoltăm funcția $\varphi(\lambda)=e^{\frac{\lambda^2}{2}}$ în seria Taylor, considerînd z crescător, avem

$$e^{\frac{1}{2}(\lambda+z)^2}=\varphi(\lambda+z)=\varphi(\lambda)+\cdots+\frac{z^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\varphi(\lambda)+\ldots,$$

de unde

$$R_{-1}=\frac{1}{n!}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\left(e^{\frac{\lambda^2}{2}}\right).$$

38. Să se calculeze

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}.$$

R. Să considerăm integrala

$$\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2(z^2+b^2)},$$

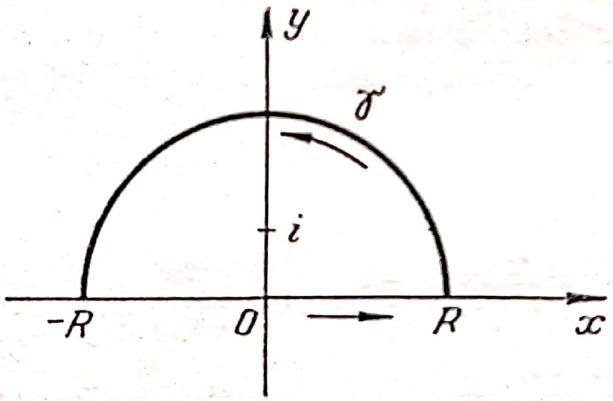


Fig. II.38

unde conturul C este format din segmentul $[-R, R]$ și semicercul de ecuație $y=\sqrt{R^2-x^2}$, unde $R>a$, $R>b$, (fig. II.38). Această integrală se scrie

$$\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2(z^2+b^2)}=\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}+\int_\Gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2(z^2+b^2)},\qquad(1)$$

deoarece pe axa reală avem $z=x$.

Funcția $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)^2(z^2+b^2)}$ are punctele $z=\pm ib$ $(b>0)$ poli simpli și punctele $z=\pm ia$, $(a>0)$ ca poli dubli. În interiorul conturului C funcția $f(z)$ are

polii $z_1=ia$ şi $z_2=ib$. Deci

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+a^2)^2\,(z^2+b^2)} = 2\pi i\,(R_{z_1}+R_{z_2}).$$

Avem

$$R_{z_1}=\left[\frac{1}{(z+ai)^2\,(z^2+b^2)}\right]'_{z=ai}=\frac{b^2-3a^2}{4\,ia^3\,(b^2-a^2)^2},$$

$$R_{z_2}=\left[\frac{1}{(z+bi)\,(z^2+a^2)^2}\right]_{z=bi}=\frac{1}{2\,bi\,(b^2-a^2)^2},$$

deci

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+a^2)^2\,(z^2+b^2)} = \frac{\pi\,(2a+b)}{2\,a^3b\,(a+b)^2}. \tag{2}$$

Dar

$$|\,zf(z)\,| = \left|\frac{z}{(z^2+a^2)^2\,(z^2+b^2)}\right| \to 0 \text{ pentru } |\,z\,|\to\infty,$$

deci

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \frac{dz}{(z^2+a^2)^2\,(z^2+b^2)}=0.$$

Trecînd la limită în relaţia (1) pentru $R\to\infty$ şi ţinînd seama de relaţia (2), rezultă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2\,(x^2+b^2)} = \frac{\pi\,(2a+b)}{2\,a^3\,b\,(a+b)^2}.$$

39. Să se calculeze integrala lui Poisson

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

R. Această integrală se calculează integrînd funcţia $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z}$ pe conturul format de semicercurile Γ şi γ situate deasupra axei Ox, cu centrele în O şi cu razele R şi r şi segmentele de pe axa reală $[-R, -r]$ şi $[r, R]$, (fig. II.39).

Avem

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}\,dx+\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz+\int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx+\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz=0,$$

deoarece funcţia $f(z)$ este olomorfă în interiorul conturului de integrare. Putem scrie

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx+\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}\,dx=\int_r^R \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx=2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Deoarece

$$\frac{e^{iz}}{z}=\frac{1}{z}+\frac{i}{1!}+\frac{i^2}{2!}z+\cdots+\frac{i^n}{n!}z^{n-1}+\cdots,$$

avem

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz=\left(\ln z+\frac{i}{1!}z+\frac{i^2}{2!\,2}z^2+\cdots\right)_\gamma.$$

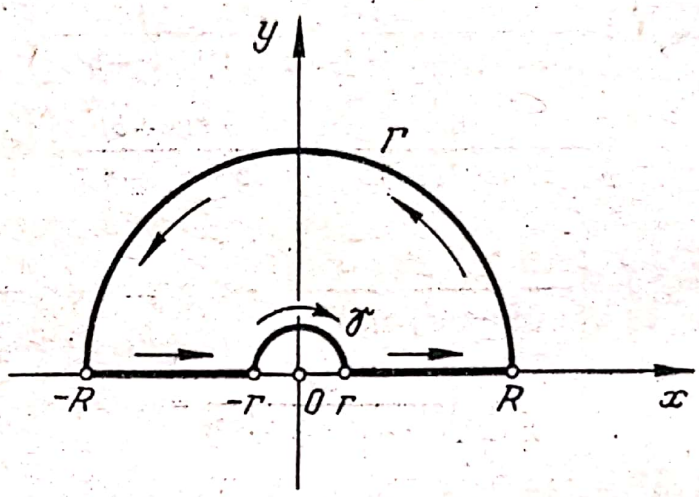


Fig. II.39

Dar

$$(\ln z)_\gamma=\ln\ -(\ln r+i\pi)=-i\pi,$$

deci

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz\to -i\pi$$

pentru $r\to 0$ deoarece termenii rămaşi tind la zero împreună cu r.

Integrînd prin părţi, avem

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz=\left(\frac{1}{i}\frac{e^{iz}}{z}\right)_\Gamma+\frac{1}{i}\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z^2}\,dz.$$

Pe Γ avem $z=Re^{i\theta}$, $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ şi

$$|e^{iz}|=|e^{iR\cos\theta-R\sin\theta}|=e^{-R\sin\theta}\leqslant 1.$$

Deci pentru $R\to\infty$

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z^2}\,dz\to 0$$

şi termenul integrat tinde şi el la zero cînd $R\to\infty$.

Făcînd $R\to\infty$ şi $r\to 0$, egalitatea obţinută din teorema reziduurilor ne dă

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

40. Să se calculeze integralele lui Fresnel

$$I_1=\int_0^{\infty}\sin x^2\,dx,\quad I_2=\int_0^{\infty}\cos x^2 dx.$$

R. Vom integra funcţia $f(z)=e^{-z^2}$ pe conturul din fig. II.40. Teorema reziduuri lor ne dă

$$\int_0^R e^{-x^2}dx+\int_{AB} e^{-z^2}dz+\int_{BO} e^{-z^2}dz=0, \tag{1}$$

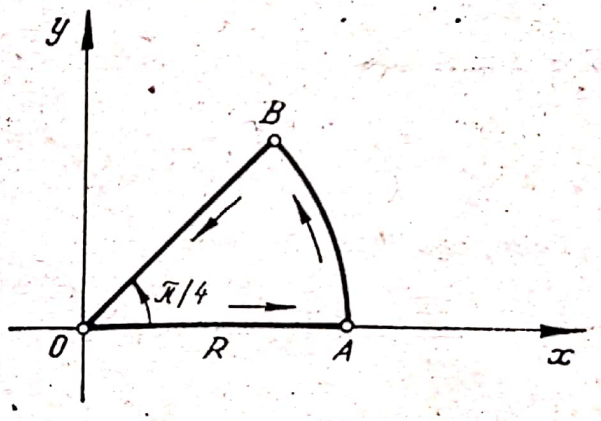


Fig. II.40

deoarece e^{-z^2} este o funcţie întreagă. Făcînd pe $R\to\infty$ în această egalitate, prima integrală tinde către integrala lui Gauss

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pe arcul AB, avem

$$z=R(\cos\theta+i\sin\theta),\quad |e^{-z^2}|=e^{-R^2\cos 2\theta}\leqslant 1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

Integrînd prin părţi, avem

$$\int_{AB}e^{-z^2}dz=\int_{AB}\frac{ze^{-z^2}}{z}\,dz=\left(-\frac{1}{2}\frac{e^{-z^2}}{z}\right)_{AB}-\frac{1}{2}\int_{AB}\frac{e^{-z^2}}{z^2}\,dz.$$

Avem

$$|zf(z)| = \left|\frac{e^{-z^2}}{z}\right| \leqslant \frac{1}{R},$$

deci

$$\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = 0,$$

rezultă

$$\lim_{R\to\infty} \int_{AB} \frac{e^{-z^2}}{z^2}\,dz = 0.$$

Pe bisectoarea OB, avem

$$z = re^{i\frac{\pi}{4}}, \quad dz = e^{i\frac{\pi}{4}}\,dr,$$

de unde

$$\int_{BO} e^{-z^2}dz = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_R^0 e^{-ir^2}dr = -e^{i\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^R \cos r^2 dr - i\int_0^R \sin r^2\,dr\right],$$

prin urmare, cînd $R\to\infty$, atunci

$$\int_{BO} e^{-z^2}dz \to e^{-i\frac{\pi}{4}}(I_2 - iI_1).$$

În consecință, la limită, egalitatea (1) devine

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - e^{i\frac{\pi}{4}}(I_2 - iI_1) = 0,$$

de unde

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

41. Să se calculeze

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(nx - \sin x)\,dx.$$

R. Facem schimbarea de variabilă $z = e^{ix}$. Avem

$$\cos(nx - \sin x) = \frac{1}{2}\left[e^{i(nx-\sin x)} + e^{-i(nx-\sin x)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[z^n e^{-\frac{1}{2}(z-z^{-1})} + z^{-n} e^{\frac{1}{2}(z-z^{-1})}\right] = \frac{1}{2z^n}\left[z^{2n} e^{-\frac{1}{2}(z-z^{-1})} + e^{\frac{1}{2}(z-z^{-1})}\right].$$

Integrala devine

$$I=\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{2}(z+z^{-1})}\,\frac{z^{2n}e^{-\frac{1}{2}(z-z^{-1})}+e^{-\frac{1}{2}(z-z^{-1})}}{2z^n}\cdot\frac{dz}{iz}=$$

$$=\frac{1}{2i}\int_{|z|=1}\frac{z^{2n}e^{\frac{1}{z}}+e^{z}}{z^{n+1}}\,dz=2\pi i R_0.$$

Pentru a determina reziduul funcției $\frac{z^n e^{\frac{1}{z}}+e^z}{z^{n+1}}$ în punctul $z=0$, vom dezvolta în serie această funcție în vecinătatea punctului $z=0$. Avem dezvoltarea

$$\frac{z^{2n}e^{\frac{1}{z}}+e^z}{z^{n+1}}=$$

$$=\frac{z^{2n}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}+\cdots\right)+\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)}{z^{n+1}}=$$

$$=\frac{2}{n!}\cdot\frac{1}{z}+\cdots,$$

de unde rezultă

$$R_0=\frac{2}{n!},$$

deci

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(nx-\sin x)\,dx=\frac{2\pi}{n!}.$$

42. Să se calculeze integrala

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3x}{1-2p\cos 2x+p^2}\,dx,\quad \text{unde } 0<p<1.$$

R. Facem schimbarea de variabilă $z=e^{ix}$ și avem

$$dx=\frac{dz}{iz},\quad \cos 2x=\frac{1}{2}\left[z^2+\frac{1}{z^2}\right],\quad \cos 3x=\frac{1}{2}\left[z^3+\frac{1}{z^3}\right]$$

și

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3x}{1-2p\cos 2x+p^2}\,dx=\frac{1}{4i}\int_{|z|=1}\frac{(z^3+z^{-3})^2\,dz}{z(1-pz^2)(1-pz^{-2})}.$$

Funcția $f(z)=\frac{(z^6+1)^2}{z^5(1-pz^2)(z^2-p)}$ are în interiorul cercului $|z|=1$ polii $z=0$, $z=\sqrt{p}$, $z=-\sqrt{p}$.

Aplicînd teorema reziduurilor, obținem

$$\frac{1}{4i}\int \frac{(z^6+1)^2}{z^5(1-pz^2)(z^2-p)}\,dz=\frac{\pi}{2}[R_{z_0}+R_{z_1}+R_{z_2}],$$

unde

$$R_{z_0}=-\frac{1+p^2+p^4}{p^3},\quad R_{\sqrt{p}}=\frac{(1+p^3)^2}{2p^3(1-p^2)},\quad R_{-\sqrt{p}}=\frac{(1+p^3)^2}{2p^3(1-p^2)}.$$

Rezultă

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3x}{1-2p\cos 2x+p^2}\,dx=\frac{\pi(p^2-p+1)}{1-p}.$$

43. Să se calculeze integrala

$$I=\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(x+a)^3}\,dx,\ a \text{ fiind un număr pozitiv.}$$

R. Funcția

$$f(z)=\frac{\sqrt[3]{z^2(1-z)}}{(z+a)^3}$$

are punctele critice $z_1=0$ și $z_2=1$, iar $z_3=-a$ este pol triplu. Vom calcula

$$\int_C f(z)\,dz$$

unde C este conturul din fig. II.43.

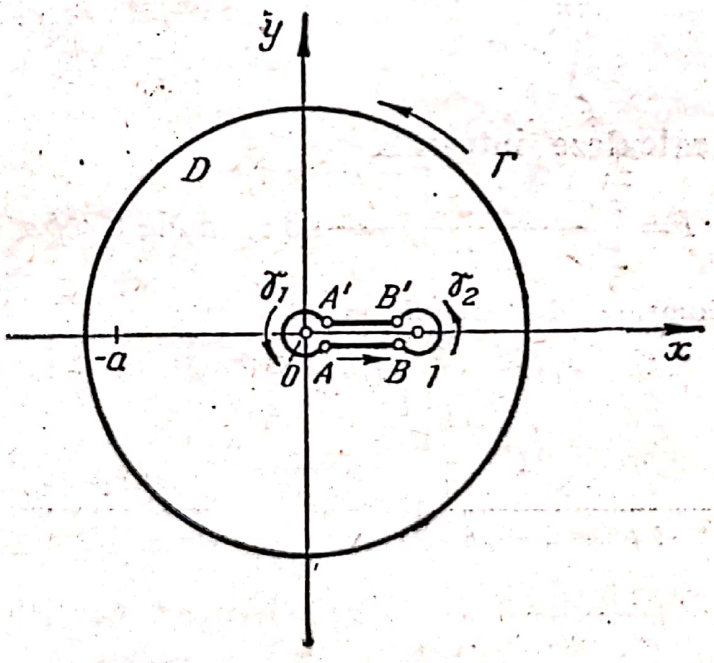


Fig. II.43

Aplicînd teorema reziduurilor, putem scrie

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz-\int_{\gamma} f(z)\,dz=2\pi i R_{z_3}=-a, \tag{1}$$

unde conturul γ este format din segmentele $AB \parallel A'B' \parallel Ox$ şi cercurile de rază ε cu centrele în 0 şi 1.

În domeniul D funcţia este uniformă. Dar

$$|zf(z)|=\left|\frac{z\sqrt[3]{z^2(1-z)}}{(z+a)^3}\right|\to 0 \text{ pentru } |z|\to 0 \text{ şi } |z|\to\infty. \tag{2}$$

Rezultă că

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)\,dz=0.$$

Pentru a calcula integralele pe conturul γ, să considerăm că z pleacă din punctul $A(\varepsilon, 0)$ cu determinarea reală pentru radical. Avem

$$\int_{AB} f(z)\,dz=\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Cînd z ajunge în B, el s-a notat cu 2π pe cercul de centrul 1 şi rază ε, deci $(1-z)^{1/3}$ ajunge în B' cu valoarea din B multiplicată cu $e^{\frac{2}{3}\pi i}$, deci

$$\int_{B'A'} f(z)\,dz=-e^{\frac{2\pi i}{3}}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x)dx.$$

Integralele pe cercurile γ_1 şi γ_2 tind la zero. Avem

$$\left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)I=-2\pi i R_{z_3},$$

iar

$$R_{z_3}=\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{z^2(1-z)}\right]'_{z=-a}=-\frac{2}{9}\left[\sqrt[3]{z^2(1-z)}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z(1-z)}+\frac{1}{(1-z)^2}\right)\right].$$

Pentru a determina valoarea funcţiei $\sqrt[3]{z^2(1-z)}$ în punctul $z=-a$, să observăm că pleçînd din A cu valoarea reală, z descrie în jurul lui O un semicerc în sens invers şi $\sqrt[3]{z^2}$ se multiplică cu $e^{-\frac{2\pi i}{3}}$, deci în $z=-a$ avem pentru radical valoarea

$$e^{-\frac{2\pi i}{3}}\sqrt[3]{a^2(1+a)}.$$

Deci

$$R_{z_3}=-\frac{1}{9}e^{-\frac{2\pi i}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{a^4(1+a)^5}},$$

de unde

$$I=\frac{2\pi i}{9}\,\frac{1}{\sqrt[3]{a^4(1+a)^5}}\,\frac{e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}\,a^{-\frac{4}{3}}\,(1+a)^{-\frac{5}{3}}.$$

44. Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx,\quad (0<p<1).$$

R. Integrala are sens pentru ambele limite din cauza condițiilor impuse lui p. Considerăm reală ramura funcției

$$\frac{z^{p-1}}{1+z}=\frac{e^{(p-1)\ln z}}{1+z}$$

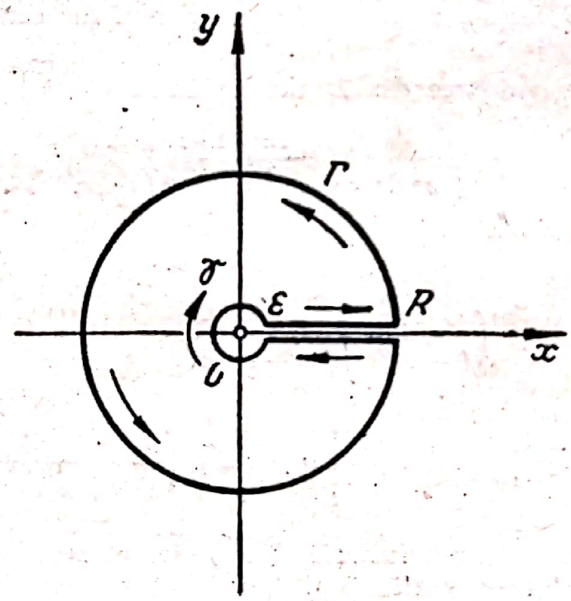


Fig. II.44

pe marginea superioară a tăieturii $(0, +\infty)$ și vom aplica teorema reziduurilor pe conturul din fig. II.44.

În acest contur, funcția are pe $z=-1$ ca pol simplu cu reziduul

$$R_1=e^{(p-1)\ln z}\Big|_{z=-1}=e^{(p-1)\pi i}.$$

Avem

$$\int_{\Gamma}\frac{z^{(p-1)}}{1+z}\,dz+\int_{R}^{\varepsilon}\frac{e^{(p-1)(\ln x+2\pi i)}}{1+x}\,dx+\int_{\gamma}\frac{e^{(p-1)\ln z}}{1+z}\,dz+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{(p-1)\ln x}}{1+x}\,dx=$$

$$=2\pi i R_{-1}=2\pi i e^{(p-1)\pi i}. \tag{1}$$

Dar

$|zf(z)|=\left|\frac{z^p}{1+z}\right|$ tinde la zero pentru $|z|\to 0$ și $|z|\to\infty$, deci integralele pe Γ și γ tind către zero cînd R tinde la infinit și ε tinde la zero.

Trecînd la limită pentru $R\to\infty$ și $\varepsilon\to 0$ în relația (1), obținem

$$\int_{0}^{\infty}\frac{e^{(p-1)\ln x}}{1+x}\,dx+\int_{\infty}^{0}\frac{e^{(p-1)\cdot(\ln x+2\pi i)}}{1+x}\,dx=2\pi i e^{(p-1)\pi i},$$

de unde

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

45. Să se calculeze integrala

$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1-x}\,dx,\quad (0<p<1.)$$

R. Să considerăm funcția

$$f(z)=\frac{z^{p-1}}{1-z}$$

pe care o vom integra pe conturul C din fig. II.45 în interiorul căruia este uniformă, deci

$$\int_{C}f(z)dz=0.$$

Această integrală se mai scrie

$$\int_{AB}f(z)dz+\int_{\gamma_1^+}f(z)dz+\int_{CD}f(z)dz+\int_{\Gamma}f(z)dz+\int_{EF}f(z)dz+$$

$$+\int_{\gamma_1^-}f(z)dz+\int_{GH}f(z)dz+\int_{\gamma}f\,dz=0. \tag{1}$$

Dacă pe AB luăm $\arg z=0$, pe GH avem $\arg z=2\pi$ și deci

$$\int\limits_{AB+CD} \frac{x^{p-1}}{1-x}\,dx+e^{2\pi ip}\int\limits_{EF+GH} \frac{x^{p-1}}{1-x}\,dx=\left(1-e^{2\pi ip}\right)\int\limits_{AB+CD} \frac{x^{p-1}}{1-x}\,dx.$$

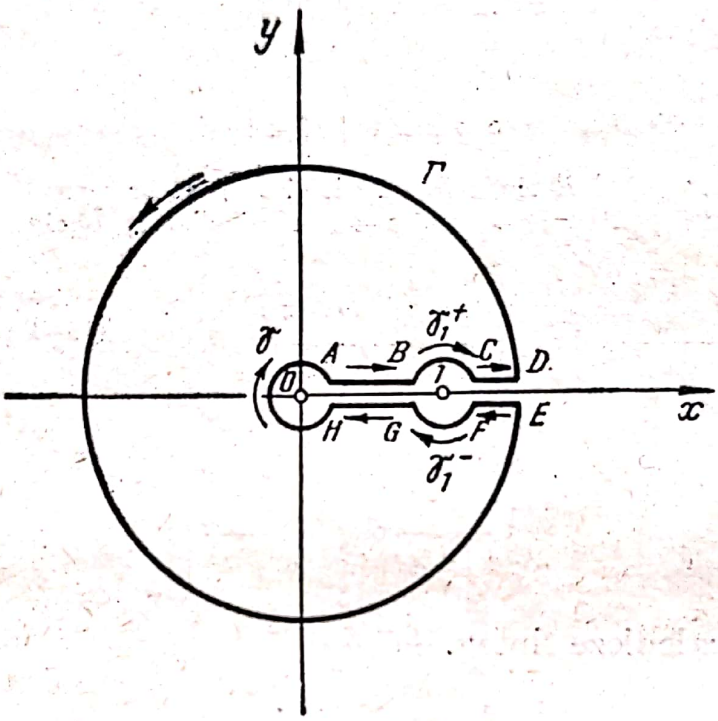


Fig. II.45

În vecinătatea punctului $z=1$ avem dezvoltarea

$$\frac{z^{p-1}}{1-z}=\frac{[1+(z-1)]^{p-1}}{1-z}=\frac{1+(p-1)+\dfrac{(p-1)\,(p-2)}{2\,!}(z-1)^2+\cdots}{1-z},$$

deci

$$\int\limits_{\gamma_1^+} \frac{z^{p-1}}{1-z}\,dz=\int\limits_{\pi}^{0} \frac{dz}{1-z}-(p+1)\int\limits_{\pi}^{0} dz-\cdots$$

Dacă punem $z-1=\rho e^{i\theta}$,

$$\int\limits_{\gamma_1^+} \frac{z^{p-1}}{1-z}\,dz=\pi i+o(\rho),$$

unde cantitatea $o(\rho)$ tinde la zero o dată cu ρ.

Analog se obține

$$\int_{\gamma_1^-} \frac{z^{p-1}}{1-z}\,dz=\pi i e^{2\pi ip}+o(\rho).$$

Trecînd la limită în relația (1) pentru $\rho \to 0$, $R \to \infty$ și $\varepsilon \to 0$, unde R este raza cercului Γ iar ε este raza cercului γ și ținînd seama de faptul că

$$|zf(z)|=\left|\frac{z^p}{1-z}\right| \to 0 \text{ pentru } \varepsilon \to 0,\ (\varepsilon=|z|),$$

obținem

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1-x}\,dx=-\pi i\,\frac{1+e^{2\pi ip}}{1-e^{2\pi ip}}=\pi \operatorname{cotg}\pi p.$$

46. Să se calculeze integrala

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{\alpha x}\sqrt{x}}{x^2+\omega^2}\,dx.$$

R. Funcția

$$f(z)=\frac{e^{\alpha z}\sqrt{z}}{z^2+\omega^2}$$

are pe $z=0$ punct critic iar punctele $z=\pm i\omega$ poli simpli. Vom considera conturul C din fig. II.46:

$$\int_C f(z)dz=\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(z)dz-\int_\gamma f(z)dz-\int_{-\varepsilon}^{-R} f(z)dz-\int_{-R}^{-\varepsilon} f(z)dz+\int_\Gamma f(z)dz=2\pi i[R_{i\omega}+R_{-i\omega}].$$

Dar $|zf(z)| \to 0$ pentru $|z| \to \infty$, deci

$$\int_\Gamma f(z)\,dz \to 0 \text{ pentru } R \to \infty.$$

Pentru a calcula integrala pe γ scriem $z=\varepsilon e^{i\theta}$ și cum $|z|<\omega$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\gamma f(z)\,dz=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi\omega^2}\int_0^{2\pi} e^{i\varepsilon(\cos\theta+i\sin\theta)}\varepsilon^{3/2}e^{3/2 i\theta}\,d\theta=0.$$

Pe tăietura de sus $z = |x| e^{i\pi}$, avem

$$\int_{-\varepsilon}^{-R} f(z)\,dz \xrightarrow[\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}]{} -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-x\alpha\sqrt{x}}}{x^2+\omega^2}\,dx.$$

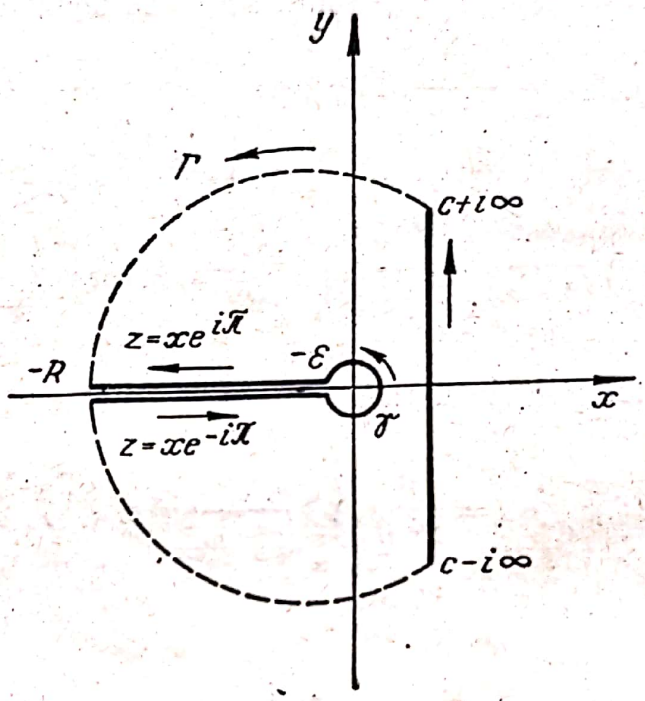


Fig. II.46

Pe tăietura de jos $z = |x| e^{-i\pi}$, deci

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} f(z)dz \xrightarrow[\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}]{} \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{0} \frac{e^{-\alpha x\sqrt{x}}}{x^2+\omega^2}\,dx.$$

Reziduul relativ la punctul $z = i\omega$ este

$$R_{i\omega} = \left[\frac{e^{\alpha z\sqrt{z}}}{z+i\omega}\right]_{z=i\omega} = \frac{e^{i\left(\alpha\omega+\frac{\pi}{4}\right)}}{2i\sqrt{\omega}}.$$

Analog găsim

$$R_{-i\omega} = -\frac{e^{-i\left(\alpha\omega+\frac{\pi}{4}\right)}}{2i\sqrt{\omega}}.$$

Rezultă

$$I=\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sin\left(\alpha\omega+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha x}\sqrt{x}}{x^2+\omega^2}\,dx.$$

47. Să se calculeze integrala

$$I=\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+a^2}\,dx,\quad a>0.$$

R. Considerăm integrala

$$\int_C\frac{\sqrt{z}\ln z}{z^2+a^2}\,dz$$

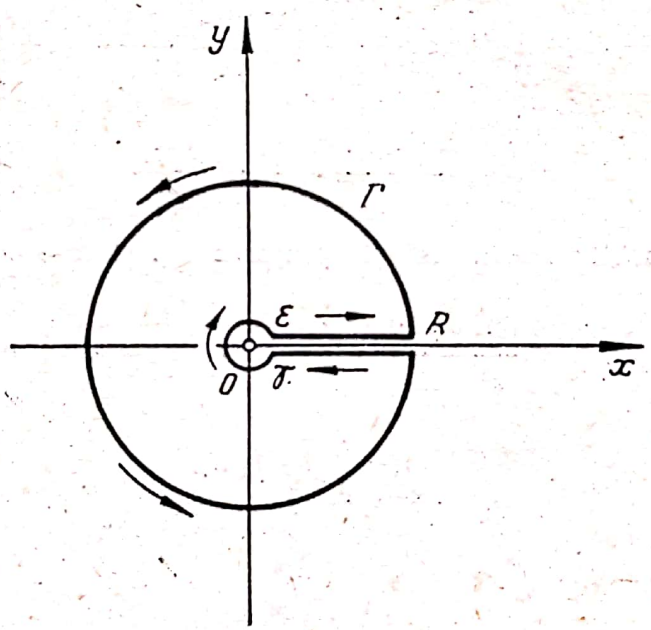


Fig. II.47

unde C este conturul din fig. II.47, iar pentru radical luăm determinarea pozitivă și pentru logaritm determinarea principală.

În interiorul conturului C funcția

$$f(z)=\frac{\sqrt{z}\ln z}{z^2+a^2}$$

este meromorfă avînd polii simpli $z=\pm ai$, deci

$$\int_C\frac{\sqrt{z}\ln z}{z^2+a^2}\,dz=2\pi i(R_{ai}+R_{-ai}).$$

Avem

$$R_{ai}=\lim_{z\to ai}\frac{\sqrt{z}\ln z}{z+ai}=\frac{\sqrt{2a}}{4ai}\left(\ln a+i\frac{\pi}{2}\right)(1+i),$$

$$R_{-ai}=\lim_{z\to -ai}\frac{\sqrt{z}\ln z}{z-ai}=-\frac{\sqrt{2a}}{4a}\left(\ln a+\frac{3\pi}{2}i\right)(1+i),$$

deci

$$\int_C\frac{\sqrt{z}\ln z}{z^2+a^2}\,dz=\frac{\pi[\pi+2\ln a]}{\sqrt{2a}}+i\frac{2\pi^2}{\sqrt{2a}}.$$

Ținînd seama de forma conturului C, putem scrie

$$\int_\varepsilon^R\frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+a^2}\,dx+\int_\Gamma f(z)\,dz+\int_R^\varepsilon\frac{-\sqrt{x}\,(\ln x+2\pi i)}{x^2+a^2}\,dx+\int_\gamma f(z)\,dz=$$

$$=\frac{\pi[\pi+2\ln a]}{\sqrt{2a}}+i\frac{2\pi^2}{\sqrt{2a}}.$$

Trecînd la limită în această relație pentru $\varepsilon\to 0$ și $R\to\infty$ și ținînd seama de faptul că

$$|zf(z)|=\left|\frac{z^{3/2}\ln z}{z^2+a^2}\right|\to 0 \text{ pentru } |z|\to\infty \text{ și deci}$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz=0$$

și analog

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_\gamma f(z)dz=0,$$

obținem.

$$2\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+a^2}\,dx+2\pi i\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi[\pi+2\ln a]+2\pi^2 i}{\sqrt{2a}},$$

de unde

$$\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi[\pi+2\ln a]}{2\sqrt{2a}};\quad\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{\sqrt{2a}}.$$

48. Să se calculeze integralele

$$I_1=\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^{1+a}}\,dx, \quad I_2=\int_0^\infty \frac{\ln|1-x|}{x^{1+a}}\,dx,$$

unde a este un număr real cuprins între 0 și 1.

R. Considerăm

$$\int_C \frac{\ln(1-z)}{z^{1+a}}\,dz$$

unde C este conturul din fig. II.48.

Funcția

$$f(z)=\frac{\ln(1-z)}{z^{1+a}}, \quad 0<a<1,$$

admite punctele $z=0$ și $z=1$ ca puncte critice.

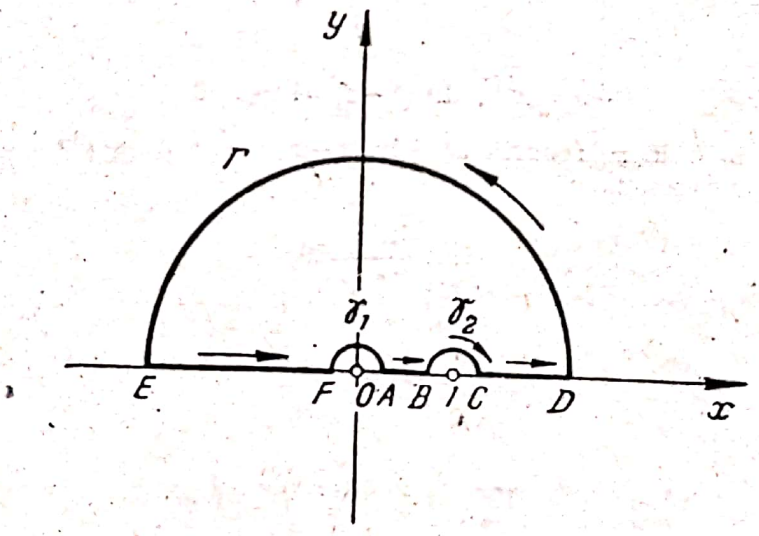


Fig. II.48

În domeniul interior conturului C alegem o determinare uniformă a funcției $f(z)$ și anume determinarea care ia valoarea reală pentru $z\neq x$, cu $0<x<1$. Cu această determinare în domeniul considerat funcția $f(z)$ este olomorfă.

Să determinăm valoarea $\ln(1-z)$ pe axa reală. Dacă punem $1-z=re^{i\theta}$, avem

pe AB: $r=1-x$, $\theta=0$, $\ln(1-z)=\ln r=\ln(1-x)$
pe CD: $r=x-1$, $\theta=-\pi$, $\ln(1-z)=\ln(x-1)-i\pi$;
pe EF: $r=|x|+1$, $\theta=0$, $\ln(1-z)=\ln(|x|+1)$.

De asemenea pentru z^{1+a} avem:

pe AB: $z^{1+a}=x^{1+a}$

pe CD: $z^{1+a}=x^{1+a}$

pe EF: $(\rho e^{i\pi})^{1+a}=-\rho^{1+a}e^{i\pi a}$ cu $\rho=|x|=-x$.

Conform teoremei lui Cauchy avem

$$\int_C \frac{\ln(1-z)}{z^{1+a}}\,dz=0.$$

Ținînd seama de forma conturului C, avem

$$\int_\Gamma f(z)dz+\int_{EF} f(z)dz+\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{AB} f(z)dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz+\int_{CD} f(z)dz=0.$$

Avem

$$|zf(z)|=\frac{|\ln(1-z)|}{|z|^a}.$$

Punînd

$$1-z=re^{i\theta},\quad \ln(1-z)=\ln r+i\theta,$$

cum θ variază de la 0 la π, rezultă că $|\ln(1-z)|$ este de același ordin de mărime cu $\ln r$ și deci ținînd seama că

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln r}{r^a}=0,$$

rezultă

$$\lim_{|z|\to\infty}|zf(z)|=0,$$

deci

$$\lim_{|z|\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz=0.$$

Analog se arată că

$$\lim_{|z|\to 0}\int_{\gamma_1} f(z)dz=0 \quad \text{și} \quad \lim_{|z-1|\to 0}\int_{\gamma_2} f(z)dz=0.$$

Cu aceasta relația (1) devine

$$-e^{-i\pi a}\int_0^\infty \frac{\ln(\rho+1)}{\rho^{1+a}}\,d\rho+\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x^{1+a}}\,dx+\int_1^\infty \frac{\ln(x-1)-i\pi}{x^{1+\alpha}}\,dx=0.$$

Avînd în vedere că $e^{-i\pi a}=\cos\pi a-i\sin\pi a$, rezultă

$$-\cos\pi a\int_0^\infty\frac{\ln(\rho+1)}{\rho^{1+a}}\,d\rho+\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x^{1+a}}\,dx+\int_1^\infty\frac{\ln(x-1)}{x^{1+a}}\,dx=0$$

și

$$\sin\pi a\int_0^\infty\frac{\ln(\rho+1)}{\rho^{1+a}}\,d\rho-\pi\int_1^\infty\frac{dx}{x^{1+a}}=0.$$

Dar $\int_1^\infty\frac{dx}{x^{1+a}}=\frac{1}{a}$, deci

$$\int_0^\infty\frac{\ln(x+1)}{x^{2+a}}\,dx=\frac{\pi}{a\sin\pi a};\qquad\int_0^\infty\frac{\ln|1-x|}{x^{1+a}}\,dx=\frac{\pi\cos\pi a}{a\sin\pi a}.$$

49. Să se calculeze integrala

$$I=\int_0^\pi\ln\sin\theta\,d\theta.$$

R. Această integrală poate fi calculată prin diverse procedee elementare. Pentru calcularea ei în planul complex vom considera funcția

$$f(z)=\frac{\ln z}{1-z}.$$

Această funcție are un pol simplu $z=1$ iar $z=0$ punct critic. Ea este olomorfă în vecinătatea lui $z=1$ și este uniformă în domeniul D simplu conex care nu conține punctul $z=0$. Considerăm domeniul D din fig. II.49, a limitat de curba Γ, constînd dintr-un arc de cerc γ cu centrul în $z=1$ și de rază 1 și cu cerc γ' cu centrul în 0 și de rază ε parcurs în sens negativ. (Deoarece ε este foarte mic, γ' poate fi considerat semicerc limitat de punctele A și B de afixe $i\varepsilon$ și $-i\varepsilon$).

În interiorul domeniului D, $f(z)$ este uniformă și convenim ca în punctul $z=\varepsilon$ situat pe γ', $f(z)$ să fie egală cu numărul real negativ $\frac{\ln\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Rezultă că pe porțiunea axei reale interioară domeniului D funcția $f(z)$ este reală. În particular

$$f(1)=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}=-\left(\frac{d}{dx}\ln x\right)_{x=1}=-1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Conform teoremei lui Cauchy

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz=\int_{\gamma} f(z)\,dz-\int_{\gamma'} f(z)\,dz=0.$$

Raportul

$|zf(z)|=\dfrac{|z|}{|1-z|}\,|\ln z|$ tinde către zero o dată cu $|z|$, deci

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma'}\frac{\ln z}{1-z}\,dz=0.$$

Pe cercul γ, dacă θ este argumentul lui z (fig. II.49, *b*)

$$|z|=2\cos\theta,$$

de unde $z=2\cos\theta\, e^{i\theta}=e^{2i\theta}+1$, cu $\dfrac{-\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$:

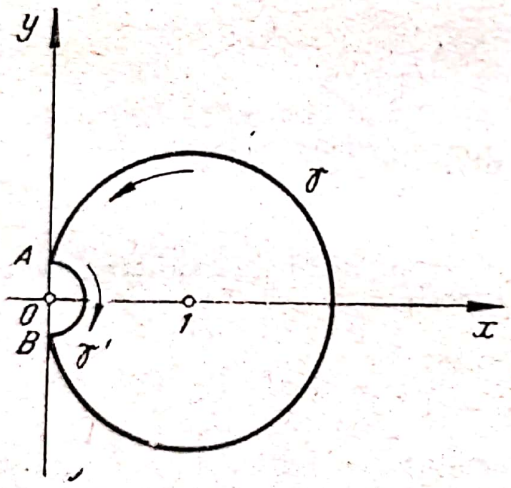


Fig. II.49, *a*

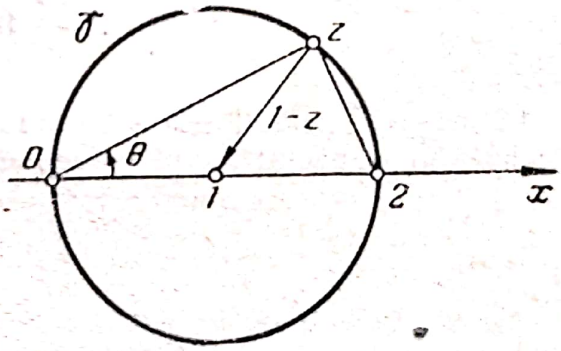


Fig. II.49, *b*

Funcția $\ln z=\ln(2\cos\theta)+i\theta$ este reală pe axa reală ($\theta=0$). Pe de altă parte

$$1-z=e^{-2i\theta}$$

și

$$\frac{dz}{1-z}=\frac{2ie^{-2i\theta}\,d\theta}{e^{-2i\theta}}=+2\,id\theta.$$

Deci

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z=+2i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\ln(2\cos\theta)+i\theta]\,\mathrm{d}\theta=0$$

sau

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\theta\mathrm{d}\theta+\pi\ln 2+i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\theta\mathrm{d}\theta=0.$$

Dar

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\theta\mathrm{d}\theta=0,$$

deci

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\theta\mathrm{d}\theta=-\pi\ln 2.$$

Înlocuind în ultima relație θ cu $\frac{\pi}{2}-\theta$, obținem

$$\int_{0}^{\infty}\ln\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=-\pi\ln 2.$$

50. Să se determine transformarea circulară care transformă
1° punctele $z_1=1$, $z_2=0$, $z_3=-1$ în punctele $Z_1=i$, $Z_2=1$, $Z_3=\infty$;
2° punctele $z_1=-i$, $z_2=0$, $z_3=i$ în punctele $Z_1=-1$, $Z_2=i$, $Z_3=1$.

R. 1° Fie

$$Z=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

transformarea circulară căutată.

Scriind că punctului $z_1=1$ îi corespunde punctul $Z_1=i$, obținem

$$\alpha+\beta=i(\gamma+\delta). \qquad (2)$$

Scriind că punctului $z_2=0$ îi corespunde punctul $Z_2=1$, iar punctului $z_3=-1$, îi corespunde punctul $Z_3=\infty$, obținem

$$\beta-\delta=0 \tag{2'}$$

și

$$\delta-\gamma=0. \tag{2''}$$

Din (1) cu condițiile (2), (2'), (2'') obținem transformarea

$$Z=\frac{(-1+2i)z+1}{z+1}.$$

Înlocuind aici $z=x+iy$, $Z=X+iY$, găsim

$$\left.\begin{aligned} X&=-\frac{2(x^2+y^2+y)-1}{(x+1)^2+y^2}\\ Y&=\frac{2(x^2+y^2-y)}{(x+1)^2+y^2}\end{aligned}\right\}$$

De aici deducem că cercului de ecuație

$$x^2+y^2+y-\frac{1}{2}=0 \tag{3}$$

din planul (z) îi corespunde în planul (Z) dreapta de ecuație $X=0$. Ecuația (3) se mai scrie $\left|z+\frac{i}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$. În interiorul cercului (3) avem $x^2+y^2+y-\frac{1}{2}<0$, deci cercului $\left|z+\frac{i}{2}\right|\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$ îi corespunde prin transformarea (1) semiplanul $\operatorname{Re} Z\geqslant 0$.

Cercului de ecuație

$$x^2+y^2-y=0 \tag{4}$$

din planul (z) îi corespunde în planul (Z) dreapta de ecuație $Y=0$. Scriind ecuația (4) sub forma $\left|z-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$, rezultă că cercului $\left|z-\frac{i}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$ îi corespunde prin transformarea [1] semiplanul $\operatorname{Im} Z\leqslant 0$, iar domeniului $\left|z-\frac{i}{2}\right|>\frac{1}{2}$ îi corespunde semiplanul $\operatorname{Im} Z<0$.

2°. Ținînd seama de faptul că o transformare omografică conservă raportul anarmonic, adică

$$\frac{Z-Z_1}{Z-Z_2}=\frac{Z_3-Z_1}{Z_3-Z_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}, \tag{5}$$

obținem, înlocuind în (5) datele problemei 2°, transformarea

$$Z=i\frac{1-z}{1+z}, \tag{6}$$

de unde deducem

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}\\ Y&=\frac{1-x^2-y^2}{(x+1)^2+y^2}\end{aligned}\right\}.$$

Pe cercul $|z|\leqslant 1$, avem $Y=0$, deci prin transformarea (6) cercului $|z|\leqslant 1$ îi corespunde semiplanul $\operatorname{Im} Z\geqslant 0$, iar semiplanului $y\geqslant 0$ îi corespunde semiplanul $\operatorname{Re} Z\geqslant 0$.

51. Să se determine transformarea conformă care transformă cercul $|z|=1$ în el însuşi.

R. Fie A (α) un punct interior cercului care se transformă în centrul cercului (fig. II.51), deci pentru $z=\alpha$ avem $Z=0$. Punctul $A'=\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)$, care este inversul lui A faţă de cercul $|z|=1$, se transformă în punctul de la infinit, deci pentru $z=\frac{1}{\bar{\alpha}}$ avem $Z=\infty$. Transformarea va fi deci de forma

$$Z=k\,\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\bar{\alpha}}}.$$

Dacă punctul $M(z)$ este pe cerc, atunci

$$\left|\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\bar{\alpha}}}\right|=|\alpha|,$$

deoarece

$$\frac{MA}{MA'}=\frac{AP}{A'P}=\frac{1-|\alpha|}{\left|\frac{1}{\bar{\alpha}}\right|-1}=|\alpha|.$$

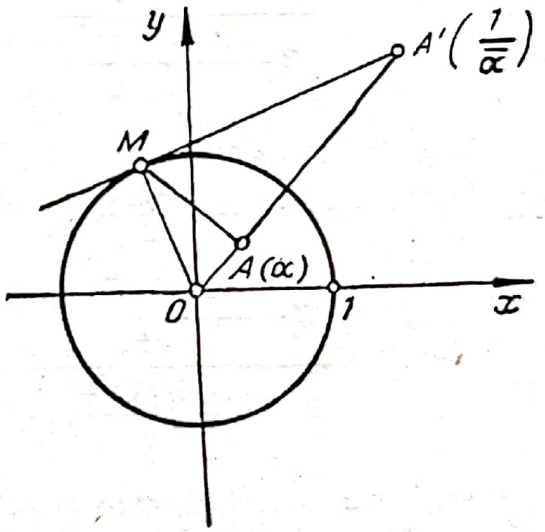


Fig. II.51

Punînd condiţia ca Z, transformatul lui $M(z)$, să fie pe cercul dat, trebuie să avem

$$|Z|=|\alpha k|=1,$$

deci

$$k\bar{\alpha}=e^{i(\varphi+\pi)}=-e^{i\varphi},\quad (\varphi \text{ real}),$$

de unde

$$Z=e^{+i\varphi}\,\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}.$$

52. Să se studieze transformarea circulară

$$Z=\frac{i-z}{i+z} \tag{1}$$

și să se arate că transformă primul cadran (z) în semicercul superior $|Z|<1$.

R. Pentru a determina punctele unite ale transformării (1) facem în ecuația (1) $Z=z$ și obținem ecuația

$$z^2+(1+i)\,z-i=0$$

cu soluțiile

$$z_1=\frac{(1+i)\,(\sqrt{3}-1)}{2},\quad z_2=-\frac{(1+i)\,(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

Deci z_1 și z_2 sînt punctele unite ale transformării (1).

Transformarea (1) are forma canonică

$$\frac{Z-\dfrac{(1+i)\,(\sqrt{3}-1)}{2}}{Z+\dfrac{(1+i)\,(\sqrt{3}+1)}{2}}=k\,\frac{z-\dfrac{(1+i)\,(\sqrt{3}-1)}{2}}{z+\dfrac{(1+i)\,(\sqrt{3}+1)}{2}}.$$

Înlocuind în această ecuație pe Z cu valoarea dată de (1), determinăm valoarea lui k și anume $k=-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$, deci forma canonică a transformării (1) este

$$\frac{Z-\dfrac{(1+i)\,(\sqrt{3}-1)}{2}}{Z+\dfrac{(1+i)\,(\sqrt{3}+1)}{2}}=-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{z-\dfrac{(1+i)\,(\sqrt{3}-1)}{2}}{z+\dfrac{(1+i)\,(\sqrt{3}+1)}{2}}.$$

Avem $|k|=1$, deci transformarea (1) este eliptică.

În ecuația (1) înlocuind $z=x+iy$ și $Z=X+iY$, avem

$$X+iY=\frac{1-x^2-y^2+2ix}{x^2+(1+y)^2},$$

de unde

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{1-x^2-y^2}{x^2+(1+y)^2}\\ Y&=\frac{2x}{x^2+(1+y)^2}\end{aligned}\right\}$$

De aici deducem că dreptei $x=0$ îi corespunde dreapta $Y=0$, iar cercului de ecuație

$$x^2+y^2-1=0 \tag{3}$$

din planul (z) îi corespunde în planul (Z) dreapta de ecuație $X=0$.

Ecuația (3) se mai scrie $|z|=1$. În interiorul cercului (3) avem $x^2+y^2<1$, deci cercului plin $|z|\leqslant 1$ îi corespunde prin transformarea (1) semiplanul $\operatorname{Re} Z\geqslant 0$.

Se poate arăta că această transformare transformă axa reală $y=0$ în cercul unitate. Pentru verificare este suficient să arătăm că trei puncte particulare ale axei reale, de exemplu 0, 1, ∞, se transformă în puncte de pe cerc, în cazul nostru în 1, i, -1. Semiplanul superior este transformat în discul $|Z|<1$, deoarece $z=i$ este transformat în $Z=0$. Pentru un punct z din primul cadran avem $x>0$ și $y>0$, deci $Y>0$. Rezultă deci că primul cadran se transformă în semidiscul superior $|Z|<1$.

53. Să se studieze transformarea

$$Z=\frac{1}{z+i}. \tag{1}$$

R. Făcînd în ecuația (1) $Z=z$, determinăm punctele unite ale transformării. Obținem astfel $z_1=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$, $z_2=-\frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

Notînd $Z=X+iY$, $z=x+iy$, din (1) deducem

$$X=\frac{x}{x^2+(1+y)^2},\quad Y=-\frac{1+y}{x^2+(1+y)^2}. \tag{2}$$

Din aceste ecuații rezultă că axei imaginare din planul (z) îi corespunde în planul (Z) axa imaginară, iar dreptei $y=-1$ din planul (z) îi corespunde în planul (Z) axa reală.

Să considerăm cercul de ecuație

$$X^2+Y^2+Y\leqslant 0. \tag{3}$$

Înlocuind aici pe X și Y din (2), obținem

$$-y[(1+y)^2+x^2]\leqslant 0.$$

Deci funcția (1) transformă semiplanul $y\geqslant 0$ în cercul de ecuație (3).

Dreptei de ecuație $x-y+1=0$ din planul (z) îi corespunde în planul (Z) prima bisectoare iar dreptei $x-y-1=0$ îi corespunde în planul (Z) bisectoarea a doua.

54. Să se studieze transformarea circulară

$$Z=\frac{(i-3)\,z-2i}{2z-1+3i}. \tag{1}$$

R. Pentru a determina punctele unite ale transformării să facem în (1), $Z=z$ și obținem ecuația

$$z^2+(1+i)\,z+i=0,$$

care are rădăcinile -1 și $-i$.

Deci, punctele unite ale transformării (1) sînt $z_1=-1$, $z_2=-i$.
Forma canonică a transformării este

$$\frac{Z+1}{Z+i}=k\,\frac{z+1}{z+i}.$$

Înlocuind aici pe Z cu valoarea dată de (1), obținem $k=\frac{1}{3}$, deci transformarea este hiperbolică. Forma canonică a transformării (1) este

$$\frac{Z+1}{Z+i}=\frac{1}{3}\cdot\frac{z+1}{z+i}.$$

Înlocuind în (1) pe $Z=Y+iY$ și $z=x+iy$, obținem

$$\left.\begin{aligned} X&=-3\,\frac{2\,(x^2+y^2)-5\,x+4\,y+2}{(2\,x-1)^2+(2\,y+3)^2}\\ Y&=2\,\frac{x^2+y^2-2\,x+3\,y-1}{(2\,x-1)^2+(2\,y+3)^2}\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Din prima ecuație (2) rezultă că cercului de ecuație

$$2\,(x^2+y^2)-5\,x+4\,y+2=0$$

din planul (z) îi corespunde axa imaginară din planul (Z). Ecuația acestui cerc se poate scrie $\left|z-\frac{5}{4}+i\right|=\frac{5}{4}$. În interiorul acestui cerc avem $2\,(x^2+y^2)-5\,x+4\,y+2<0$, deci domeniului $\left|z-\frac{5}{4}+i\right|\leqslant\frac{5}{4}$ din planul (z) îi corespunde semiplanul $\operatorname{Re} Z\geqslant 0$ din planul (Z).

Din a doua ecuație (2) rezultă că cercului de ecuație

$$x^2+y^2-2\,x+3\,y-1=0$$

din planul (z) îi corespunde în planul (Z) axa reală. Ecuația acestui cerc se mai scrie $\left|z-1+\frac{3}{2}i\right|=\frac{\sqrt{17}}{2}$, deci domeniului $\left|z-1+\frac{3}{2}i\right|\leqslant\frac{\sqrt{17}}{2}$ din planul (z) îi corespunde în planul (Z) semiplanul $\operatorname{Im} Z\leqslant 0$.

Inversînd ecuația (1), obținem transformarea

$$z=\frac{(1-3i)\,Z-2\,i}{2\,Z+3-i},$$

de unde rezultă că transformarea inversă transformării (2) este

$$\left.\begin{aligned} x&=-2\,\frac{X^2+Y^2+3\,X+6\,Y-1}{(2\,X+3)^2+(2\,Y-1)^2}\\ y&=2\,\frac{3\,(X^2+Y^2)+2\,X-3\,Y-3}{(2\,X+3)^2+(2\,Y-1)^2}\end{aligned}\right\}\qquad(2')$$

Din prima ecuație (2′) rezultă că cercului de ecuație

$$X^2+Y^2+3X+6Y-1=0$$

din planul (Z) îi corespunde în planul (z) axa imaginară. Scriem ecuația acestui cerc sub forma $\left|Z+\frac{3}{2}+3i\right|=\frac{7}{2}$, deci domeniului $\left|Z+\frac{3}{2}+3i\right|\leqslant\frac{7}{2}$ din planul (Z) îi corespunde în planul (z) semiplanul $\operatorname{Re} z\geqslant 0$.

Din a doua ecuație (2′) deducem că cercului de ecuație

$$3(X^2+Y^2)+2X-3Y-3=0$$

din planul (Z) îi corespunde axa reală din planul (z). Scriind ecuația acestui cerc sub forma $\left|Z+\frac{1}{3}-\frac{i}{2}\right|=\frac{7}{6}$, deducem că domeniului $\left|Z+\frac{1}{3}-\frac{i}{2}\right|\leqslant\frac{7}{6}$ din planul (Z) îi corespunde în planul (z) semiplanul $\operatorname{Im} z\leqslant 0$.

55. Să se studieze transformarea

$$Z=\cos z.$$

R. Deci vom studia transformarea $Z=\cos z$ a cărei derivată se anulează pentru toți z multiplii întregi de π. Scriem

$$Z=\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}).$$

Această transformare este deci compusă din două transformări

$$w=e^{iz} \text{ și } Z=\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right).$$

Vom studia transformarea reciprocă: dacă se dă Z arbitrar, îi corespund două valori ale lui W, rădăcini ale ecuației

$$w^2-2Zw+1=0.$$

Rădăcinile sînt distincte dacă $Z\neq\pm 1$; fiecărei din aceste rădăcini îi corespund o infinitate de valori ale lui z, deduse una din alta prin adăugarea unui multiplu întreg arbitrar de 2π. Punînd $z=x+iy$, $Z=X+iY$, avem

$$X=\operatorname{ch} y\cos x,\quad Y=-\operatorname{sh} y\sin x.$$

Dacă fixăm y, punctul (X, Y), cînd x variază, descrie elipsa

$$\frac{X^2}{\operatorname{ch}^2 y}+\frac{Y^2}{\operatorname{sh}^2 y}=1$$

(descrisă o dată dacă x variază într-un interval de lungime 2π).

Dacă fixăm x, punctul (X, Y), cînd y variază, descrie o dată una din cele două ramuri ale hiperbolei

$$\frac{X^2}{\cos^2 x}-\frac{Y^2}{\sin^2 x}=1.$$

Pentru a studia variația lui Z în funcție de z, este suficient, din cauza periodicității, să facem ca x să varieze între $-\pi$, π și y de la $-\infty$ la $+\infty$. Dacă schimbăm pe z cu $-z$, Z nu se schimbă, deci vom face ca x să varieze de la 0 la π. Dacă schimbăm y cu $-y$ fără a schimba x, X nu se schimbă iar Y devine $-Y$; deci la două puncte z_1 și z_2 simetrice în raport cu axa reală le corespund două puncte Z_1 și Z_2 simetrice în raport cu axa reală. Astfel este suficient să facem ca x să ia valori între 0 și π iar y între 0 și $+\infty$, fie deci domeniul

$$(D):\ 0<x<\pi,\quad y>0.$$

Dacă $x=0$ și y descrește de la $+\infty$ la 0, Z rămîne pe axa reală și descrește de la $+\infty$ la $+1$.

Dacă $y=0$ și x crește de la 0 la π, Z rămîne pe axa reală și descrește de la $+1$ la -1.

Dacă $x=\pi$ și y crește de la 0 la $+\infty$, Z rămîne pe axa reală și descrește de la -1 la $-\infty$.

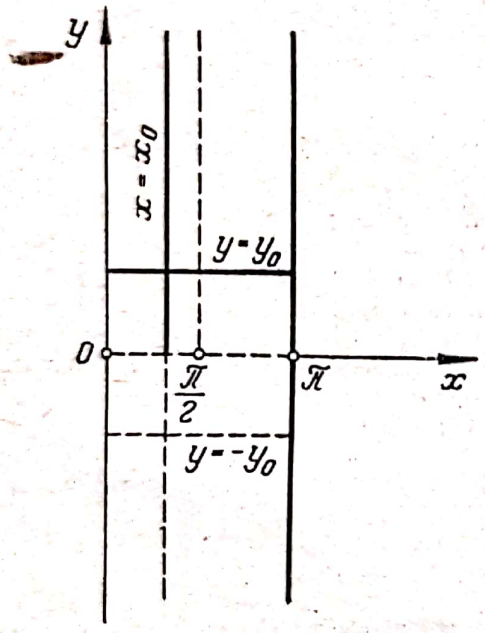


Fig. II.55, *a*

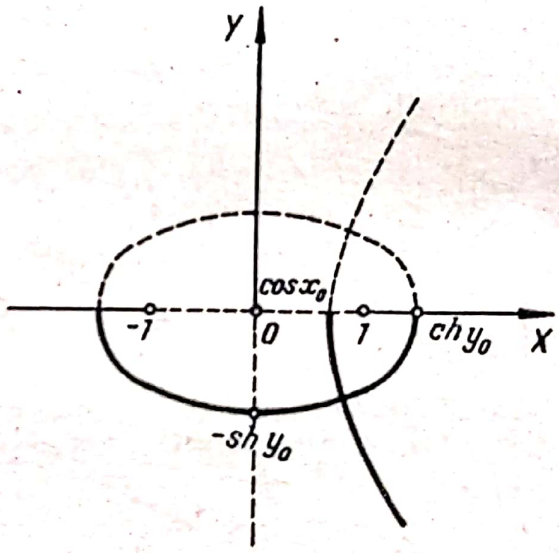


Fig. II.55, *b*

Dacă punctul z descrie un segment $y=y_0$ (>0), x crescînd de la 0 la π, punctul Z descrie o singură dată o semielipsă de focare ± 1, situată în semiplanul $\operatorname{Im} Z<0$, avînd drept axă mare $\operatorname{ch} y_0$ iar ca axă mică $\operatorname{sh} y_0$.

Dacă punctul z descrie o semidreaptă $x=x_0$ cu $0<x_0<\pi$, cu y crescînd de la 0 la $+\infty$, iar Z descrie o singură dată un semibraț al hiperbolei de focare ± 1 situat în semiplanul $\operatorname{Im} Z<0$, de axe $|\cos x_0|$ și $\sin x_0$.

Banda $0<x<\pi$, $(-\infty<y<+\infty)$ (fig. II.55, *a*) se transformă, în planul (Z) cu tăieturile $(-\infty, -1]$ și $[1, +\infty)$ situate pe axa reală (fig. II.55, *b*).

În ceea ce privește unghiurile, se observă că transformarea $Z=\cos z$ în interiorul lui D păstrează unghiurile; ea transformă paralelele la axele de coordonate din planul (z) în elipse și hiperbole omofocale.

56. Să se studieze transformarea conformă

$$Z=k\ln\frac{z-a}{z+a}.$$

R. Transformarea se mai scrie

$$\frac{z-a}{z+a}=e^{X/k}\,e^{iY/k}.$$

Egalînd modulele și argumentele, obținem

$$\left(x+a\coth\frac{X}{k}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{\operatorname{sh}^2 X/k}, \qquad (C_1)$$

$$x^2+\left(y-a\operatorname{cotg}\frac{Y}{k}\right)^2=\frac{a^2}{\sin^2 Y/k}, \qquad (C_2)$$

ecuații care reprezintă două familii de cercuri ortogonale (fig. II.56). Pentru un același cerc (C_2), valorile parametrului $\frac{Y}{k}$ diferă cu π dacă se trece de la arcul superior

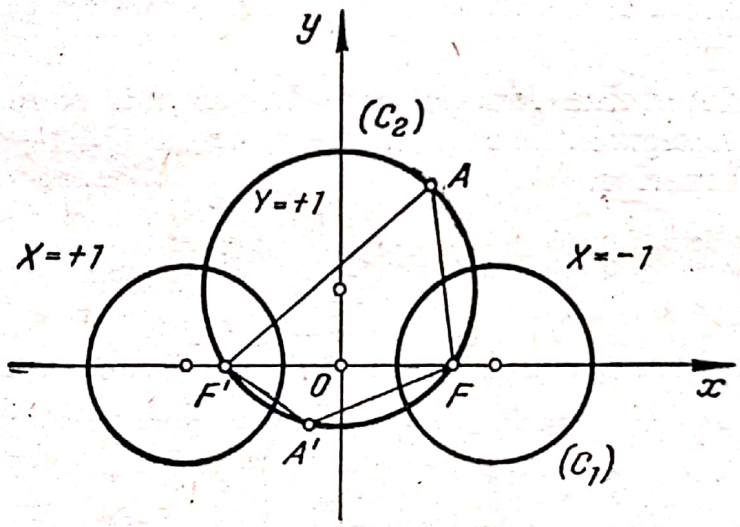


Fig. II.56

AMA' la arcul inferior $A'M'A$, deci ecuația segmentului AA' este $Y=\pi$, iar ecuația axei absciselor din care s-a scos acest segment este $Y=0$ și $\frac{Y}{k}=\pi-\measuredangle AM'A'$ pentru arcul inferior al cercului (C_1) și $\frac{X}{k}=\ln\frac{MA}{MA'}$.

Cercurile (C_2) situate la dreapta corespund valorilor negative ale lui X și reciproc.

Dacă se consideră X ca funcție potențială, ecuațiile de mai sus ne dau liniile de forță și liniile de nivel ale cîmpului creat de două suprafețe electrizate, în formă de cilindri drepți cu bazele circulare, cu axe paralele, la distanța $2d$. Presupunînd razele egale cu R, se poate determina capacitatea C pe unitatea de lungime a condensatorului format de aceste două suprafețe.

Dacă se consideră X potențialul cilindrului din stînga, $-X$ va fi potențialul cilindrului din dreapta și $2X$ diferența de potențial; avem

$$a \operatorname{coth} \frac{X}{k} = d, \quad \frac{a}{\operatorname{sh} \frac{X}{k}} = R,$$

unde

$$X = k \operatorname{argch} \frac{d}{R}.$$

Dacă în jurul cilindrului are loc o rotație, Y variază cu $2k\pi$. Deci sarcina unitară este $q = 2k\pi\varepsilon$ și

$$C \frac{q}{2X} = \frac{\pi\varepsilon}{\operatorname{argch} \frac{d}{R}} = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{d}{R} + \sqrt{\frac{d^2}{R^2} - 1}\right)}.$$

În cazul în care cilindrii conductori se reduc la fire rectilinii de diametru neglijabil, formulele precedente dau cîmpul electric creat de două fire paralele, la distanța $2a$ sau de un fir paralel cu un plan conductor infinit ($X = 0$) între care este distanța a.

57. Să se determine funcția care transformă conform planul (z) din care s-a scos segmentul care unește punctele $z_1 = 1 + i$ și $z_2 = -3 - i$ în semiplanul superior.

R. Vom considera funcția

$$u = \alpha \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

care transformă punctele z_1 și z_2 în punctele $u = 0$ și $u = \infty$. Punînd condiția ca punctului $\frac{z_1 + z_2}{2}$ să-i corespundă punctul $u = 1$, segmentul $z_1 z_2$ se va transforma în semiaxa reală pozitivă. Avem

$$1 = \alpha \frac{\frac{z_1 + z_2}{2} - z_1}{\frac{z_1 + z_2}{2} - z_2},$$

de unde $\alpha = -\frac{3}{5}$; deci, funcția

$$u = \frac{3}{5} \frac{-z + 1 + i}{z + 3 + i} \tag{1}$$

transformă planul (z) din care s-a scos segmentul $z_1 z_2$ în planul (u) din care am scos semiaxa reală pozitivă.

Considerăm acum funcția

$$Z=\sqrt{u}, \tag{2}$$

unde pentru radical se ia determinarea pozitivă.

În planul (u) din care s-a scos semiaxa reală pozitivă această funcție este uniformă.

Cu notația $u=\rho e^{i\theta}$ avem $Z=\rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}$, sau dacă notăm $\rho_1=\rho^{1/2}$, $\theta_1=\frac{\theta}{2}$,

$$Z=\rho_1 e^{i\theta_1}.$$

Dacă $0<\theta<2\pi$, avem $0<\theta_1<\pi$, deci unui punct din planul (u) din care s-a scos semiaxa reală pozitivă îi corespunde un punct din semiplanul superior al planului (Z).

Din (1) și (2) rezultă

$$Z=\sqrt{\frac{3}{5}\,\frac{-z+1+i}{z+3+i}},$$

unde pentru radical se consideră determinarea pozitivă. Această funcție realizează transformarea cerută.

58. Să se determine funcția care transformă domeniul $|z-a|>a$, $|z-b|<b$, $y>0$ cu $0<a<b$ în semiplanul superior.

R. Funcția

$$u=\frac{z-2a}{z} \tag{1}$$

transformă punctul $z=0$ în $u=\infty$, iar $z=2a$ în $u=0$. Avem

$$u_1=\frac{x^2+y^2-2ax}{x^2+y^2},\quad u_2=\frac{2ay}{x^2+y^2},\quad (u=u_1+iu_2).$$

Pentru orice punct din domeniul dat (fig. II.58, *a*) avem $u_1>0$ și $u_2>0$, deci prin această funcție domeniul dat se transformă în semibanda de lățime $\frac{b-a}{b}$ situată în primul cadran (fig. II.58, *b*).

Funcția

$$v=\frac{\pi b}{b-a}u \tag{2}$$

transformă semibanda din fig. II.58, *b* în semibanda de lățime π din primul cadran (fig. II.58, *c*), iar funcția

$$w=v-\frac{\pi}{2}, \tag{3}$$

transformă semibanda din fig. II.58, *c* în semibanda din semiplanul superior de lățime π cu $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, fig. II.58, *d*.

Pentru a transforma domeniul din fig. II.58, *d* în semiplanul Im $Z>0$, (fig. II.58, *e*) vom considera problema inversă. Să determinăm funcția care reprezintă conform

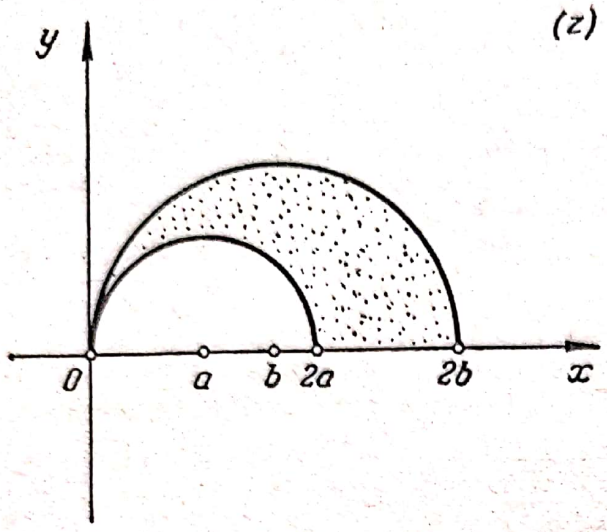


Fig. II.58, *a*

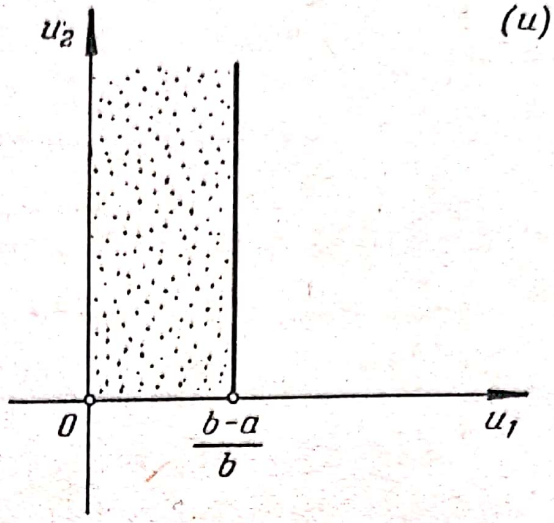


Fig. II.58, *b*

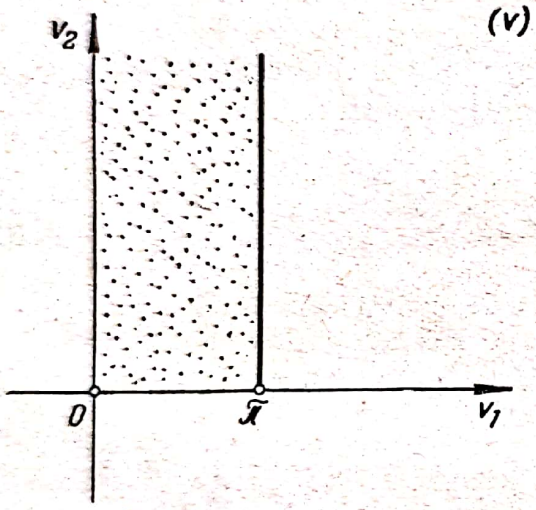


Fig. II.58, *c*

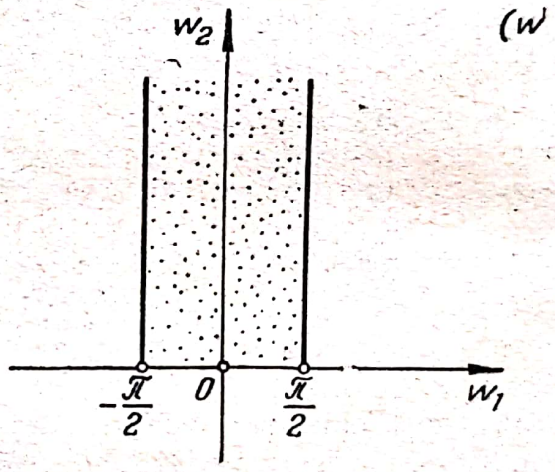


Fig. II.58, *d*

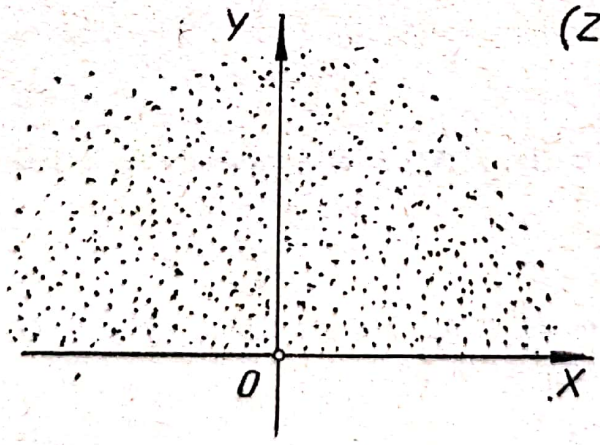


Fig. II.58, *e*

Scanned with OKEN Scanner

domeniul $\operatorname{Im} Z>0$ pe domeniul $w_2>0$, $-\frac{\pi}{2}<w_1<\frac{\pi}{2}$ din planul variabilei (w) cu condiţia ca punctele de la infinit din cele două plane să se corespundă iar punctelor $Z=\pm 1$ să le corespundă punctele $w=\pm\frac{\pi}{2}$. Vom utiliza formula lui Schwartz-Christoffel cu $Z_1=-1$, $Z_2=1$, $Z_3=\infty$ şi $a_1=a_2=\frac{1}{2}$. Avem

$$w=C\int_{Z_0}^{Z}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-1}}=-iC\int_{Z_0}^{Z}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}},$$

de unde

$$w=-iC\arcsin Z+iC\arcsin Z_0$$

sau

$$w=C_1\arcsin Z+C_2.$$

Vom considera ramura funcţiei $\arcsin Z_0$ care ia valori reale cuprinse în intervalul $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ cînd $Z=X\in[-1,\ 1]$.

Determinăm constantele C_1 şi C_2 folosind corespondenţa dată, deci

$$-\frac{\pi}{2}=C_1\left(-\frac{\pi}{2}\right)+C_2,\quad \frac{\pi}{2}=C_1\frac{\pi}{2}+C_2,$$

de unde $C_1=1$, $C_2=0$.

Rezultă funcţia

$$w=\arcsin Z.$$

Funcţia care transformă semibanda $\operatorname{Im} w>0$, $-\frac{\pi}{2}<w_1<\frac{\pi}{2}$ în semiplanul superior va fi deci

$$Z=\sin w. \tag{4}$$

Ţinînd seama de funcţiile (1), (2), (3) şi (4), rezultă funcţia cerută în problemă

$$Z=-\cos\frac{\pi b(z-2a)}{z(b-a)}.$$

59. Să considerăm în planul complex (z) un sector circular S situat în interiorul cercului unitate, a cărui frontieră este definită în coordonate polare prin

$$\theta=0,\quad 0\leqslant r\leqslant 1,$$
$$r=1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},$$
$$\theta=\frac{\pi}{3},\quad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

Considerăm în interiorul lui S un patrulater curbiliniu Q ale cărui laturi sînt definite prin

$$\begin{aligned} &r_1 \leqslant r \leqslant r_2, && \theta=\theta_1,\\ &r_1 \leqslant r \leqslant r_2, && \theta=\theta_2,\\ &r=r_1, && \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2,\\ &r=r_2, && \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2, \end{aligned}$$

cu

$$0<\theta_1<\theta_2<\frac{\pi}{3}, \quad 0<r_1<r_2<1.$$

Să se determine figura transformată a lui Q (fig. II.59, *a*) prin transformările:

$$1^\circ\ u=z^6;\ 2^\circ\ Z=\frac{1-u}{1+u}=\frac{1-z^6}{1+z^6};\ 3^\circ\ v=z^3;$$

$$4^\circ\ w=\frac{1-v}{1+v}=\frac{1-z^3}{1+z^3};\quad 5^\circ\ Z=iw^2=i\left(\frac{1-z^3}{1+z^3}\right)^2.$$

R. 1° Transformarea $u=z^6$ transformă Q în patrulaterul analog Q' definit prin

$$\rho_1 \leqslant r \leqslant \rho_2,\ \theta=\varphi_1 \text{ și } \theta=\varphi_2,$$
$$\varphi_1 \leqslant \theta \leqslant \varphi_2,\ r=\rho_1 \text{ și } r=\rho_2$$

cu

$$\rho_1=r_1^6,\ \rho_2=r_2^6,\ \varphi_1=6\theta_1,\ \varphi_2=6\theta_2,$$

unde ρ_1 este mic iar ρ_2 este apropiat de 1, φ_1 este mic iar φ_2 este apropiat de 2π (fig. II.59, *b*).

2° Transformarea $Z=\dfrac{1-z^6}{1+z^6}$ este produsul transformărilor

$$u=z^6 \text{ și } Z=\frac{1-u}{1+u}.$$

Ultima este o transformare omografică. Avem

$$Z=\frac{(1-u)\,(1+\bar{u})}{|1+u|^2}=\frac{1-|u|^2}{|1+u|^2}+\frac{\bar{u}-u}{|1+u|^2}.$$

Dacă $|u|<1$, $\operatorname{Re} Z>0$. Dacă $|u|>1$, $\operatorname{Re} Z<0$.

Interiorul cercului unitate este transformat în semiplanul $\operatorname{Re} Z>0$.

Dacă u descrie axa reală, Z descrie axa reală.

Dacă u descrie cercul γ de centru 0 și raza r, Z descrie un cerc Γ ortogonal axei reale, trecînd prin punctele

$$Z=\frac{1-r}{1+r},\ (u=r) \text{ și } Z=\frac{1+r}{1-r},\ (u=-r).$$

Dacă u descrie o semidreaptă, trecînd prin origine, Z descrie un arc de cerc ortogonal cu cercul Γ trecînd prin punctele

$$Z=1,\ (u=0),\ Z=-1,\ (u=\infty).$$

În fig. II.59, *c* avem imaginea Q'' a lui Q'.

Pentru a determina imaginea frontierei sectorului circular S, observăm că $z=0$ pentru $Z=1$.

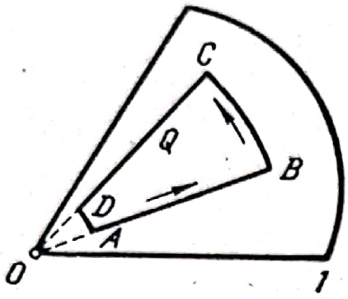


Fig. II.59, *a*

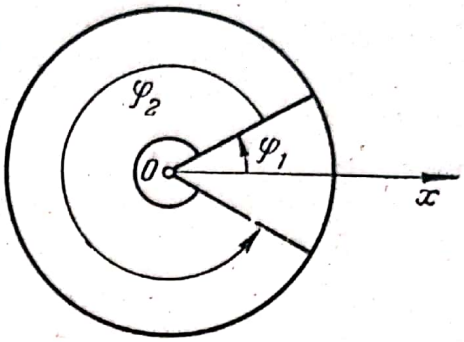


Fig. II.59, *b*

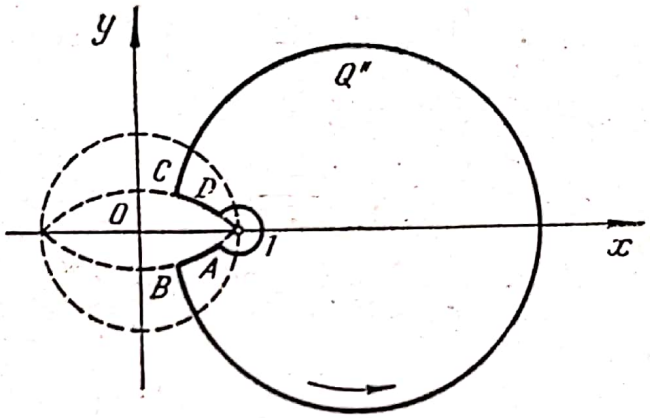


Fig. II.59, *c*

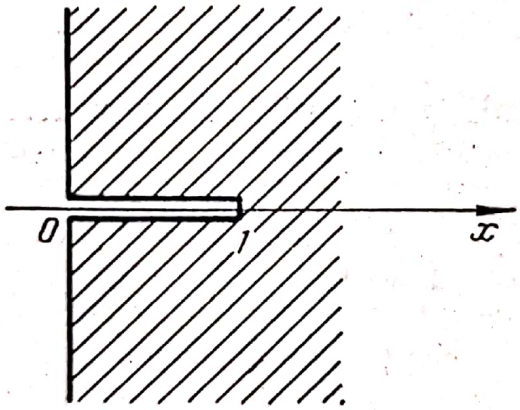


Fig. II.59, *d*

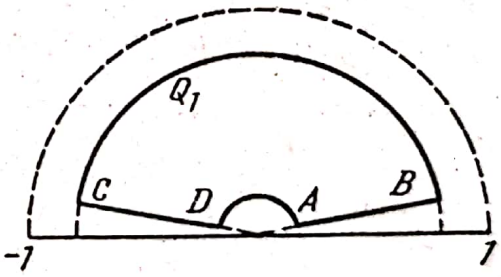


Fig. II.59, *e*

Cercul $|z| = 1$ se transformă în axa imaginară.

Dreptele $\theta = 0$ și $\theta = \frac{\pi}{3}$ au imaginile pe axa reală.

Imaginea lui S este deci semiplanul (fig. II.59, *d*).

$\operatorname{Re} Z > 0$ cu tăietura $(0, 1)$.

3° Transformarea $v = z^3$ transformă domeniul Q în Q_1 reprezentat în fig. II.59, *e*.

4° Transformarea

$$w=\frac{1-v}{1+v}=\frac{1-z^3}{1+z^3}$$

a fost studiată la 2°; ea transformă Q_1 în patrulaterul Q_2 situat într-un sfert de plan, atunci Q'' este situat în semiplanul din dreapta.

5° Fie transformarea

$$Z=iw^2=i\left(\frac{1-z^3}{1+z^3}\right)^2.$$

Dacă argumentul lui w este cuprins între $-\frac{\pi}{2}$ și 0, cel al lui w^2 este cuprins între $-\pi$ și 0 iar cel al lui Z între $-\frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$. Transformarea $Z=iw^2$ transformă sfertul de plan ocupat de Q_2 în semiplanul $\operatorname{Re}(z)>0$.

Prin transformarea

$$Z=i\left(\frac{1-z^3}{1+z^3}\right)^2$$

se trece deci la sectorul inițial S din semiplanul $\operatorname{Re}(z)>0$.

Frontiera lui S se transformă astfel:

$$z=0 \text{ în } Z=i,$$

$|z|=1$ în partea negativă a axei imaginare,

segmentul (0, 1) al axei reale în segmentul (0, 1) al axei imaginare,

segmentul (0, 1) al dreptei $Q=\frac{\pi}{3}$ în segmentul (0,1) al axei imaginare.

60. Să se reprezinte domeniul din fig. II.60, *a* pe semiplanul superior.

R. Vîrfurile A_1 și A_2 se găsesc la infinit. Unghiul din A_2 se obține luînd unghiul pe care-l fac între ele dreptele A_1A_2 și A_2A_3 cu semnul minus, deci $\alpha_2=-\alpha$. Pentru unghiul din A_1 avem $\alpha_1=-(1-\alpha)$ iar pentru unghiul din A_3 avem evident $\alpha_3=2$. Condiția geometrică $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3-2=1$ este verificată.

Luînd în planul (z) punctele $z_1=0$, $z_2=\infty$, $z_3=-1$ de pe axa reală (fig. II.60, *b*) corespunzătoare vîrfurilor A_1, A_2, A_3 ale poligonului și ținînd seama de valorile unghiurilor și de faptul că pentru $z=-1$ va trebui să avem $Z=ih$, rezultă $z_0=-1$ iar formula lui Schwartz-Christoffel devine

$$Z=C\int_{-1}^{z} z^{\alpha-2}(1+z)\,dz+ih \tag{1}$$

unde C este o constantă care urmează a fi determinată.

C nu depinde de α și β, deci o vom determina pentru $\alpha=\beta=0$:

$$Z=C\int_{-1}^{z}\frac{z+1}{z^2}\,dz+ih=C\left(\ln z-i\pi-\frac{1}{z}+1\right)+ih.$$

Dacă z descrie semiaxa reală pozitivă, Z descrie toată axa reală. Deci pentru $z>0$ real, Z este real. Cu notația $C=C_1+iC_2$ avem

$$(C_1+iC_2)\left(\ln\rho-i\pi-\frac{1}{x}+1\right)+ih=\text{real},$$

deci

$$iC_2\left(\ln\rho-\frac{1}{x}+1\right)-i\pi C_1+ih\equiv 0,$$

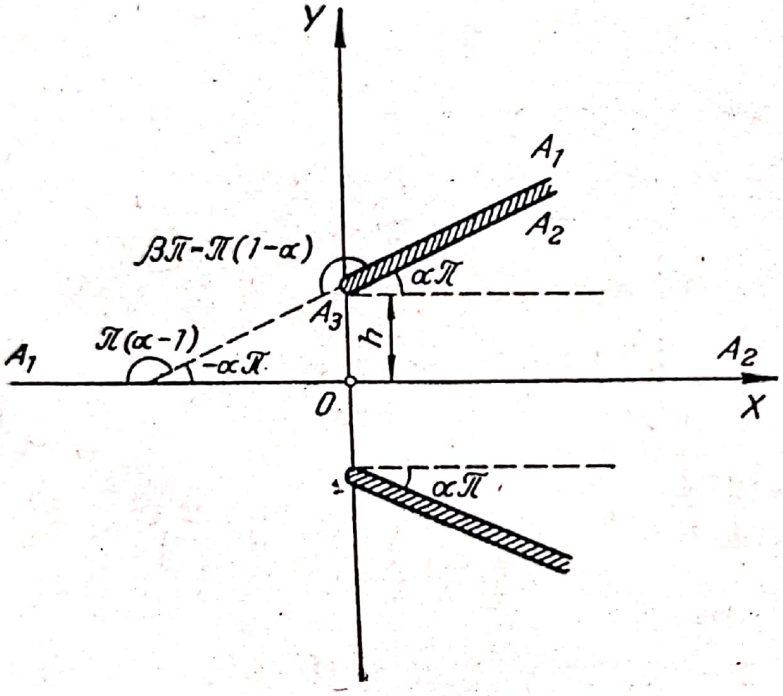


Fig. II.60, *a*

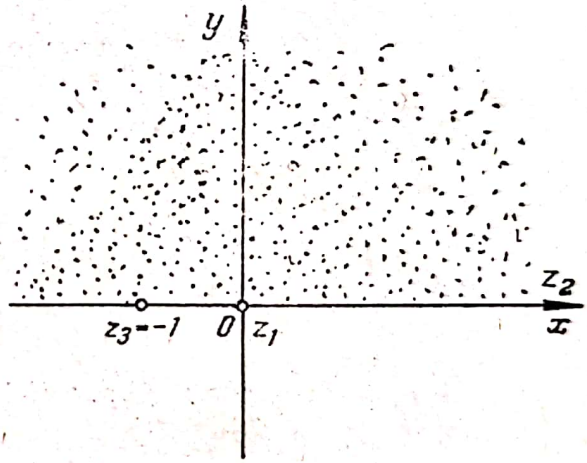


Fig. II.60, *b*

Pentru $\rho>0$ găsim $C_2=0$, $C_1=\frac{h}{\pi}$. Cu acesta (1) devine

$$z=\frac{h}{\pi}\int_{-1}^{z} z^{\alpha-2}(1+z)\,dz+ih=\frac{h}{\pi}z^{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{z(\alpha-1)}\right]-\frac{h}{\pi}\left[\frac{(-1)^{\alpha}}{\alpha}+\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha-1}\right]+ih=$$

$$=\frac{h}{\pi}z^{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{z(\alpha-1)}\right]+\frac{h}{\pi}\frac{e^{i\pi\alpha}}{\alpha(\alpha-1)}+ih.$$

Funcția obținută este olomorfă în domeniul care conține segmentul de pe axa reală, pe care este reală. În puncte simetrice față de axa reală situate în domeniul de olomorfie, funcția ia valori complex conjugate.

61. Să se reprezinte pe semiplanul superior domeniul din fig. II.61.

R. În acest caz unghiul din A_1 se obține luînd unghiul pe care-l fac între ele dreptele A_1A_5 și A_1A_2, deci $\alpha_1=0$. Analog se găsesc $\alpha_3=\alpha_5=0$ și $\alpha_2=\alpha_4=\frac{3}{2}$.

Deoarece trei parametri pot fi luați în mod arbitrar, aceasta fiind în concordanță cu faptul că reprezentarea conformă este complet determinată dacă se dă corespondența a trei puncte de pe contururi, alegem $z_1=-a$, $z_2=-1$, $z_3=-b$, $z_4=0$, $z_5=\infty$.

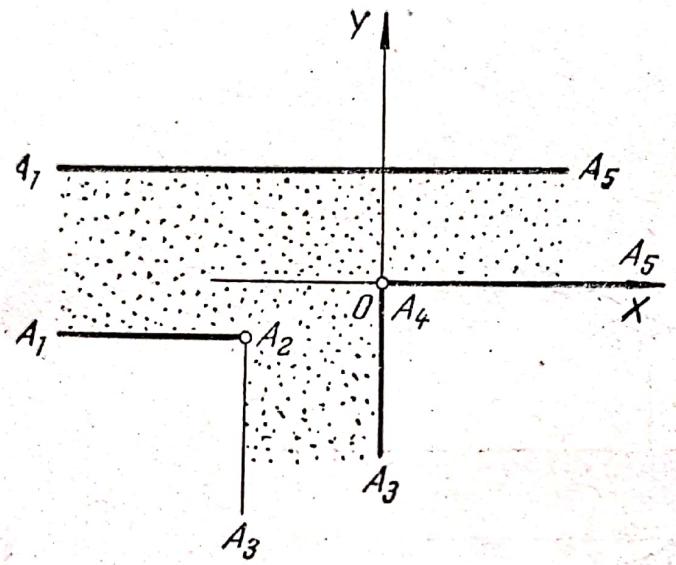


Fig. II.61

Formula lui Schwarz-Christoffel devine

$$Z=C\int_0^z (z+a)^{-1}(z+1)^{\frac{1}{2}}\,(z+b)^{-1}\,z^{\frac{1}{2}}\,dz \qquad (1)$$

cu a, b, C constante nedeterminate.

Pentru determinarea lui C vom integra pe un semicerc γ_R cu centrul în $z=0$ de rază infinită. Alegînd pe (z_4, z_5) determinarea aritmetică a radicalului, avem

$$\frac{\sqrt{z(z+1)}}{(z+a)\,(z+b)}=\frac{1}{z}+\frac{ab-(a+b)}{4}\,\frac{1}{z^2}+\cdots$$

iar conform cu teorema reziduurilor

$$C\int_{\gamma_R}\frac{\sqrt{z(1+z)}}{(z+a)\,(z+b)}\,dz=-\pi iC+o\left(\frac{1}{R}\right),$$

unde $o\left(\frac{1}{R}\right)\to 0$ cînd $R\to\infty$.

Dar ocolind $z=0$ pe semicercul γ_R în sens direct, îi corespunde în planul (Z) trecerea de pe dreapta A_1A_5 pe dreapta A_4A_5, adică o variaţie aproximativ egală $-ih_3$, deci la limită pentru $R\to\infty$

$$-i\pi C=-ih_3,\quad C=\frac{h_3}{\pi}. \tag{2}$$

Pentru determinarea lui a şi b se integrează pe cercuri cu centrele în punctele $-a$ şi $-b$ de raze suficient de mici ţinînd seama de determinarea radicalului $-\sqrt{x(x+1)}$.

Avem

$$C\int\limits_{|z+a|<r}\frac{-\sqrt{z(z+1)}}{(z+a)(z+b)}\,dz=-\frac{2\pi C\sqrt{-a(1-a)}}{b-a}+o(r)\ \text{cu}\ o(r)\to 0,\ r\to 0.$$

Ocolind punctul $z=-a$, se trece de la o latură la alta şi creşterea lui Z este aproximativ $-ih_1$, deci la limită, pentru $r\to 0$, avem

$$h_1=\frac{h_3\sqrt{a(1-a)}}{b-a}. \tag{3}$$

Procedînd în mod analog pentru punctul $z=-b$ şi ţinînd seama că pe (z_2, z_4) avem $i\sqrt{x(x+1)}$, obţinem

$$-i\pi C\frac{i\sqrt{b(1-b)}}{a-b}=h_2$$

cu

$$h_2=h_3\frac{\sqrt{b(1-b)}}{a-b}. \tag{4}$$

Relaţiile (2), (3), (4) ne dau constantele a, b, c, deci funcţia (1) este complet determinată.

62. Să se studieze cu ajutorul transformărilor conforme cîmpul creat de lentila electronică din fig. II.62, *a*.

R. Din motive de simetrie, linia (planul) mediană este o linie echipotenţială $V=0$, deci problema se va studia pentru jumătate din lentilă.

Vom transforma domeniul dat pe semiplanul superior cu ajutorul transformării Schwarz-Christoffel. Avem

$$\alpha_1\pi=-\frac{\pi}{2},\ \alpha_2\pi=2\pi,\ \alpha_3\pi=0,\ \alpha_4\pi=2\pi,\ \alpha_5\pi=-\frac{\pi}{2}.$$

Luînd în planul (z) punctele $a_1=\infty$, $a_2=-\lambda$, $a_3=-\mu$, $a_4=-1$, $a_5=0$ de pe axa reală (fig. II.62, *b*) corespunzătoare vîrfurilor A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ale poligonului din fig. II.62, *a* şi ţinînd seama de valorile unghiurilor de mai sus, formula lui Schwartz-Christoffel devine

$$Z=C\int\frac{z+\lambda}{z+\mu}\cdot\frac{z+1}{z^{3/2}}\,dz+C'.$$

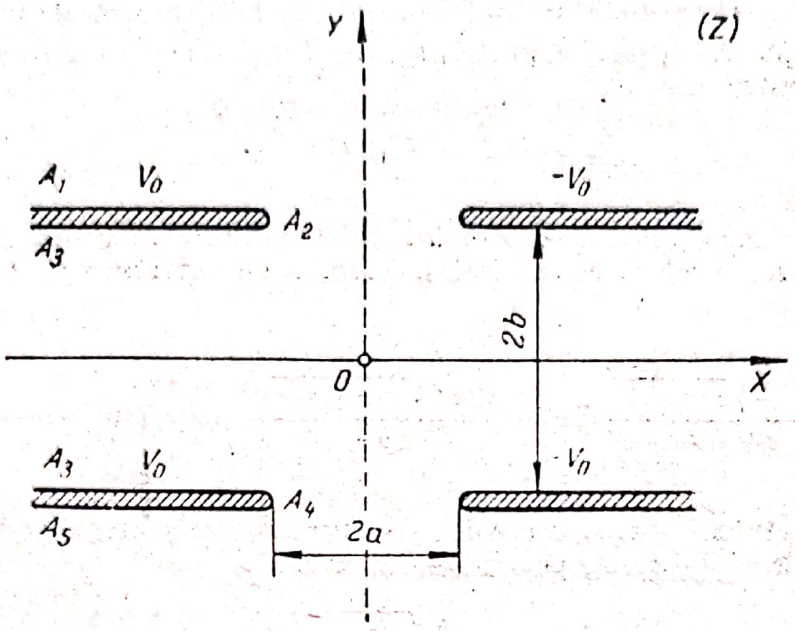


Fig. II.62, *a*

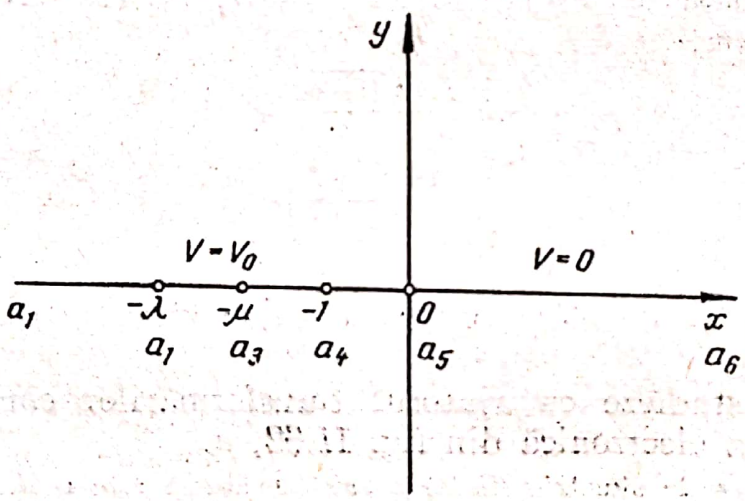


Fig. II.62, *b*

Cu transformarea $z=t^2$ integrala devine

$$I=\int \frac{z+\lambda}{z+\mu}\cdot\frac{z+1}{z^{3/2}}\,dz=2\int \frac{t^2+\lambda}{t^2+\mu}\cdot\frac{t^2+1}{t^2}\,dt=2\left[t-\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{1}{t}+\frac{\mu-1}{\mu^{3/2}}(\lambda-\mu)\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\mu}}\right],$$

de unde rezultă

$$Z=2C\left(\sqrt{z}-\frac{\lambda}{\mu}\frac{1}{\sqrt{z}}+\frac{\mu-1}{\mu^{3/2}}\cdot\frac{\lambda-\mu}{2i}\ln\frac{\sqrt{\mu}+i\sqrt{3}}{\sqrt{\mu}-i\sqrt{3}}\right)+C'. \qquad (2)$$

Pentru determinarea constantelor C, C', λ și μ să ținem seama că vîrfurile poligonului A_1, A_3 și A_5 sînt la infinit iar A_2 în $-a+ib$ și A_4 în $-a-ib$. Din

$$-2\,ib=\lim_{x\to\infty}\int_{-x+ib}^{-x-ib} dz=\lim_{\rho=0} C\int_{\pi}^{0}\frac{\rho e^{i\theta}-\mu+\lambda}{\rho e^{i\theta}}\cdot\frac{\rho e^{i\theta}-\mu+1}{(\rho e^{i\theta}-\mu)^{3/2}}\,i\rho e^{i\theta}d\theta=$$

$$=\frac{-C(\lambda-\mu)\,(1-\mu)\,i\pi}{-i\mu^{3/2}}$$

rezultă o primă condiție:

$$2\,ib=C\,(t-\mu)\,(\mu-1)\,\frac{\pi}{\mu^{3/2}}\cdot \tag{3}$$

Pentru $z>0$ $[V=V_0]$ corespunde în Z, $X=0$. Făcînd în (1) pe z real și pozitiv, rezultă că C și C' sînt de forma

$$C=iK,\quad C'=iK'.$$

Din corespondența punctelor A_3 și a_3 rezultă din (2) ținînd seama de (4) că

$$-a+ib+2Ki\left(i\sqrt{\lambda}-\frac{\lambda}{i\mu\sqrt{\lambda}}+\frac{\mu-1}{\mu^{3/2}}\cdot\frac{\lambda-\mu}{2\,i}\,\frac{\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\lambda}}\right)+iK',$$

de unde avem

$$a=2K\left[\sqrt{\lambda}+\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}+\frac{(\mu-1)\,(\lambda-\mu)}{2\,\mu^{3/2}}\ln\frac{\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu}}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}}\right]. \tag{5}$$

Din corespondența punctelor A_4 cu a_4 avem

$$-a-ib=2Ki\left(i\sqrt{\lambda}-\frac{1}{i\mu}+\frac{\mu-1}{\mu^{3/2}}\cdot\frac{1-\mu}{2\,i}\ln\frac{\sqrt{\mu}-1}{\sqrt{\mu}+1}\right)+iK',$$

de unde

$$K'=-b,\ \text{deci}\ C'=-ib \tag{6}$$

și

$$a=2K\left[1+\frac{1}{\mu}+\frac{(\mu-1)^2}{2\,\mu^{3/2}}\ln\frac{\sqrt{\mu}-1}{\sqrt{\mu}+1}\right]. \tag{7}$$

Ținînd seama că $\lambda>\mu>1$, $K>0$ și că aceste condiții sînt verificate de (3), (5), (6) și (7), cele trei constante sînt determinate prin aceste condiții.

63. Să se determine valorile finale ale funcției $u=\operatorname{arctg}\sqrt{1-z}$ cînd z descrie segmentul de dreaptă care unește punctele $z=0$ cu $z=1+i$, (fig. II.63, *a*) valoarea inițială a lui u fiind $\frac{\pi}{4}$.

R. Punem

$$V=\sqrt{1-z}.$$

Fie $z=0$; alegem $v=+1$. Cînd z descrie segmentul $(0,1+i)$, argumentul lui $1-z$ variază de la 0 (valoare obligatorie pentru $2\,k\pi$), la $-\frac{\pi}{2}$, iar al lui v de la 0 la $-\frac{\pi}{4}$. Punctul v descrie un arc de hiperbolă

$$x^2-2xy-y^2=1,$$

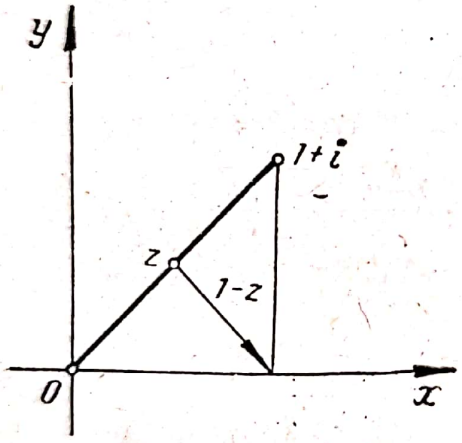


Fig. II.63, *a*

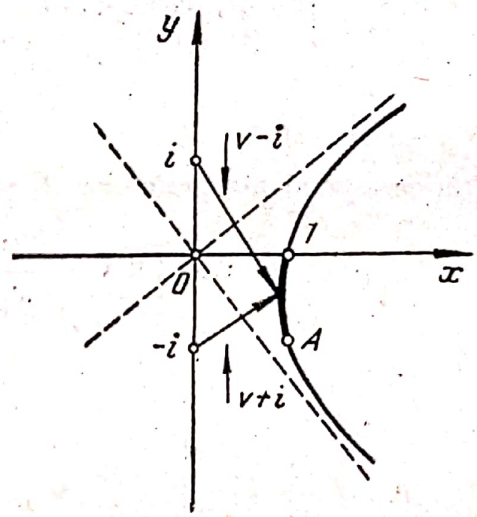


Fig. II.63, *b*

care pleacă din punctul $v=1$ și ajunge în punctul A de afix $\sqrt{-i}=e^{-i\frac{\pi}{4}}$ (fig. II.63, *b*).

Avem

$$u=\operatorname{arctg} v=\frac{1}{2i}\ln\frac{i-v}{i+v}.$$

Punem

$$\frac{v-i}{v+i}=re^{i0},\quad u=\frac{0+\pi}{2}-\frac{i}{2}\ln r.$$

Prin ipoteză $u=\frac{\pi}{4}$ pentru $z=0$, adică pentru $v=1$,

Valorile modulelor și argumentelor lui $v-i$ și $v+i$ compatibile cu toate aceste ipoteze sînt:

	Modul	Argument			r	θ
Inițial	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	1	$-\frac{\pi}{2}$
Final	$\sqrt{\frac{1}{2}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{2}+\alpha$	α	$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}=1+\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

unde $\alpha=\frac{\pi}{8}$. Avem deci în punctul $z=1+i$

$$u=\frac{\pi}{4}-\frac{i}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

Aceasta este valoarea luată pentru $u=\operatorname{arctg}\sqrt{1-z}$ cînd z, cu excepția punctului $z=0$, se află în punctul $1+i$ și descrie segmentul de dreaptă $(0,1+i)$, valoarea inițială a lui u fiind fixată $\frac{\pi}{4}$. Valoarea lui u este determinată.

Observație. $\operatorname{arctg} v$ are 2 puncte critice $v=i$, $v=-i$, $v=\sqrt{1-z}$ are punct critic $z=1$ iar $u=\operatorname{arctg}\sqrt{1-z}$ are două puncte critice $z=1$ și $z=2$. Valoarea lui u în punctul $1+i$ depinde de valoarea inițială și de drumul parcurs de la 0 la $1+i$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ȘI TENSORIAL

§ 1. Elemente de calcul matriceal

Numim *vector n-dimensional* sau *n-vector* X peste cîmpul F o mulțime ordonată de n elemente x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ din F, adică

$$X=\| x_1, x_2, \ldots, x_n \| .$$

Elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc *componentele vectorului* X.

Vectorii

$$X_j=\| x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jn} \| \qquad (j=1, \ldots, m)$$

sînt *liniar dependenți* peste F dacă există m elemente $k_1, k_2, \ldots, k_m$, nu toate nule astfel ca să avem

$$k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_mX_m=0.$$

În caz contrar ei sînt *liniar independenți*.

Un vector X_{m+1} se spune că poate fi exprimat ca o *combinație liniară* de vectorii $X_1, X_2, \ldots, X_m$ dacă există elementele $k_1, k_2, \ldots, k_m$ din F astfel ca

$$X_{m+1}=k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_mX_m.$$

O *formă liniară* peste F în n variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este un polinom de tipul

$$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,$$

coeficienții a_i fiind din F.

Considerăm un sistem de m forme liniare în n variabile

$$f_j=a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n, \quad (j=1, \ldots, m) \tag{1}$$

și matricea asociată

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Dacă există elementele $k_1, k_2, \ldots, k_m$, nu toate nule, în F astfel ca

$$k_1f_1+k_2f_2+\cdots+k_mf_m=0,$$

formele liniare (1) se numesc *liniar dependente*; în caz contrar ele sînt *liniar independente*.

Dependența sau independența liniară a formelor (1) este echivalentă cu dependența sau independența liniară a vectorilor-linii ai matricei A.

Spațiu vectorial. *Numim spațiu vectorial orice mulțime de n-vectori peste F care este închisă față de adunarea și înmulțirea cu scalar.*

Dacă $X_1, \ldots, X_m$ sînt n-vectori peste F, mulțimea tuturor combinațiilor liniare

$$k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_mX_m, \quad (k_i\in F) \tag{2}$$

formează un spațiu vectorial peste F.

Totalitatea n-vectorilor peste F formează un spațiu vectorial n-dimensional, $V_n(F)$, peste F.

Spunem că spațiul vectorial V_n este generat de n-vectorii $X_1, X_2, \ldots, X_m$ dacă X_i sînt în V_n și fiecare vector din V_n este o combinație liniară de vectorii $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

Notăm prin $V_n^r(F)$ un spațiu vectorial r-dimensional format din n-vectori.

Numim *bază* a spațiului vectorial $V_n^r(F)$ o mulțime de r vectori liniar independenți și astfel încît fiecare vector din spațiu se exprimă ca o combinație liniară unică de vectori din bază.

Teorema 1. *Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sînt $m<n$, n-vectori liniar independenți din $V_n(F)$ și dacă $X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n$ sînt orice $n-m$ vectori din $V_n(F)$ care împreună cu $X_1, X_2, \ldots, X_m$ formează o mulțime liniar independentă, atunci $X_1, \ldots, X_n$ este o bază a lui $V_n(F)$.*

Teorema 2. Dacă $X_1, \ldots, X_n$ *sînt n-vectori liniar independenţi peste* F, *atunci vectorii*

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} X_j, \qquad (i=1, \ldots, n)$$

sînt liniar independenţi dacă şi numai dacă $\| \alpha_{ij} \|$ *este nesingulară.*

Teorema 3. *Dacă* $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *sînt* $m<n$, *n-vectori liniar independenţi peste* F, *atunci* p *vectori*

$$Y_j = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} X_i \qquad (j=1, \ldots, p)$$

sînt liniar dependenţi dacă $p>m$, *sau dacă* $p \leqslant m$ *şi* $\| s_{ij} \|$ *are rangul* $r<p$.

Spaţiu sumă. Fie spaţiile vectoriale $V_n^h(F)$ şi $V_n^k(F)$. Mulţimea tuturor vectorilor $X+Y$ cu X din $V_n^h(F)$ şi Y din $V_n^k(F)$ se *numeşte spaţiu sumă.*

Spaţiu de intersecţie este format de intersecţia a două spaţii vectoriale.

Intersecţia a două spaţii vectoriale este mulţimea tuturor vectorilor comuni acestor două spaţii.

Transformarea liniară. Fie $X = \| x_1, x_2, \ldots, x_n \|'$ (transpusa matricei linie) şi $Y = \| y_1, y_2, \ldots, y_n \|'$ doi vectori din $V_n(F)$, coordonatele lor existînd relativ la aceeaşi bază a spaţiului. Presupunem că coordonatele lor sînt legate prin relaţiile

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n, \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{3}$$

sau, pe scurt

$$Y = AX,$$

unde $A = \| a_{ij} \|$ peste F. Atunci (3) este o transformare T care transformă orice vector X din $V_n(F)$ într-un vector Y din acelaşi spaţiu, numit *imagine.*

Dacă (3) transformă X_1 în Y_1 şi X_2 în Y_2 atunci:

(a) ea transformă kX_1 în kY_1, pentru orice scalar k şi

(b) transformă aX_1+bX_2 în aY_1+bY_2, pentru orice pereche de scalari a şi b.

O astfel de transformare se numeşte *liniară.*

Dacă în (3), $X = \| 1, 0, \ldots, 0 \|' = E_1$, atunci $Y = \| a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1} \|'$ şi în general dacă $X = E_j$, atunci $Y = \| a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj} \|'$.

Teorema 4. *O transformare liniară* (3) *este unic determinată cînd imaginile* (*Y-cilor*) *vectorilor bază sînt cunoscute, respectiv coloanele lui* A *fiind coordonatele acestor imagini ale acestor vectori.*

Scanned with OKEN Scanner

O transformare liniară este *nesingulară* dacă imaginile vectorilor distincți X_i sînt vectori distincți Y_i. În caz contrar transformarea este *singulară*.

Teorema 5. *O transformare liniară este nesingulară dacă și numai dacă matricea A este nesingulară.*

Teorema 6. *O transformare liniară nesingulară transformă vectorii liniar independenți (dependenți) în vectori liniar independenți (dependenți).*

Două matrice A și B se numesc *similare* dacă există o matrice nesingulară Q astfel încît $B=Q^{-1}AQ$.

Teorema 7. *Dacă $Y_Z=AX_Z$ este o transformare liniară din $V_n(F)$ relativ la o bază dată z și $Y_W=BX_W$ este aceeași transformare liniară relativ la baza W, atunci A și B sînt similare.*

Forme biliniare. O expresie care este liniară și omogenă în fiecare mulțime de variabile $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ și $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ se numește *ormă biliniară* în aceste variabile și anume

$$f(x, y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

sau

$$f(x, y)=X'AY,$$

unde $X=\| x_1, \ldots, x_m \|'$, $A=\| a_{ij} \|$ și $Y=\| y_1, y_2, \ldots, y_n \|'$.

Teorema 8. *Orice formă biliniară peste F de rang r poate fi redusă prin transformări liniare nesingulare peste F la forma canonică*

$$u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_rv_r. \tag{4}$$

O formă biliniară se numește *simetrică, alternată, hermitiană* sau *alternat hermitiană* dacă matricea A este *simetrică, strîmb-simetrică, hermitiană sau strîmb-hermitiană*.

Forme pătratice. O formă de tipul

$$q=X'AX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

ai cărei coeficienți a_{ij} sînt elemente din F se numește *pătratică* peste F în variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Două forme pătratice sînt *echivalente* dacă și numai dacă există o transformare liniară nesingulară $X=BY$ care împreună cu $Y=IX$ le transformă una în alta.

O formă pătratică de rang r se poate reduce la forma

$$h_1y_1^2+h_2y_2^2+\cdots+h_ry_r^2, \quad h_i\neq 0. \tag{5}$$

Orice formă pătratică reală se poate reduce prin transformări reale nesingulare la forma canonică

$$w_1^2+w_2^2+\cdots+w_p^2-w_{p+1}^2-\cdots-w_r^2, \tag{6}$$

unde p este numărul de termeni pozitivi, iar r este rangul dat de forma pătratică.

Teorema 9. *Dacă $q=X'AX$ este o formă pătratică nesingulară peste F şi dacă $\alpha_{n-1,n-1}=\alpha_{nn}=0$ cu $\alpha_{n,n-1}\neq 0$*, atunci transformarea nesingulară peste F*

$$\left.\begin{aligned} x_i&=y_i+\alpha_{i,n-1}y_{n-1}+\alpha_{in}y_n\\ x_{n-1}&=\alpha_{n-1,n}y_n\\ x_n&=\alpha_{n,n-1}y_{n-1}\end{aligned}\right\}(i=1,2,\ldots,n-2)$$

o transformă în

$$\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2}\alpha_{ij}y_iy_j+2\,\alpha_{n,n-1}p_ny_{n-1}y_n.$$

Apoi transformarea

$$\left.\begin{aligned} y_i&=z_i\\ y_{n-1}&=z_{n-1}-z_n\\ y_n&=z_{n-1}+z_n\end{aligned}\right\}(i=1,2,\ldots,n-2)$$

o aduce la forma

$$\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2}a_{ij}z_iz_j+2\,\alpha_{n,n-1}p_n(z_{n-1}^2-z_n^2). \tag{7}$$

Forme hermitiene. O formă definită prin

$$h=X'HX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_{ij}\bar{x}_ix_j,\quad \bar{h}_{ij}=h_{ji},$$

unde H este hermitiană şi componentele lui X sînt în cîmpul numerelor complexe se numeşte *formă hermitiană*. Dacă $r<n$, forma este singulară, în caz contrar nesingulară, dacă r este rangul lui H.

Forma canonică este

$$\bar{z}_1z_1+\bar{z}_2z_2+\cdots+\bar{z}_pz_p-\bar{z}_{p+1}z_{p+1}-\cdots-\bar{z}_rz_r \tag{8}$$

unde p depinde de forma dată şi nu de transformarea care o reduce la forma (8).

---

* α_{hk} este reciprocul elementului a_{kh} din matricea A.

Orice vector X pentru care

$$AX=\lambda X, \tag{9}$$

λ fiind scalar întreg din F, se numeşte *vector invariant* faţă de această transformare.

Din (9) obţinem ecuaţia $(\lambda I-A)\,X=0$ sau

$$\begin{Vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12}\cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22}\cdots & -a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2}\cdots & \lambda-a_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = 0,$$

numită *ecuaţie caracteristică* a lui A, iar rădăcinile $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ se numesc *rădăcini caracteristice*.

Teorema 10. *Dacă $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sînt destincte şi $X_1, \ldots, X_k$ sînt vectori invarianţi nenuli asociaţi acestor rădăcini, ei sînt liniar independenţi.*

Teorema 11. *Dacă λ_i este o rădăcină caracteristică de ordin r a matricei pătratice de ordin n, A, rangul lui $\lambda_i I-A$ nu este mai mic ca $n-r$ şi dimensiunea spaţiului vectorial invariant asociat nu este mai mare ca r. Dacă λ_i este rădăcină simplă, atunci rangul lui $\lambda_i I-A$ este $n-1$ şi dimensiunea spaţiului vectorial invariant asociat este 1.*

Două matrice n-pătratice A şi B peste F se numesc *similare* peste F dacă există o matrice nesingulară R peste F astfel că

$$B=R^{-1}AR.$$

Orice matrice n-pătratică A, similară cu o matrice diagonală, are n vectori invarianţi liniar independenţi şi reciproc.

Orice matrice n-pătratică A este similară cu o matrice triunghiulară ale cărei elemente pe diagonală sînt rădăcinile caracteristice ale lui A.

§ 2. Calcul tensorial

Spaţiul vectorial euclidian

Fie F_n un spaţiu *prehilbertian nedegenerat* (un spaţiu vectorial pe care este dată o formă hermitică pozitivă nedegenerată), n-dimensional, sau pe scurt un spaţiu vectorial euclidian.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ o bază în spaţiul E_n şi

$$\vec{x}=x^i \vec{e}_i, \quad \vec{y}=y^i \vec{e}_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

doi vectori în acest spaţiu.

Produsul lor *scalar* este

$$<\vec{x}, \vec{y}>=x^i y^j <\vec{e}_i, \vec{e}_j>$$

sau

$$<\vec{x}, \vec{y}>=g_{ij} x^i y^j,$$

unde s-a notat cu $g_{ij}=<\vec{e}_i, \vec{e}_j>$.

Definiţie. *Spaţiul vectorial euclidian E_n se numeşte spaţiu euclidian propriu dacă norma oricărui vector nenul este strict pozitivă.*

Doi vectori $\vec{x}$ şi $\vec{y}$ se numesc ortogonali dacă

$$<\vec{x}, \vec{y}>=0.$$

Definiţie. *Fie E_n un spaţiu vectorial euclidian şi $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ o bază oarecare în acest spaţiu. Fiind dat vectorul $\vec{x}=x^i \vec{e}_i$, cantităţile $x^1, x^2, \ldots, x^n$ se numesc componentele contravariante ale vectorului x iar cantităţile $x_j=<\vec{x}, \vec{e}_j>$, $(j=1, \ldots, n)$ se numesc componentele covariante ale aceluiaşi vector $\vec{x}$.*

Avem

$$x_j=x^i <\vec{e}_i, \vec{e}_j>, \quad x_j=g_{ij} x^i$$

şi

$$x^i=g^{ij} x_j,$$

unde $g^{ij}=\frac{\alpha^{ij}}{g}$, $g=\det \| g_{ij} \|$, α^{ji} fiind *complementul algebric* al elementului g_{ij} din g.

Fie E_n un spaţiu vectorial n-dimensional şi E_p un spaţiu vectorial p-dimensional. Dacă $\vec{x}$ este un vector din E_n şi $\vec{y}$ din E_p, perechea $(\vec{x}, \vec{y})$ notată cu $\vec{x} \otimes \vec{y}$ este un element dintr-un spaţiu euclidian np-dimensional $E_n \otimes E_p$ numit *produsul tensorial al celor două spaţii*. $\vec{x} \otimes \vec{y}$ se numeşte *produsul tensorial al vectorilor* $\vec{x}$ şi $\vec{y}$.

Tensori afini într-un spațiu vectorial. Fie E_n un spațiu vectorial euclidian n-dimensional și

$$E_n^{(q)} = E_n \otimes E_n \otimes \cdots \otimes E_n$$

spațiul vectorial n^q-dimensional, numit și *puterea q tensorială* a spațiului E_n.

Notînd cu $\vec{x}_{(1)}, \cdots, \vec{x}_{(q)}$, q vectori în spațiul E_n, ale căror componente contravariante sînt $x_{(1)}^{i_1}, \ldots, x_{(q)}^{i_q}$, avem

$$\vec{x}_{(1)} \otimes \cdots \otimes \vec{x}_{(q)} = x_{(1)}^{i_1} \cdots x_{(q)}^{i_q}.$$

Să considerăm spațiul vectorial E_n', dualul spațiului E_n, raportat la baza $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ duala bazei $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, ($E_n'$ este spațiul formelor liniare definite pe E_n) și fie produsul tensorial

$$E_n^{(r_1)} \otimes E_n^{\prime(s_1)} \otimes \cdots \otimes E_n^{\prime(s_p)} \otimes E_n^{(r_m)}. \tag{10}$$

Elementele acestui spațiu se numesc *tensori* afini atașați spațiului vectorial E_n.

Elementele spațiului $E_n^{(q)}$ sînt *tensori afini de q ori contravarianți*, iar elementele spațiului $E_n^{\prime(q)}$ *sînt tensori afini de q ori covarianți*.

Fie $r_1 = q-2$, $r_2 = \cdots = r_m = 0$, $s_1 = 2$, $s_2 = \cdots = s_p = 0$, deci spațiul (10) este

$$E_n^{(q-2)} \otimes E_n^{\prime(2)}. \tag{10'}$$

O bază a acestui spațiu este

$$\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_{q-2}} \otimes x^{i_{q-1}} \otimes \cdots \otimes x^{i_q} = \varepsilon^{i_{q-1}\, i_q}_{i_1\, i_2 \cdots i_{q-2}}.$$

Dacă notăm cu $t^{i_1 i_2}_{i_{q-1}\, i_q}$ componentele unui tensor T al spațiului (10'), avem

$$T = t^{i_1 i_2 \ldots i_{q-2}}_{i_{q-1}\, i_q}\, \varepsilon^{i_{q-1}\, i_q}_{i_1 i_2 \ldots i_{q-2}}.$$

Notăm cu $x_{(1)}^{i_1}, x_{(2)}^{i_2}, \ldots, x_{(q-2)}^{i_{q-2}}$ *componentele contravariante* ale vectorilor $\vec{x}_{(1)}, \vec{x}_{(2)}, \ldots, \vec{x}_{(q-2)}$ și cu $x_{(q-i)\, i_{q-1}}$, $x_{(q)\, i_q}$ *componentele contravariante* ale vectorilor $\vec{x}_{(q-1)}$ și $\vec{x}_{(q)}$ avem

$$T = x_{(1)}^{i_1}\, x_{(2)}^{i_2} \cdots x_{i_{(q-2)}}^{i_{q-2}}\, x_{(q-1)\, i_{q-1}}\, x_{(q)\, i_q}\, \varepsilon^{i_{q-1}\, i_q}_{i_1 i_2 \ldots i_{q-2}},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$t^{i_1 i_2 \dots i_{q-2}}_{i_{q-1} i_q} = x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(1)} \cdots x^{i_{q-2}}_{(q-2)} x_{(q-1)\, i_{q-1}} x_{(q)\, i_q}.$$

Fie o schimbare a bazei $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ dată de ecuaţiile

$$\vec{e}_i = A^{j'}_i \vec{e}_{j'},$$

sau

$$\vec{e}_{j'} = A^i_{j'} \vec{e}_i, \quad A^i_{j'} A^{j'}_h = \delta^i_h$$

formulele de transformare ale componentelor contravariante, respectiv covariante sînt

$$x_i = A^{j'}_i x_{j'},$$

$$x_{j'} = A^i_{j'} x_i,$$

iar pentru tensori

$$t^{i_1 i_2 \dots i_{q-2}}_{i_{q-1} i_q} = A^{i_1}_{j'_1} A^{i_2}_{j'_2} \cdots A^{i_{q-2}}_{j'_{q-2}} A^{j'_{q-1}}_{i_{q-1}} A^{j'_q}_{i_q} t^{j'_1 j'_2 \dots j'_{q-2}}_{j'_{q-1} j'_q},$$

şi

$$t^{j'_1 j'_2 \dots j'_{q-2}}_{j'_{q-1} j'_q} = A^{j'_1}_{i_1} A^{j'_2}_{i_2} \cdots A^{j'_{q-2}}_{i_{q-2}} A^{i_{q-1}}_{j'_{q-1}} A^{i_q}_{j'_q} t^{i_1 i_2 \dots i_{q-2}}_{i_{q-1} i_q}.$$

Dacă tensorul T este contravariant, aceste formule devin

$$t^{i_1 i_2 \dots i_q} = A^{i_1}_{j'_1} A^{i_2}_{j_2} \cdots A^{i_q}_{j'_q} t^{j'_1 j'_2 \dots j_q},$$

$$t^{j'_1 j'_2 \dots j'_q} = A^{j'_1}_{i_1} A^{j'_2}_{i_2} \cdots A^{j'_q}_{i_q} t^{i_1 i_2 \dots i_q},$$

iar dacă este covariant, avem

$$t_{i_1 i_2 \dots i_q} = A^{j'_1}_{i_1} A^{j'_2}_{i_2} \cdots A^{j'_q}_{i_q} t_{j'_1 j'_2 \dots j_q},$$

$$t_{j'_1 j'_2 \dots j'_q} = A^{i_1}_{j'_1} A^{i_2}_{j'_2} \cdots A^{i_q}_{j'_q} t_{i_1 i_2 \dots i_q}.$$

Operaţii cu tensori:

$$t^{i_1 i_2 \dots i_{q-2}}_{i_{q-1} i_q} + u^{i_1 i_2 \dots i_{q-2}}_{i_{q-1} i_q} = s^{i_1 i_2 \dots i_{q-2}}_{i_{q-1} i_q}$$

$$t^{i_1 i_2 \dots i_{q-1}}_{i_q} \cdot u^{i_{q+2} \dots i_{q+p}}_{i_{q+1}} = p^{i_1 \dots i_{q-1} i_{q+2} \dots i_{q+p}}_{i_q i_{q+1}}.$$

Tensori euclidieni. Fie E_n un *spațiu vectorial euclidian*, E_n' dualul lui și g_{ij} coeficienții *formei pătratice fundamentale.*

Dacă $\vec{x}$ este un vector din E_n care are componentele contravariante x^i și componentele covariante x_i, avem

$$x_i = g_{ij}x^j, \quad x^i = g^{ij}x_j$$

cu $g^{ij} = \frac{\alpha^{ij}}{g}$, α^{ij} fiind complementul algebric al elementului g_{ji} din determinantul $g = \det \|g_{ij}\|$.

Definiție. *Diferiți tensori afini obținuți din tensorul T contravariant de ordinul q,*

$$T = \vec{x}_{(1)} \otimes \cdots \otimes \vec{x}_{(q)}$$

prin înlocuirea unuia sau a mai multor vectori prin elementele corespunzătoare din E_n' constituie un singur tensor euclidian de ordinul q, admițînd drept componente contravariante, covariante sau mixte componentele tensorilor afini contravarianți, covarianți sau micști corespunzători.

Avem

$$t_{i_1 i_2 \ldots i_q} = g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_q j_q} t^{j_1 j_2 \ldots j_q},$$

$$t^{i_1 i_2 \ldots i_q} = g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \ldots g^{i_q j_q} t_{j_1 j_2 \ldots j_q}.$$

Tensorul g_{ij} se numește *tensor fundamental* al spațiului E_n. Este un tensor simetric, deci are singurele componente mixte

$$g_j^i = g^{ik} g_{jk} = \delta_j^i.$$

Fie $\mathcal{E}_n$ un *spațiu punctual euclidian n-dimensional* și (R) un reper oarecare față de care un punct M are coordonatele $x^1, \ldots, x^n$.

Să considerăm o schimbare de coordonate

$$x^i = f^i(y^1, y^2, \ldots, y^n), \quad (i = 1, \ldots, n),$$

unde f^i sînt funcții de două ori diferențiabile într-un domeniu D_y în care avem

$$\frac{D(x^1 \ldots, x^n)}{D(y^1, \ldots, y^n)} \neq 0.$$

Putem interpreta variabilele $(y^1, \ldots, y^n)$ drept coordonate și le numim *coordonate curbilinii* în spațiul $\mathcal{E}_n$.

Dat fiind un sistem de coordonate curbilinii (y_i) şi un punct $M \in \mathcal{E}_n$, asociem acestui punct un reper avînd originea în M şi format din vectorii

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{M}}{\partial y^i} \quad (i=1, \ldots, n)$$

numit şi *reper natural* în punctul H al sistemului (y^i).

Pornind de la problema determinării reperului natural $(M+\mathrm{d}\vec{M},\ \vec{e}_i+\mathrm{d}\vec{e}_i)$ în punctul $M+\mathrm{d}\vec{M}$ faţă de reperul natural $(M, \vec{e}_i)$ în punctul M, avem

$$\mathrm{d}\vec{M} = \mathrm{d}y^i \vec{e}_i, \quad \mathrm{d}\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j,$$

ω_i^j fiind forme liniare în raport cu vectorul $\mathrm{d}\vec{M}$, deci

$$\omega_i^j = \Gamma_{ki}^j \mathrm{d}y^k,$$

unde Γ_{ki}^j sînt n funcţii de variabilele $y^1, \ldots, y^n$.

Notăm

$$\Gamma_{kji} = g_{jh}\Gamma_{ki}^h.$$

Cantităţile Γ_{kji} se mai notează $[ki,j]$ şi se numesc *simbolurile lui Christoffel de prima speţă*, iar cantităţile Γ_{ki}^j se mai notează $\left\{{j \atop ki}\right\}$ şi se numesc *simbolurile Christoffel de speţa a doua*. Simbolurile lui Christoffel nu constituie componentele unui tensor. Avem

$$\Gamma_{kij} + \Gamma_{kji} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k},$$

$$\Gamma_{kji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial y^i}\right),$$

$$\Gamma_{ki}^j = g^{jh}\Gamma_{khi},$$

iar la o schimbare de coordonate curbilinii

$$y^i = y^i(y^{1'}, y^{2'}, \ldots, y^{n'}), \quad (i=1, \ldots, n)$$

avem

$$\Gamma_{ki}^j = \frac{\partial y^{l'}}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial y^{n'}}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial y^j}{\partial y^{m'}} \Gamma_{n'l'}^{m'} + \frac{\partial^2 y^{l'}}{\partial y^k \partial y^i} \frac{\partial y^j}{\partial y^{e'}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Componentele tensorului derivată covariantă a tensorului T sînt

$$\nabla_k t^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} = \frac{\partial t^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s}}{\partial y^k} + \Gamma^{i_1}_{lk}\, t^{l i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} + \dots + \Gamma^{i_2}_{lk}\, t^{i_1 l i_3 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} + \dots$$

$$\dots + \Gamma^{i_r}_{lk}\, t^{i_1 i_2 \dots l}_{j_1 j_2 \dots j_s} - \Gamma^{l}_{j_1 k}\, t^{i_1 i_2 \dots i_r}_{l j_2 \dots j_s} - \dots - \Gamma^{l}_{j_s k}\, t^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots l}.$$

Definiție. *Un spațiu n-dimensional de coordonate $(y^1, \dots, y^n)$ în care produsul scalar este dat de*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = G_{ij} u^i v^j,$$

$\vec{u}$ și $\vec{v}$ fiind doi vectori în acest spațiu iar G_{ij} sînt funcții arbitrare diferențiabile de variabilele $y^1, \dots, y^n$, se numește spațiu riemannian n-dimensional, V_n. Mărimea G_{ij} este tensorul riemannian fundamental.

Definim simbolurile lui Christoffel

$$\Gamma_{ikj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_{ij}}{\partial y^k} + \frac{\partial G_{jk}}{\partial y^i} - \frac{\partial G_{ki}}{\partial y^j}\right),$$

$$\Gamma^j_{ik} = G^{jl}\Gamma_{ilk}.$$

La o schimbare de variabile avem

$$\Gamma'^j_{ik} = \Gamma^\beta_{\gamma\alpha}\frac{\partial y'^\alpha}{\partial y^i}\cdot\frac{\partial y'^\gamma}{\partial y^k}\cdot\frac{\partial y^j}{\partial y'^\beta} + \frac{\partial y^j}{\partial y'^\alpha}\frac{\partial^2 y'^\alpha}{\partial y^i \partial y^k}.$$

Ecuația diferențială a geodezicelor spațiului V_n este

$$\frac{d^2 y^i}{dt^2} + \Gamma^i_{kh}\frac{dy^k}{dt}\cdot\frac{dy^h}{dt} = 0.$$

Dacă V_n este un spațiu euclidian, avem $\Gamma^i_{kh} = 0$.

PROBLEME

§ 1. Elemente de calcul matriceal

1. Să se arate că fiecare triplet de vectori

1° $X_1 = \|1, 2, -3, 4\|$, $X_2 = \|3, -1, 2, 1\|$, $X_3 = \|1, -5, 8, -7\|$ și 2° $X_1 = \|2, 3, 1, -1\|$, $X_2 = \|2, 3, 1, -1\|$, $X_3 = \|4, 6, 2, -2\|$

este liniar dependent şi să se determine o submulţime maximă de vectori independenţi exprimîndu-se ceilalţi vectori ca combinaţii liniare ai acestora.

R. 1° Matricea

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 8 & -7 \end{matrix}\right\|$$

are rangul 2, deci există doi vectori liniar independenţi. Fie aceşti vectori X_1 şi X_2. Minorul $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Să considerăm minorul

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix}.$$

Complementii algebrici ai elementelor ultimei coloane sînt -14, 7, -7. Atunci

$$-14X_1+7X_2-7X_3=0,$$

adică

$$X_3=-2X_1+X_2.$$

2° Matricea

$$\left\|\begin{matrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 2 & -3 \end{matrix}\right\|$$

are rangul 2, deci există doi vectori liniar independenţi, fie X_1 şi X_2. Minorul $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$; schimbînd coloanele 2 şi 4 între ele, obţinem matricea

$$\left\|\begin{matrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 6 \end{matrix}\right\|$$

pentru care $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$. Complementii algebrici ai elementelor utilimei coloane din determinantul

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

sînt 2, 2, -2. Atunci

$$2X_1+2X_2-2X_3=0,$$

adică

$$X_3=X_1+X_2.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Să se determine natura dependenței dintre formele liniare:

$$f_1=3x_1-x_2+2x_3+x_4,$$
$$f_2=2x_1+3x_2-x_3+2x_4,$$
$$f_3=5x_1-9x_2+8x_3-x_4.$$

R. Matricea

$$\left\|\begin{array}{rrrr} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -9 & 8 & -1 \end{array}\right\|$$

are rangul 2, deci există două forme liniar independente. Fie acestea f_1 și f_2. Minorul $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Considerăm minorul

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & -9 & 8 \end{vmatrix}.$$

Complementii algebrici ai elementelor ultimei coloane sînt -33, 22, 11, deci

$$-33f_1+22f_2+11f_3=0$$

sau

$$3f_1-2f_2-f_3=0,$$

de unde rezultă că aceste forme sînt liniar dependente.

3. Să se arate că dacă două spații vectoriale $V_n^h(F)$ și $V_n^k(F)$ au $V_n^s(F)$ ca spațiu sumă și $V_n^t(F)$ ca spațiu de intersecție, atunci $h+k=s+t$.

R. Presupunem $t=h$; atunci $V_n^h(F)$ este un subspațiu al lui $V_n^t(F)$ și suma lor este spațiul V_n^k. Astfel, $s=k$, $t=h$ și $s+t=h+k$. Este ușor de arătat că acesta este adevărat dacă $t=k$.

Presupunem că $t<h$, $t<k$ și fie $X_1, X_2, \ldots, X_t$ generatorii lui $V_n^t(F)$. Atunci conform teoremei (1) există vectorii $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \ldots, Y_h$ astfel că $X_1, X_2, \ldots, X_t, Y_{t+1}, \ldots, Y_h$ generează $V_n^h(F)$ și vectorii $Z_{t+1}, \ldots, Z_k$ astfel că $X_1, X_2, \ldots, X_t, Z_{t+1}, \ldots, Z_k$ generează $V_n^k(F)$.

Vom presupune acum că există scalarii $(a_n)_{n\in N}$ și $(b_n)_{n\in N}$ astfel ca

$$\sum_{i=1}^{t} a_iX_i+\sum_{i=t+1}^{h} a_iY_i+\sum_{i=t+1}^{k} b_iZ_i=0 \qquad (1)$$

sau

$$\sum_{i=1}^{t} a_iX_i+\sum_{i=t+1}^{h} a_iY_i=\sum_{i=t+1}^{k} -b_iZ_i.$$

Vectorul din stînga se află în $V_n^h(F)$ şi după membrul drept se află de asemenea în $V_n^k(F)$ atunci el se află în $V_n^t(F)$.

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_t$ generatorii lui $V_n^t(F)$; rezultă $a_{t+1}=a_{t+2}=\cdots=a_h=0$ şi din (1) obţinem

$$\sum_{i=1}^{k} a_i X_i + \sum_{i=t+1}^{k} b_i Z_i = 0.$$

Dar X-ii şi Y-ii sînt liniar independenţi astfel că $a_1=a_2=\cdots=a_t=b_{t+1}=\cdots=b_k=0$; atunci X, Y, Z sînt mulţimi liniar independente şi generează $V_n^s(F)$. Atunci

$$s=h+k-t.$$

4. Considerăm ${}_1V_3^2(F)$ avînd $X_1=\|1, 2, 3\|'$ şi $X_2=\|1, 1, 1\|'$ ca bază şi ${}_2V_3^2(F)$ avînd $Y_1=\|3, 1, 2\|'$ şi $Y_2=\|1, 0, 1\|'$ ca bază. Să se arate că spaţiul sumă este $V_3(F)$. Să se determine o nouă bază.

R. Avem $h+k=s+t$ şi matricea

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

are rangul trei, deci spaţiul de intersecţie este un $V_3^1(F)$. Pentru o nouă bază scriem combinaţia liniară de vectori din bazele lui ${}_1V_3^2(F)$ şi ${}_2V_3^2(F)$ ca

$$aX_1+bX_2=cY_1+dY_2,$$

unde convenim să luăm $d=1$. Rezolvînd sistemul

$$\left.\begin{aligned} a+b-3c&=1\\ 2a+b-\ \ c&=0\\ 3a+b-2c&=1 \end{aligned}\right\}$$

obţinem $a=1/3$, $b=-4/3$, $c=-2/3$. Atunci

$$aX_1+bX_2=\|-1,\ -2/3,\ -1/3\|'$$

este o bază pentru spaţiul de intersecţie. Vectorul $\|3, 2, 1\|'$ este de asemenea în bază. Deci, ca bază se mai poate lua X_1, X_2 şi Y_1.

5. Fie $X=\|1, 2, 1\|'$ relativ la baza E. Să se determine componentele sale relativ la o nouă bază $Z_1=\|1, 1, 0\|'$, $Z_2=\|1, 0, 1\|'$ şi $Z_3=\|1, 1, 1\|'$.

R. (a) Scriem

$$X=aZ_1+bZ_2+cZ_3$$

sau

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} = a\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + b\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} + c\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă

$$\left.\begin{aligned} a+b+c&=1\\ a+c&=2\\ b+c&=1\end{aligned}\right\}$$

și $a=0$, $b=-1$, $c=2$. Deci relativ la baza Z avem

$$X_Z=\|0,\ -1,\ 2\|.$$

(b) Ajungem la același rezultat astfel:

Scriind (1) ca $X=\|Z_1, Z_2, Z_3\|$ $X_Z=ZX_Z$ avem

$$X_Z=Z^{-1}X=\left\|\begin{matrix}1&0&-1\\1&-1&0\\-1&1&1\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}\right\|=\|0,\ -1,\ 2\|'.$$

6. Fie X_Z și X_W coordonatele vectorului X relativ la două baze $Z_1=\|1, 1, 0\|'$, $Z_2=\|1, 0, 1\|'$, $Z_3=\|1, 1, 1\|'$ și $W_1=\|1, 1, 2\|'$, $w_2=\|2, 2, 1\|'$, $W_3=\|1, 2, 2\|'$. Să se determine matricea P astfel ca să avem $X_W=PX_Z$.

R. Avem

$$Z=\|Z_1Z_2Z_3\|=\left\|\begin{matrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix}\right\|;\quad W=\left\|\begin{matrix}1&2&1\\1&2&2\\2&1&2\end{matrix}\right\|\text{ și }W^{-1}=\frac{1}{3}\left\|\begin{matrix}2&-3&2\\2&0&-1\\-3&3&0\end{matrix}\right\|.$$

Rezultă

$$P=W^{-1}Z=\frac{1}{3}\left\|\begin{matrix}-1&4&1\\2&1&1\\0&3&0\end{matrix}\right\|.$$

7. a) Să se determine transformarea liniară $Y=AX$ care transformă E_1 în $Y_1=\|1, 2, 3\|'$, E_2 în $Y_2=\|3, 1, 2\|'$ și E_3 în $Y_3=\|2, 1, 3\|'$.

b) Să se determine imaginile lui $X_1=\|1, 1, 1\|'$, $X_2=\|3, -1, 4\|'$ și $X_3=\|4, 0, 5\|'$.

c) Să se arate că X_1 și X_2 sînt liniar independente și de asemenea și imaginile lor.

d) Să se arate că X_1, X_2 și X_3 sînt liniar dependente și de asemenea și imaginile lor.

R. a) Din teorema (4) rezultă $A=\|Y_1, Y_2, Y_3\|$, iar ecuația transformării liniare este

$$Y=AX=\left\|\begin{matrix}1&3&2\\2&1&1\\3&2&3\end{matrix}\right\|X.$$

b) Imaginea lui $X_1=\|1, 1, 1\|'$ este

$$Y_1=\left\|\begin{matrix}1&3&2\\2&1&1\\3&2&3\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}6\\4\\8\end{matrix}\right\|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Imaginile lui X_2 şi X_3 sînt respectiv $Y_2=\|8, 9, 19\|'$ şi $Y=\|14, 13, 27\|'$.

c) Rangul matricelor $\|X_1, X_2\|=\begin{Vmatrix}1 & 3\\ 1 & -3\\ 1 & 4\end{Vmatrix}$ şi $\|Y_1, Y_2\|=\begin{Vmatrix}6 & 8\\ 4 & 9\\ 8 & 19\end{Vmatrix}$ este 2.

Atunci X_1 şi X_2 sînt liniar independente şi de asemenea şi imaginile lor.

d) Avem $X_3=X_1+X_2$ şi $Y_3=Y_1+Y_2$ deci X_1, X_2, X_3 şi imaginile lor sînt liniar dependente.

8. Dacă $Y_Z=AX_Z=\begin{Vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{Vmatrix}\cdot X_Z$ este o transformare liniară relativ la baza Z formată din $Z_1=\|1, 1, 0\|'$, $Z_2=\|1, 0, 1\|'$ şi $Z_3=\|1, 1, 1\|'$, să se determine transformarea $Y_W=BX_W$ relativ la baza $W_1=\|1, 1, 2\|'$, $W_2=\|2, 2, 1\|'$, $W_3=\|1, 2, 2\|'$.

R. Avem (vezi problema 6)

$$X_W=PX_Z=\frac{1}{3}\begin{Vmatrix}-1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 0\end{Vmatrix}X_Z.$$

Rezultă

$$X_Z=P^{-1}X_W=\begin{Vmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{Vmatrix}X_W=QX_W$$

şi

$$Y_W=PY_Z=Q^{-1}AX_Z=Q^{-1}AQX_W=\frac{1}{3}\begin{Vmatrix}-2 & 14 & -6\\ 7 & 14 & 9\\ 0 & -9 & 3\end{Vmatrix}X_W.$$

9. Să se reducă la forma (5) (vezi Introducere) forma pătratică

$$q=2x_1^2+5x_2^2+19x_3^2-24x_4^2+8x_1x_2+12x_1x_3+8x_1x_4+$$
$$+18x_2x_3-8x_2x_4-16x_3x_4.$$

R. Avem

$$q=2[x_1^2+2x_1(2x_2+3x_3+2x_4)]+5x_2^2+19x_3^2-24x_4^2+18x_2x_3-8x_2x_4-16x_3x_4=$$
$$=2[x_1^2+2x_1(2x_2+3x_3+2x_4)+(2x_2+3x_3+2x_4)^2]+5x_2^2+19x_3^2-24x_4^2+$$
$$+18x_2x_3-8x_2x_4-16x_3x_4-2(2x_2+3x_3+2x_4)^2=2(x_1+2x_2+3x_3+2x_4)^2-$$
$$-3[x_2^2+2x_2(x_3+4x_4)]+x_3^2-32x_4^2-40x_3x_4=2(x_1+2x_2+3x_3+2x_4)^2-$$
$$-3(x_2+x_3+4x_4)^2+4(x_3-2x_4)^2.$$

Deci transformarea

$$\left.\begin{aligned}y_1&=x_1+2x_2+3x_3+2x_4\\ y_2&=\quad x_2+\ x_3+4x_4\\ y_3&=\qquad\quad x_3-2x_4\\ y_4&=\qquad\qquad\ x_4\end{aligned}\right\}$$

reduce q la forma

$$2y_1^2-3y_2^2+4y_3^2.$$

10. Să se reducă la forma (5) următoarea formă pătratică:

$$X'AX=X'\cdot\begin{Vmatrix}1&2&1\\2&4&3\\1&3&1\end{Vmatrix}\cdot X.$$

R. Aplicăm metoda lui Kronecker. Avem $\alpha_{22}=\alpha_{33}=0$ dar $\alpha_{32}=-1\neq 0$. Transformarea nesingulară

$$\left.\begin{aligned}x_1&=y_1+\alpha_{12}y_2+\alpha_{13}y_3\\x_2&=\qquad\qquad\alpha_{23}y_3\\x_3&=\quad\alpha_{32}y_2\end{aligned}\right\}\quad\text{sau}\quad X=\begin{Vmatrix}1&1&2\\0&0&-1\\0&-1&0\end{Vmatrix}\cdot Y$$

reduce $X'AX$ la forma

$$Y'\cdot\begin{Vmatrix}1&0&0\\1&0&-1\\2&-1&0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&2&1\\2&4&3\\1&3&1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&1&2\\0&0&-1\\0&-1&0\end{Vmatrix}Y=Y'\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{Vmatrix}\cdot Y=Y'BY=$$
$$=y_1^2+2\,y_2y_3.$$

Transformarea

$$\left.\begin{aligned}y_1&=z_1\\y_2&=z_2-z_3\\y_3&=z_2+z_3\end{aligned}\right\}\quad\text{sau}\quad Y=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{Vmatrix}\cdot Z$$

transformă $Y'BY$ în

$$Z'\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{Vmatrix}\cdot Z=Z'\cdot\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{Vmatrix}Z=z_1^2+2\,z_2^2-2\,z_3^2.$$

11. Să se demonstreze că dacă o formă pătratică reală q este transformată prin două transformări nesingulare în două forme reduse distincte

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2 \tag{1}$$

și

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_q^2-y_{q+1}^2-y_{q+2}^2-\cdots-y_r^2, \tag{2}$$

atunci $p=q$.

R. Presupunem $q>p$. Fie $X=FY$ transformarea prin care se ajunge la (1) și $X=GY$ transformarea prin care se ajunge la (2). Atunci avem

$$Y=F^{-1}X=\begin{cases}b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n\\b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\b_{n1}x_1+b_{n2}x_2+\cdots+b_{nn}x_n\end{cases}$$

şi

$$Y=G^{-1}X=\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n \\ c_{21}x_1+c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}x_1+c_{n2}x_2+\cdots+c_{nn}x_n \end{cases}$$

Ţinînd seama de (1) şi (2), obţinem:

$$(b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n)^2+\cdots+(b_{p1}x_1+b_{p2}x_2+\cdots+b_{pn}x_n)^2-$$
$$-(b_{p+1,1}x_1+b_{p+1,2}x_2+\cdots+b_{p+1,n}x_n)^2-\cdots-(b_{r1}x_1+b_{r2}x_2+\cdots+b_{rn}x_n)^2=$$
$$=(c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n)^2+\cdots+(c_{q1}x_1+c_{q2}x_2+\cdots+c_{qn}x_n)^2-$$
$$-(c_{q+1,1}x_1+c_{q+1,2}x_2+\cdots+c_{q+1,n}x_n)^2-\cdots-(c_{r1}x_1+c_{r2}x_2+\cdots+c_{rn}x_n)^2. \quad (3)$$

Considerăm $r-q+p<r$ ecuaţii:

$$\left.\begin{array}{l} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=0 \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{p1}x_1+b_{p2}x_2+\cdots+b_{pn}x_n=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} c_{q+1,1}x_1+c_{q+1,2}x_2+\cdots+c_{q+1,n}x_n=0 \\ c_{q+2,1}x_1+c_{q+2,2}x_2+\cdots+c_{q+2,n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{r1}x_1+c_{r2}x_2+\cdots+c_{rn}x_n=0. \end{array}\right\}$$

Acest sistem are o soluţie diferită de cea banală, fie $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$. Înlocuind în (3), avem

$$-(b_{p+1,1}\alpha_1+b_{p+1,2}\alpha_2+\cdots+b_{p+1,n}\alpha_n)^2-\cdots-(b_{r1}\alpha_1+b_{r2}\alpha_2+\cdots+b_{rn}\alpha_n)^2=$$
$$=(c_{11}\alpha_1+c_{12}\alpha_2+\cdots+c_{1n}\alpha_n)^2+\cdots+(c_{q1}\alpha_1+c_{q2}\alpha_2+\cdots+c_{qn}\alpha_n)^2.$$

Este clar că acestea necesită ca fiecare din paranteze să fie zero. Dacă nu, atunci nici unul din F sau G nu este nesingular, contrar ipotezei. Deci $q\leqslant p$. Repetînd raţionamentul pentru $q<p$, se ajunge din nou la o contradicţie deci $q=p$.

12. Dată fiind matricea

$$A=\begin{Vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$$

să se determine rădăcinile caracteristice şi vectorii invarianţi asociaţi.

R. Ecuaţia caracteristică este

$$\begin{Vmatrix} \lambda-2 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda-2 \end{Vmatrix}=\lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-5=0.$$

iar rădăcinile caracteristice sînt $\lambda_1=5$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=1$.

Dacă $\lambda=\lambda_1=5$, avem pentru $(\lambda I-A)X$

$$\begin{Vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}=0$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\| = 0,$$

deoarece matricele $\left\| \begin{matrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{matrix} \right\|$, $\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$ sînt echivalente.

O soluție este dată de $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; deci rădăcinii caracteristice $\lambda = 5$ îi corespunde vectorul $\| 1, 1, 1 \|'$ care generează un spațiu vectorial unidimensional. Orice vector $\| k, k, k \|'$ al acestui spațiu este un vector invariant al lui A.

Dacă $\lambda = \lambda_2 = 1$, avem

$$\left\| \begin{matrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\| = 0$$

sau

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$$

Avem două soluții liniar independente $(2, -1, 0)$ și $(1, 0, -1)$. Deci rădăcinii caracteristice $\lambda = 1$ i se asociază spațiul vectorial cu două dimensiuni generat de $X_1 = \| 2, -1, 0 \|'$, $X_2 = \| 1, 0, -1 \|'$. Orice vector $hX_1 + kX_2 = \| 2h + k, -h, -k \|'$ este un vector invariant al lui A.

13. Dacă λ este o matrice pătratică de ordin n, să se arate că

$$\Phi(\lambda) = | \lambda I - A | = \lambda^n + s_1\lambda^{n-1} + s_2\lambda^{n-2} + \cdots + s_{n-1}\lambda + (-1)^n | A |,$$

unde s_m, $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$, este $(-1)^m$ înmulțit cu suma tuturor minorilor principali pătratici de ordin m ai lui A.

Pentru

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{matrix} \right\|$$

să se determine rădăcinile caracteristice și spațiile vectoriale invariante.

R. Scriem $| \lambda I - A |$ sub forma

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 - a_{12} & \cdots & 0 - a_{1n} \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & 0 - a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 - a_{n1} & 0 - a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

și, fiecare element fiind un binom, presupunem că determinantul se poate exprima ca suma a 2^n determinanți. Unul din acești determinanți are pe λ ca element diagonal și zero în rest; valoarea lui este λ^n. Altul este fără λ; valoarea lui este $(-1)^n | A |$. Determinanții rămași au m coloane, $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$, din $-A$ și $n - m$ coloane fiecare conținînd un element λ.

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm unul din acești determinanți și presupunem că coloanele lor numerotate $i_1, i_2, \ldots, i_m$ sînt coloanele lui $-A$.

După transformări elementare acest determinant se scrie

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,i_1} & a_{i_1,i_2}\cdots a_{i_1,i_m} & & \\ a_{i_2,i_1} & a_{i_2,i_2}\cdots a_{i_2,i_m} & & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & 0 & \\ a_{i_m,i_1} & a_{i_m,i_2}\cdots a_{i_m,i_m} & & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ & & \lambda\ 0\ \cdots\ 0 & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & 0\ \lambda\ \cdots\ 0 & \\ a_{i_n,i_1} & a_{i_n,i_2}\cdots a_{i_n,i_m} & 0\ 0\ \cdots\ \lambda & \end{vmatrix} = (-1)^m \left| A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \right| \lambda^{n-m}$$

unde $\left| A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \right|$ este minorul pătratic de ordin m, principal al lui A.

Deci

$$s_m = (-1)^m \sum_{\rho} \left| A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \right|$$

$$\text{cu } \rho = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m}.$$

Pentru A dat în cazul particular avem:

$$s_1 = 1+0-2+6 = 5,$$

$$s_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 9,$$

$$s_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 7,$$

$$|A| = 2,$$

deci

$$|\lambda I - A| = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2.$$

Rădăcinile caracteristice sînt $1, 1, 1, 2$.

Pentru $\lambda = 2$ avem

$$\lambda I - A = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Această matrice are rangul 3. Spaţiul vectorial invariant asociat este generat de $\|2, 3, -2, -3\|'$.

Pentru $\lambda=1$, rezultă matricea

$$\lambda I-A=\begin{Vmatrix} 0 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -5 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

şi are rangul 3, deci spaţiul vectorial invariant asociat este generat de $\|3, 6, -4, -5\|'$.

14. Fie λ_1, X_1; λ_2, X_2; λ_3, X_3 rădăcinile caracteristice distincte şi vectorii invarianţi asociaţi matricei A.

Să se arate că X_1, X_2, X_3 sînt liniar independenţi.

R. Presupunem că aceşti vectori nu sînt liniar independenţi, deci există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nu toţi nuli astfel ca

$$\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\alpha_3X_3=0. \tag{1}$$

Înmulţind cu A şi ţinînd seama de faptul că $AX_i=\lambda_iX_i$, avem

$$\alpha_1AX_1+\alpha_2AX_2+\alpha_3AX_3=\alpha_1\lambda_1X_1+\alpha_2\lambda_2X_2+\alpha_3\lambda_3X_3=0. \tag{2}$$

Înmulţind acum (2) cu A, obţinem

$$\alpha_1\lambda_1^2X_1+\alpha_2\lambda_2^2X_2+\alpha_3\lambda_3^2X_3=0. \tag{3}$$

Scriem acum egalităţile (1), (2) şi (3) sub forma

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 & X_1 \\ \alpha_2 & X_2 \\ \alpha_3 & X_3 \end{Vmatrix} =0. \tag{4}$$

Dar

$$B=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

deci există B^{-1}. Înmulţind (4) cu B^{-1}, avem

$$\|\alpha_1X_1, \alpha_2X_2, \alpha_3X_3\|'=0,$$

de unde rezultă $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă că X_1, X_2, X_3 sînt liniar independenţi.

15. Să se arate că două matrice similare au aceleaşi rădăcini caracteristice.

R. Fie A şi $B=R^{-1}AR$ matricele similare. Atunci

$$\lambda I-B=\lambda I-R^{-1}AR=R^{-1}\lambda IR-R^{-1}AR=R^{-1}(\lambda I-A)R$$

şi

$$|\lambda I-B|=|R^{-1}|\cdot|\lambda I-A|\cdot|R|=|\lambda I-A|;$$

deci A şi B au aceleaşi ecuaţii caracteristice deci au aceleaşi rădăcini caracteristice.

16. Să se arate că dacă o matrice pătrată de ordinul n are n vectori invarianţi liniar independenţi, atunci este similară cu o matrice diagonală.

R. Fie vectorii liniar independenţi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ asociaţi cu rădăcinile caracteristice corespunzătoare $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ astfel încît $AX_i = \lambda_i X_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ şi fie $R = \| X_1, X_2, \ldots, X_n \|$. Atunci

$$AR = \| AX_1, AX_2, \ldots, AX_n \| = \| \lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \ldots, \lambda_n X_n \| =$$

$$= \| X_1, X_2, \ldots, X_n \| \cdot \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{Vmatrix} = R \text{ diag } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Rezultă

$$R^{-1} A R = \text{diag. } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

17. Să se determine o matrice nesingulară Q astfel ca $Q^{-1} AQ$ să fie triunghiulară, dacă

$$A = \begin{Vmatrix} 9 & -1 & 8 & -9 \\ 6 & -1 & 5 & -5 \\ -5 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & -4 \end{Vmatrix}.$$

R. Avem

$$| \lambda I - A | = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4)$$

şi rădăcinile caracteristice sînt $1, -1, 2, -2$. Obţinem $\|5, 5, -1, 3\|'$ un vector invariant corespunzător rădăcinii caracteristice 1 ca primă coloană a unei matrice nesingulare Q_1, iar celelalte coloane vectori elementari, adică

$$Q_1 = \begin{Vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Avem

$$Q_1^{-1} = \frac{1}{5} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \end{Vmatrix} \text{ şi } Q_1^{-1} AQ_1 = \frac{1}{5} \begin{Vmatrix} 5 & -1 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & -15 & 20 \\ 0 & 4 & -12 & 16 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{Vmatrix}.$$

O rădăcină caracteristică a lui A_1 este -1 şi vectorul invariant asociat este $\|4, 0, -1\|'$. Luăm

$$Q_2 = \begin{Vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$Q_2^{-1}A_1Q_2=\frac{1}{20}\left\|\begin{matrix}-20 & -15 & 20\\ 0 & -48 & 64\\ 0 & -11 & 48\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}-1 & B_2\\ 0 & A_2\end{matrix}\right\|.$$

O rădăcină caracteristică a lui A_2 este 2 şi un vector invariant asociat $\|8, 11\|'$. Luăm

$$Q_3=\left\|\begin{matrix}8 & 0\\ 11 & 1\end{matrix}\right\|$$

şi obţinem

$$Q_3^{-1}A_2Q_3=\left\|\begin{matrix}2 & 2/5\\ 0 & -2\end{matrix}\right\|.$$

Rezultă

$$Q=Q_1\cdot\left\|\begin{matrix}I_1 & 0\\ 0 & Q_2\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}I_2 & 0\\ 0 & Q_3\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}5 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 4 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 8 & 0\\ 3 & -1 & 11 & 1\end{matrix}\right\|$$

şi

$$Q^{-1}AQ=\left\|\begin{matrix}1 & 1 & -7 & -9/5\\ 0 & -1 & -5 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2/5\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{matrix}\right\|.$$

18. Să se determine o matrice unitară U astfel ca $U^{-1}AU$ să fie triunghiulară şi avînd ca elemente diagonale rădăcinile caracteristice ale matricei

$$A=\left\|\begin{matrix}5+5i & -1+i & -6-4i\\ -4-6i & 2-2i & 6+4i\\ 2+3i & -1+i & -3-2i\end{matrix}\right\|.$$

R. Ecuaţia caracteristică a lui A este

$$\lambda[\lambda^2+(-4-i)\lambda+5-i]=0$$

şi are rădăcinile caracteristice 0, $1-i$, $3+2i$.

Pentru $\lambda=0$, avem $\|1, -1, 1\|'$ ca vector invariant asociat şi formăm

$$Q_1=\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{matrix}\right\|.$$

Prin procedeul Gram-Schmidt obţinem matricea unitară

$$u_1=\left\|\begin{matrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\end{matrix}\right\|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă

$$U_1 A U_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -2(1-i) & -(26+24i)/\sqrt{6} \\ 0 & 1-i & (2+3i)/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3+2i \end{Vmatrix}$$

astfel că, pentru această alegere a lui Q_1 am obţinut matricea $U = U_1$.

§ 2. Calcul tensorial

1. Să se arate că fiecare din cantităţile 1° dx^k şi 2° $\dfrac{\partial \Phi(x^1, \ldots, x^N)}{\partial x^k}$ constituie componentele unui tensor şi să i se determine ordinul.

R. 1° Fie transformarea de coordonate $\bar{x}^j = \bar{x}^j(x^1, \ldots, x^N)$. Atunci

$$d\bar{x}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} dx^k.$$

Rezultă că dx^k este un tensor contravariant de ordinul întîi sau un vector contravariant.

2° Supusă transformării $x^k = x^k(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^N)$, Φ este o funcţie de x^k şi deci de $\bar{x}^j$, astfel că $\Phi(x^1, \ldots, x^N) = \bar{\Phi}(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^N)$, adică Φ este un scalar sau invariant. Avem

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \Phi}{\partial x^k},$$

deci $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x^k}$ este un tensor covariant de ordinul întîi sau un vector covariant.

Tensorul cu componentele $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x^k}$ este grad Φ sau $\vec{\nabla}\Phi$.

2. Un tensor covariant are componentele xy, $2y - z^2$, xz în coordonate rectangulare. Să se scrie componentele lui covariante în coordonate sferice.

R. Notăm cu a_j componentele covariante în coordonate rectangulare $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Atunci

$$a_1 = xy = x^1 x^2; \quad a_2 = 2y - z^2 = 2x^2 - (x^3)^2; \quad a_3 = xz = x^1 x^3.$$

Vom nota cu a'_k componentele covariante în coordonate sferice $y^1 = r$, $y^2 = \theta$, $y^3 = \varphi$. Atunci

$$a'_k = \frac{\partial x^j}{\partial y^k} a_j. \tag{1}$$

Avem

$$x^1=y^1 \sin y^2 \cos y^3$$
$$x^2=y^1 \sin y^2 \sin y^3$$
$$x^3=y^1 \cos y^2$$

Ţinînd seama de relaţiile (1), rezultă

$$a'_1=\frac{\partial x^1}{\partial y^1}\,a_1+\frac{\partial x^2}{\partial y^1}\,a_2+\frac{\partial x^3}{\partial y^1}\,a_3=(\sin y^2\cos y^3)\,(x^1x^2)+(\sin y^2\sin y^3)\,[2x^2-(x^3)^2]+$$
$$+\cos y^2\cdot x^1\cdot x^3=\sin\theta\cos\varphi\cdot(r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi)+(\sin\theta\sin\varphi)\,(2r\sin\theta\sin\varphi-r^2\cos^2\theta)+$$
$$+\cos\theta\,(r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi),$$

$$a'_2=\frac{\partial x^1}{\partial y^2}\,a_1+\frac{\partial x^2}{\partial y^2}\,a_2+\frac{\partial x^3}{\partial y^2}\,a_3=r^3\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi+$$
$$+r\cos\theta\sin\varphi\,(2r\sin\theta\cdot\sin\varphi-r^2\cos^2\theta)-r^3\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi.$$

3. Dacă a^i, b^j sînt componentele contravariante a doi vectori iar c_{ij} şi d^j_i tensori, să se arate:

1° $a^i c_{ij}$ sînt componentele unui vector covariant;

2° $c_{ij}a^i b^j$ şi $d^i_j\ a^i\ b_j$ sînt scalari.

R. Avem

$$1^\circ\quad a^i\cdot c_{ij}=\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\cdot\frac{\partial x'^h}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial x^j}\,a'^j\ c'_{hk}=\frac{\partial x'^k}{\partial x^j}\ \delta^h_j\ a'^j\ c'_{hk}$$

sau

$$a^i c_{ij}=\frac{\partial x'^k}{\partial x^j}\,a'^h c'_{hk}.$$

$$2^\circ\quad c_{ij}a^i b^j=\frac{\partial x'^h}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial x^j}\cdot c'_{hk}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\,a'^r\cdot\frac{\partial x^j}{\partial x'^s}\,b'^s=\delta^h_r\delta^k_s c'_{hk}a'^r b'^s=c'_{rs}a'^r b'^s,$$

$$d^j_i a^i b_j=\frac{\partial x^j}{\partial x'^h}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\,d'^h_k\,\frac{\partial x^i}{\partial x'^s}\,a'^s\,\frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\,b'_r=\delta^r_h\delta^k_s d'^h_k a'^s b'_r=a'^s b'_r d'^r_s.$$

4. Fie componentele a trei tensori a^{pq}_r, b^{pq}_r, b^s_t.

1° Să se calculeze tensorul sumă şi tensorul diferenţă dintre tensorii a^{pq}_r şi b^{pq}_r.

2° Să se arate că $a^{pq}_r\cdot b^s_t=c^{pqs}_{rt}$ sînt componentele unui tensor.

R. 1° a^{pq}_r şi b^{pq}_r fiind componentele a doi tensori avem

$$a'^{jk}_l=\frac{\partial x'^j}{\partial x^p}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial x^q}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}\,a^{pq}_r,\qquad(1)$$

$$b'^{jk}_l=\frac{\partial x'^j}{\partial x^p}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial x^q}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}\,b^{pq}_r.$$

Deci

$$(a_l'^{jk}+b_l'^{jk})=\frac{\partial x'^j}{\partial x^p}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial x^q}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}(a_r^{pq}+b_r^{pq})$$

şi

$$(a_l'^{jk}-b_l'^{jk})=\frac{\partial x'^j}{\partial x^p}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial x^q}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}(a_r^{pq}-b_r^{pq}).$$

Rezultă că $a_r^{pq}+b_r^{pq}$ şi $a_r^{pq}-b_r^{pq}$ sînt componentele unor tensori de acelaşi ordin şi tip.

2° Avem $b_n'^m=\frac{\partial x'^m}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^t}{\partial x'^n}b_t^s$. (2)

Deci (1) şi (2) prin înmulţire rezultă

$$a_l'^{jk}b_n'^m=\frac{\partial x'^j}{\partial x^p}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial x^q}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}\cdot\frac{\partial x'^m}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^t}{\partial x'^n}a_r^{pq}b_t^s.$$

Deci produsul $a_r^{pq}b_t^s$ constituie componentele unui tensor de ordinul cinci contravariant în indicii p, q, s şi covariant în indicii r, t.

5. Dacă o cantitate $A(p, q, r)$ este astfel încît într-un sistem de coordonate x^i, $A(p, q, r)B_r^{qs}=C_p^s$, unde B_r^{qs} sînt componentele unui tensor arbitrar şi C_p^s componentele altui tensor, să se arate că $A(p, q, r)$ sînt componentele unui tensor.

R. În transformarea de coordonate x'^i, $A'(j, k, l)\,B_l'^{km}=C_j'^m$.

Atunci

$$A'(j, k, l)\frac{\partial x'^k}{\partial x^q}\cdot\frac{\partial x'^m}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}B_r^{qs}=\frac{\partial x'^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^p}{\partial x'^j}C_p^s=\frac{\partial x'^m}{\partial x^s}\frac{\partial x^p}{\partial x'^j}\cdot A(p, q, r)B_r^{qs}$$

sau

$$\frac{\partial x'^m}{\partial x^s}\left[\frac{\partial x'^k}{\partial x^q}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}A'(j, k, l)-\frac{\partial x^p}{\partial x'^j}A(p, q, r)\right]B_r^{qs}=0.$$

Înmulţind cu $\frac{\partial x^n}{\partial x'^t}$ şi făcînd $t=m$ (sau multiplicînd interior cu $\frac{\partial x^n}{\partial x'^m}$), rezultă

$$\delta_s^n\left[\frac{\partial x'^k}{\partial x^q}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}A'(j, k, l)-\frac{\partial x^p}{\partial x'^j}A(p, q, r)\right]B_r^{qn}=0.$$

Deoarece B_r^{qn} este un tensor arbitrar, obţinem

$$\frac{\partial x'^k}{\partial x^q}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}A'(j, k, l)-\frac{\partial x^p}{\partial x'^j}A(p, q, r)=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțind interior cu $\frac{\partial x^q}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^n}{\partial x^r}$, rezultă

$$\delta^k_m\delta^n_l A'(j,k,l)-\frac{\partial x^p}{\partial x'^j}\cdot\frac{\partial x^q}{\partial x'^m}\cdot\frac{\partial x'^n}{\partial x^r}A(p,q,r)=0$$

sau

$$A'(j,m,n)=\frac{\partial x^p}{\partial x'^j}\cdot\frac{\partial x^q}{\partial x'^m}\cdot\frac{\partial x'^n}{\partial x^r}A(p,q,r),$$

deci $A(p,q,r)$ sînt componentele unui tensor.

6. Dacă A_i sînt componentele unui vector covariant, să se arate că

$$B_{ij}=\frac{\partial A_i}{\partial x^j}-\frac{\partial A_j}{\partial x^i}$$

sînt componentele unui tensor strîmb simetric covariant.

R. Prin schimbarea de variabile $x'^i=x'^i(x^1,\ldots,x^n)$, avem

$$B'_{ij}=\frac{\partial A'_j}{\partial x'^j}-\frac{\partial A'_j}{\partial x'^i}=\frac{\partial}{\partial x'^j}\left(A_h\frac{\partial x^h}{\partial x'^i}\right)-\frac{\partial}{\partial x'^i}\left(A_h\frac{\partial x^h}{\partial x'^j}\right)=$$

$$=\frac{\partial A_h}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\cdot\frac{\partial x^h}{\partial x'^i}+\frac{\partial^2 x^h}{\partial x'^j\partial x'^i}\cdot A_h-\frac{\partial A_h}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^h}{\partial x'^j}\cdot\frac{\partial^2 x^h}{\partial x'^i\partial x'^j}\cdot A_h=$$

$$=\left(\frac{\partial A_h}{\partial x^k}-\frac{\partial A_k}{\partial x^h}\right)\frac{\partial x^h}{\partial x'^i}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}=\frac{\partial x^h}{\partial x'^i}\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\cdot B_{hk}$$

Tensorul de componente B_{ij} se numește *rotorul* vectorului de componente A_i.

7. Fie A^{pq}_{rst} componentele unui tensor. Să se arate că

1° Dacă $p=t$, atunci A^{pq}_{rsp} determină un tensor. Care este ordinul său?

2° Alegînd $p=t$ și $q=s$, să se arate că A^{pq}_{rpq} determină un tensor și să se determine ordinul său.

R. 1° Deoarece A^{pq}_{rst} sînt componentele unui tensor, rezultă

$$A'^{jk}_{lmn}=\frac{\partial x'^j}{\partial x^p}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}\frac{\partial x^s}{\partial x'^m}\frac{\partial x^t}{\partial x'^n}A^{pq}_{rst}. \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Să arătăm că A^{pq}_{rsp} sînt componentele unui tensor. Punînd în (1) $n=j$ şi însumînd după j, avem

$$A'^{jk}_{lmj} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^p}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial x^q}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}\frac{\partial x^s}{\partial x'^m}\cdot\frac{\partial x^t}{\partial x'^j}A^{pq}_{rst} =$$

$$= \frac{\partial x^t}{\partial x'^j}\cdot\frac{\partial x'^j}{\partial x^p}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}\frac{\partial x^s}{\partial x'^m}A^{pq}_{rst} = \delta^t_p\frac{\partial x'^k}{\partial x^q}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial x'^m}A^{pq}_{rst} =$$

$$= \frac{\partial x'^k}{\partial x^q}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}\frac{\partial x^s}{\partial x'^m}A^{pq}_{rsp},$$

deci A^{pq}_{rsp} sînt componentele unui tensor de ordinul 3 şi poate fi notat cu B^q_{rs}. Procesul de a pune un indice contravariant egal cu un indice covariant într-un tensor şi însumînd se numeşte *contracţie*.

2° Făcînd în (1) $j=n$ şi $k=m$ şi sumînd după j şi k, avem

$$A'^{jk}_{lkj} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^p}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial x^q}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial x'^k}\cdot\frac{\partial x^t}{\partial x'^j}A^{pq}_{rst} =$$

$$= \frac{\partial x^t}{\partial x'^j}\cdot\frac{\partial x'^j}{\partial x^p}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial x'^k}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial x^q}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}A^{pq}_{rst} = \delta^t_p\delta^s_q\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}A^{pq}_{rst} = \frac{\partial x^r}{\partial x'^l}A^{pq}_{rqp}.$$

Rezultă deci că A^{pq}_{rqp} sînt componentele unui tensor de ordinul întîi care pot fi notate cu C_r.

8. Să se exprime în notaţie matriceală ecuaţiile de transformare pentru

1° un vector covariant,

2° un tensor contravariant de ordinul doi, presupunînd $N=3$.

R. 1° Sistemul de ecuaţii $A'_p = \frac{\partial x^q}{\partial x'^p}A_q$ se poate scrie sub forma

$$\begin{Vmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Vmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\| A'_1 A'_2 A'_3 \| = \| A_1 A_2 A_3 \| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} \end{matrix} \right\|$$

2° Ecuaţiile $A'^{pr} = \frac{\partial x'^p}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial x'^r}{\partial x^s} A^{qs}$ pot fi scrise sub forma

$$\left\| \begin{matrix} A^{-11} & A^{-12} & A^{-13} \\ A^{-21} & A^{-22} & A^{-23} \\ A^{-31} & A^{-32} & A^{-33} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} \end{matrix} \right\|$$

Rezultatul poate fi extins pentru $N > 3$.

9. Se consideră reţeaua din fig. III.9, *a* în care la timpul $t=0$ curenţii şi sarcinile pe ramuri sînt nuli. Alegînd arbitrar sistemul de noduri reprezentat în fig. III.9, *b*, să se determine matricea de conexiune.

$$I^1 = I'^1 + I'^2 + I'^3, \qquad I^5 = -I'^1,$$
$$I^2 = I'^1 + I'^3 - I'^4, \qquad I^6 = I'^2,$$
$$I^3 = I'^3, \qquad I^7 = I'^4,$$
$$I^4 = I'^2 + I'^3, \qquad I^8 = I'^2.$$

R. Avem numărul de subreţele $s=2$, numărul de braţe $B=8$, numărul de noduri $N=5$, numărul maxim de perechi de noduri liniar independent $P=3$ iar numărul maxim de ochiuri liniar independente $M=B-P=5$.

Din (1) rezultă

$$\| C \| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, tensiunile electromotoare între ochiuri sînt

$$\| E' \| = \| C \|' \| E \|$$

sau

$$E'^1 = E^1 + E^2 + E^3, \qquad E'^4 = -E^2 + E^7,$$
$$E'^2 = E^1 + E^4 + E^6, \qquad E'^5 = E^8.$$
$$E'^3 = E^1 + E^2 + E^3 + E^4,$$

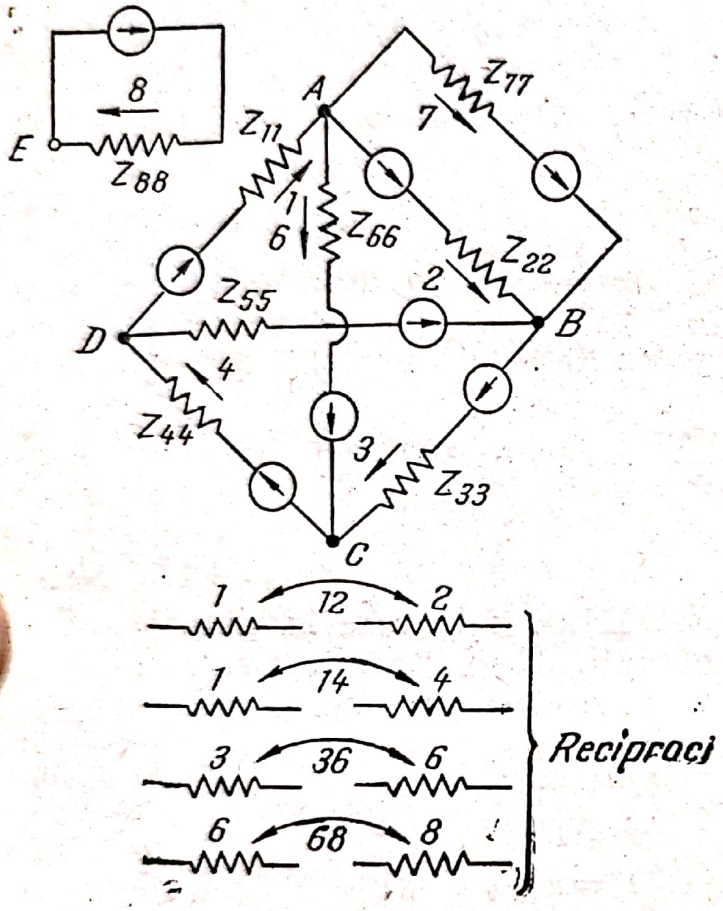


Fig. III.9, *a*

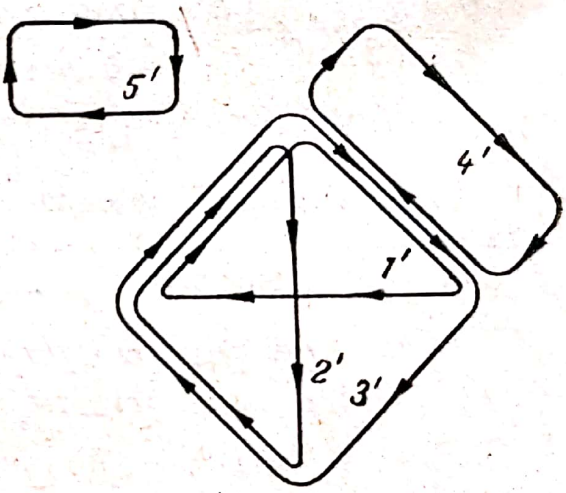


Fig. III.9, *b*

Matricea impedanţelor de linie se construieşte fără dificultate:

$$\| Z \| = \begin{Vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & 0 & Z_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_{12} & Z_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{33} & 0 & 0 & Z_{36} & 0 & 0 \\ Z_{14} & 0 & 0 & Z_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{36} & 0 & 0 & Z_{66} & 0 & Z_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{77} & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & Z_{68} & 0 & Z_{88} \end{Vmatrix}$$

Matricea impedanţelor de ochiuri va fi dată prin

$$\| Z' \| = \| C \|' \cdot \| Z \| \cdot \| C \|,$$

adică

$$\|Z'\| =$$

$$\begin{vmatrix} Z_{11}+2Z_{12}+Z_{22}+Z_{55} & Z_{11}+Z_{12}+Z_{14} & Z_{11}+2Z_{12}+Z_{14}+Z_{22} & -(Z_{12}+Z_{22}) & 0 \\ Z_{11}+Z_{12}+Z_{14} & Z_{11}+2Z_{14}+Z_{44}+Z_{66} & Z_{11}+Z_{12}+2Z_{14}+Z_{36}+Z_{44} & -Z_{12} & Z_{68} \\ Z_{11}+2Z_{12}+Z_{14}+Z_{22} & Z_{11}+Z_{12}+2Z_{14}+Z_{36}+Z_{44} & Z_{11}+2Z_{12}+2Z_{14}+Z_{22}+Z_{32}+Z_{44} & -(Z_{12}+Z_{22}) & 0 \\ -(Z_{12}+Z_{22}) & -Z_{12} & -(Z_{12}+Z_{22}) & Z_{22}+Z_{77} & 0 \\ 0 & Z_{68} & 0 & 0 & Z_{88} \end{vmatrix}$$

10. Să se deducă legile de transformare pentru simbolurile lui Christoffel de prima și a doua speță.

R. Deoarece

$$g'_{jk} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} g_{pq},$$

rezultă

$$\frac{\partial g'_{jk}}{\partial x'^m} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} + \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \frac{\partial^2 x^q}{\partial x'^m \partial x'^k} g_{pq} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^m \partial x'^j} \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} g_{pq}. \quad (1)$$

Prin permutări circulare ale indicilor j, k, m și p, q, r, obținem

$$\frac{\partial g'_{km}}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} \cdot \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} + \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^j \partial x'^m} g_{qr} + \frac{\partial^2 x^q}{\partial x'^j \partial x'^k} \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} g_{qr}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial g'_{mj}}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial g_{rp}}{\partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} + \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} \cdot \frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^k \partial x'^j} g_{rp} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^k \partial x'^m} \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} g_{rp}. \quad (3)$$

Scăzînd (1) din suma lui (2) și (3) și înmulțind cu $\frac{1}{2}$, obținem, utilizînd definiția simbolurilor lui Christoffel de prima speță

$$\Gamma'_{jkm} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} \Gamma_{pqr} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^j \partial x'^k} \frac{\partial x^q}{\partial x'^m} g_{pq}. \quad (4)$$

Înmulțind (4) prin $g'^{nm} = \frac{\partial x'^n}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x'^m}{\partial x^t} g^{st}$, obținem

$$g'^{nm}\Gamma'_{jkm} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} \cdot \frac{\partial x'^n}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x'^m}{\partial x^t} g^{st}\Gamma_{pqr} +$$

$$+ \frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^j \partial x'^k} \frac{\partial x^q}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^s} \frac{\partial x'^m}{\partial x^t} g^{st} g_{pq}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă

$$\Gamma'^{n}_{jk}=\frac{\partial x^p}{\partial x'^j}\cdot\frac{\partial x^q}{\partial x'^k}\cdot\frac{\partial x'^n}{\partial x^s}\cdot\delta^r_t g^{st}\Gamma_{pqr}+\frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^j\partial x'^k}\cdot\frac{\partial x'^n}{\partial x^s}\,\delta^q_t\, g^{st}g_{pq}=$$

$$=\frac{\partial x^p}{\partial x'^j}\cdot\frac{\partial x^q}{\partial x'^k}\cdot\frac{\partial x'^n}{\partial x^s}\;\Gamma^s_{pq}+\frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^j\partial x'^k}\;\frac{\partial x'^n}{\partial x^p},$$

deoarece

$$\delta^r_t g^{st}\Gamma_{pqr}=g^{sr}\Gamma_{pqr}=\Gamma^s_{pq}\quad\text{şi}\quad\delta^q_t g^{st}g_{pq}=g^{sq}g_{pq}=\delta^s_p.$$

11. Să se calculeze simbolurile lui Christoffel de speţa a doua:
1° în sistemul de coordonate polare în plan definit prin ecuaţiile

$$\left.\begin{aligned}x'^1&=x^1\cos x^2\\x'^2&=x^1\sin x^2\end{aligned}\right\}$$

2° în coordonate sferice.

R. 1° Avem

$$g_{11}=\left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial x'^2}{\partial x^1}\right)^2=(\cos x^2)^2+(\sin x^2)^2=1,$$

$$g_{12}=g_{21}=\frac{\partial x'^1}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial x'^1}{\partial x^2}+\frac{\partial x'^2}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial x'^2}{\partial x^2}=(\cos x^2)\,(-x^1\sin x^2)+(\sin x^2)\,(x^1\cos x^2)=0.$$

$$g_{22}=\left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial x'^2}{\partial x^2}\right)^2=(-x^1\sin x^2)^2+(x^1\cos x^2)^2=(x^1)^2.$$

Deoarece sistemul de coordonate polare este ortogonal, avem $g_{ij}=\dfrac{1}{g^{ij}}$, deci

$$g^{11}=1,\quad g^{12}=g^{21}=0,\quad g^{22}=\frac{1}{(x^1)^2}.$$

Aplicînd formula

$$\Gamma^j_{ik}=\frac{1}{2}\,g^{ji}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^l}\right),\quad i,\ j,\ k,\ l=1,\ 2,$$

obţinem

$$\Gamma^1_{1l}=\frac{1}{2}\,g^{11}\left(\frac{\partial g_{1l}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{l1}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^l}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\,g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right)+\frac{1}{2}\,g^{12}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right)=0,\qquad(l=1,\ 2).$$

Analog

$$\Gamma^2_{11}=\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\Gamma^2_{22}=0,\quad \Gamma^1_{22}=-x^1,\quad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{1}{x^1}.$$

Se obțineau aceleași rezultate utilizînd formula

$$\Gamma^j_{ik}=\frac{\partial x^j}{\partial x'^\alpha}\cdot\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^i\partial x^k},\quad \alpha, i, j, k=1, 2.$$

(Coordonatele x^α sînt rectilinii).

2° În coordonate sferice avem

$$\left.\begin{aligned} x'^1&=x^1\cos x^2\sin x^3\\ x'^2&=x^1\sin x^2\sin x^3\\ x'^3&=x^1\cos x^3.\end{aligned}\right\},\quad (x^1=r,\ x^2=\theta,\ x^3=\varphi).$$

Avem

$$g_{11}=1,\ g_{22}=r^2,\ g_{33}=r^2\sin^2\theta \text{ și } g_{jk}=0 \text{ pentru } j\neq k.$$

Printr-un calcul analog se obțin

$$\Gamma^1_{22}=-\frac{1}{2g_{11}}\cdot\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=-\frac{1}{2}\frac{\partial(r^2)}{\partial r}=-r;\quad \Gamma^2_{21}=\Gamma^2_{12}=\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=\frac{1}{2r^2}\frac{\partial(r^2)}{\partial r}=\frac{1}{r};$$

$$\Gamma^1_{33}=-\frac{1}{2g_{11}}\cdot\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}=-r\sin^2\theta;\qquad \Gamma^2_{33}=-\frac{1}{2g_{22}}\cdot\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}=-\sin\theta\cdot\cos\theta;$$

$$\Gamma^3_{31}=\Gamma^3_{13}=\frac{1}{2g_{33}}\cdot\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}=\frac{1}{r};\qquad \Gamma^3_{32}=\Gamma^3_{23}=\frac{1}{2g_{33}}\cdot\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}=\operatorname{ctg}\theta.$$

12. Să se demonstreze că:

1° $$\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}=\Gamma_{pmq}+\Gamma_{qmp};$$

2° $$\frac{\partial g^{pq}}{\partial x^m}=-g^{pn}\Gamma^q_{mn}-g^{qn}\Gamma^p_{mn};$$

3° $$\Gamma^p_{pq}=\frac{\partial}{\partial x^q}(\ln\sqrt{g}),\quad \text{unde } g=\det\|g_{jk}\|.$$

R. 1° Avem

$$\Gamma_{pmq}+\Gamma_{qmp}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mq}}{\partial x^p}-\frac{\partial g_{pm}}{\partial x^q}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mp}}{\partial x^q}-\frac{\partial g_{qm}}{\partial x^p}\right)=\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}.$$

2° $\frac{\partial}{\partial x^m}(g^{jk}g_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x^m}(\delta_i^k) = 0$. Atunci

$$g^{jk} \cdot \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} + \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m} g_{ij} = 0 \quad \text{sau} \quad g_{ij} \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m} = -g^{jk} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}.$$

Înmulţind cu g^{ir}, obţinem

$$g^{ir} g_{ij} \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m} = -g^{ir} g^{jk} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m},$$

adică

$$\delta_j^r \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m} = -g^{ir} g^{jk} (\Gamma_{imj} + \Gamma_{jmi})$$

sau

$$\frac{\partial g^{rk}}{\partial x^m} = -g^{ir} \Gamma_{im}^k - g^{jk} \Gamma_{jm}^r.$$

Înlocuind r, k, i, j prin p, q, n, m, se obţine relaţia de la 2°.

3° Scriem $g = g_{jk} G(j, k)$ unde $G(j, k)$ este complementul algebric al elementului g_{jk} din determinantul g. Deoarece $G(j, k)$ nu conţine explicit g_{jk}, avem $\frac{\partial g}{\partial g_{jr}} = G(j, r)$. Însumînd după j şi r

$$\frac{\partial g}{\partial x^m} = \frac{\partial g}{\partial g_{jr}} \cdot \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} = G(j, r) \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} = g \cdot g^{jr} \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} =$$
$$= g \cdot g^{jr} (\Gamma_{jmr} + \Gamma_{rmj}) = g(\Gamma_{jm}^j + \Gamma_{rm}^r) = 2 g \Gamma_{jm}^j.$$

Deci

$$\frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^m} = \Gamma_{jm}^j \quad \text{sau} \quad \Gamma_{jm}^j = \frac{\partial}{\partial x^m} (\ln \sqrt{g}).$$

Înlocuind j prin p şi m prin q, avem rezultatul direct.

13. Dacă A_p şi A^p sînt componentele a doi vectori, să se arate că derivatele lor covariante în raport cu x^q:

1° $$A_{p,q} \equiv \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \Gamma_{pq}^s A_s,$$

2° $$A_{,q}^p \equiv \frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \Gamma_{qs}^p A^s$$

sînt tensori.

R. 1° Deoarece

$$A'_j = \frac{\partial x^r}{\partial x'^j} A_r,$$

$$\frac{\partial A'_j}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^r}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial x^t} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^j \partial x'^k} A_r. \tag{1}$$

Avem

$$\Gamma'^n_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x'^n}{\partial x^s} \Gamma^s_{il} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^k} \frac{\partial x'^n}{\partial x^i}.$$

Înmulțind această relație cu $\frac{\partial x^r}{\partial x'^n}$, rezultă

$$\Gamma'^n_{jk} \frac{\partial x^r}{\partial x'^n} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \delta^r_s \Gamma^s_{il} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^k} \delta^r_i,$$

deci

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^j \partial x'^k} = \Gamma'^n_{jk} \frac{\partial x^r}{\partial x'^n} - \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \Gamma^r_{il}.$$

Înlocuind în (1), obținem

$$\frac{\partial A'_j}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^r}{\partial x'^j} \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial x^t} + \Gamma'^n_{jk} \frac{\partial x^r}{\partial x'^n} A_r - \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \Gamma^r_{il} A_r =$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \frac{\partial A_p}{\partial x^q} + \Gamma'^n_{jk} A'_n - \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \Gamma^s_{pq} As$$

sau

$$\frac{\partial A'_j}{\partial x'^k} - \Gamma'^n_{jk} A'_n = \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \Gamma^s_{pq} A_s \right).$$

Rezultă că $\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \Gamma^s_{pq} \cdot A_s$ sînt componentele unui tensor covariant de ordinul doi.

2° Avem

$$A'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^r} A^r.$$

Rezultă

$$\frac{\partial A'^j}{\partial x'^k} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial A^r}{\partial x^t} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} + \frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^r \partial x^t} \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} A^r. \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind aici

$$\frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^r \partial x^t} = \Gamma^n_{rt}\frac{\partial x'^j}{\partial x^n} - \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}\cdot\frac{\partial x'^l}{\partial x^t}\Gamma'^j_{il},$$

obţinem

$$\frac{\partial A'^j}{\partial x'^k} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^r}\cdot\frac{\partial x^t}{\partial x'^k}\frac{\partial A^r}{\partial x^t} + \Gamma^n_{rt}\frac{\partial x'^j}{\partial x^n}\cdot\frac{\partial x^t}{\partial x'^k}A^r - \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}\cdot\frac{\partial x'^l}{\partial x^t}\cdot\frac{\partial x^t}{\partial x'^k}\Gamma'^j_{il}A^r =$$

$$= \frac{\partial x'^j}{\partial x^r}\cdot\frac{\partial x^t}{\partial x'^k}\frac{\partial A^r}{\partial x^t} + \Gamma^n_{rt}\frac{\partial x'^j}{\partial x^n}\frac{\partial x^t}{\partial x'^k}A^r - \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}\delta^l_k\Gamma'^j_{il}A^r =$$

$$= \frac{\partial x'^j}{\partial x^p}\cdot\frac{\partial x^q}{\partial x'^k}\cdot\frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \Gamma^p_{sq}\frac{\partial x'^j}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial x'^k}A^s - \Gamma'^j_{ik}A'^i$$

sau

$$\frac{\partial A'^j}{\partial x'^k} + \Gamma'^j_{ki}A'^i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^p}\cdot\frac{\partial x^q}{\partial x'^k}\left(\frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \Gamma^p_{qs}A^s\right).$$

Rezultă deci că $\frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \Gamma^p_{qs}A^s$ sînt componentele unui tensor mixt de ordinul doi.

14. Să se calculeze derivata covariantă a lui $A^i_k B^{lm}_n$ în raport cu x^q.

R. Avem

$$(A^i_k B^{lm}_n)_{,q} = \frac{\partial (A^i_k B^{lm}_n)}{\partial x^q} - \Gamma^s_{kq}A^i_s B^{lm}_n - \Gamma^s_{nq}A^i_k B^{lm}_s +$$

$$+ \Gamma^j_{qs}A^s_k B^{lm}_n + \Gamma^l_{qs}A^i_k B^{sm}_n + \Gamma^m_{qs}A^i_k B^{ls}_n =$$

$$= \left(\frac{\partial A^i_k}{\partial x^q} - \Gamma^s_{kq}A^i_s + \Gamma^j_{qs}A^s_k\right)B^{lm}_n + A^i_k\left(\frac{\partial B^{lm}_n}{\partial x^q} - \Gamma^s_{nq}B^{lm}_s + \Gamma^l_{qs}B^{sm}_n + \Gamma^m_{qs}B^{ls}_n\right) =$$

$$= A^i_{k,q}B^{lm}_n + A^i_k B^{lm}_{n,q}.$$

15. Să se demonstreze:

$$1^\circ \quad \operatorname{div} A^p = \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k),$$

$$2^\circ \quad \Delta\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{kr}\frac{\partial\Phi}{\partial x^r}\right)$$

şi să se scrie expresiile lor în coordonate cilindrice şi sferice.

R. 1° Divergența lui A^p se obține prin contracția derivatei covariante a lui A^p, adică contracția lui $A^p_{,p}$. Avem deci

$$\operatorname{div} A^p = A^p_{,p} = \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \Gamma^p_{pk} A^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \ln \sqrt{g}\right) A^k =$$

$$= \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k}\right) A^k + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} A^k). \tag{1}$$

În coordonate cilindrice $x^1=\rho$, $x^2=\varphi$, $x^3=z$,

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2 \text{ și } \sqrt{g} = \rho.$$

Notînd componente fizice cu A_ρ, A_φ, A_z, avem

$$A_\rho = \sqrt{g_{11}} A^1 = A^1, \quad A_\varphi = \sqrt{g_{22}} A^2 = \rho A^2, \quad A_z = \sqrt{g_{33}} A^3 = A^3,$$

deci din (1) rezultă

$$\operatorname{div} A^p = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho A_z)\right].$$

În coordonate sferice $x^1=r$, $x^2=\theta$, $x^3=\varphi$,

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = r^4 \sin^2 \theta \text{ și } \sqrt{g} = r^2 \sin \theta;$$

$$A_r = \sqrt{g_{11}} A^1 = A^1, \quad A_\theta = \sqrt{g_{22}} A^2 = r A^2, \quad A_\varphi = \sqrt{g_{23}} A^3 = r \sin \theta \, A^3,$$

deci

$$\operatorname{div} A^p = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \, A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \, A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\varphi)\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta \, A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}.$$

2° Cantitățile $\operatorname{grad} \Phi = \vec{\nabla} \Phi = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^r}$ sînt componentele unui vector covariant. Definit ca derivata covariantă a lui Φ scriem $\Phi_{,r}$. Vectorul covariant asociat cu $\Phi_{,r}$ are componentele $A^k = g^{kr} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^r}$.

Utilizînd rezultatul de la punctul 1°, avem

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} \left(g^{kr} \frac{\partial \Phi}{\partial x^r}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g} g^{kr} \frac{\partial \Phi}{\partial x^r}\right).$$

În coordonate cilindrice $g^{11}=1$, $g^{22}=\frac{1}{\rho^2}$, $g^{33}=1$, deci

$$\Delta\Phi=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

În coordonate sferice $g^{11}=1$, $g^{22}=\frac{1}{r^2}$, $g^{33}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}$, deci

$$\Delta\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}.$$

16. Să se calculeze derivatele intrinseci ale tensorilor consideraţi ca funcţii diferenţiabile de t:

1° Invariantul Φ; 2° A^j; 3° A^j_k; 4° A^{jk}_{lmn}.

R. 1°
$$\frac{\delta\Phi}{\delta t}=\Phi_{,q}\frac{dx^q}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial x^q}\frac{dx^q}{dt}=\frac{d\Phi}{dt},$$

2°
$$\frac{\delta A^j}{\delta t}=A^j_{,q}\frac{dx^q}{dt}=\left(\frac{\partial A^j}{\partial x^q}+\Gamma^j_{qs}A^s\right)\frac{dx^q}{dt}=\frac{\partial A^j}{\partial x^q}\frac{dx^q}{dt}+$$

$$+\Gamma^j_{qs}A^s\frac{dx^q}{dt}=\frac{dA^j}{dt}+\Gamma^j_{qs}A^s\frac{dx^q}{dt}.$$

3°
$$\frac{\delta A^j_k}{\delta t}=A^j_{k,q}\frac{dx^q}{dt}=\left(\frac{\partial A^j_k}{\partial x^q}-\Gamma^s_{kq}A^j_s+\Gamma^j_{qs}A^s_k\right)\frac{dx^q}{dt}=$$

$$=\frac{dA^j_k}{dt}-\Gamma^s_{kq}A^j_s\frac{dx^q}{dt}+\Gamma^j_{qs}A^s_k\frac{dx^q}{dt}.$$

4°
$$\frac{\delta A^{jk}_{lmn}}{\delta t}=A^{jk}_{lmn,q}\frac{dx^q}{dt}=\left(\frac{\partial A^{jk}_{lmn}}{\partial x^q}-\Gamma^s_{lq}A^{jk}_{smn}-\Gamma^s_{mq}A^{jk}_{lsn}-\right.$$

$$\left.-\Gamma^s_{nq}A^{jk}_{lms}+\Gamma^i_{qs}A^{sk}_{lmn}+\Gamma^k_{qs}A^{js}_{lmn}\right)\frac{dx^q}{dt}=$$

$$=\frac{dA^{jk}_{lmn}}{dt}-\Gamma^s_{lq}A^{jk}_{smn}\frac{dx^q}{dt}-\Gamma^s_{mq}A^{jk}_{lsn}\frac{dx^q}{dt}-\Gamma^s_{nq}A^{jk}_{lms}\frac{dx^q}{dt}+$$

$$+\Gamma^j_{qs}A^{sk}_{lmn}\frac{dx^q}{dt}+\Gamma^k_{qs}A^{js}_{lmn}\frac{dx^q}{dt}.$$

Scanned with OKEN Scanner

17. Să se arate că

1° $A_{p,qr}-A_{p,rq}=R^n_{pqr}A_n$, A_n fiind un tensor covariant arbitrar de ordinul întîi, şi să se arate că R^n_{pqr} este tensor.

2° $R_{pqrs}=g_{ns}R^n_{pqr}$ este tensor.

R. 1°
$$A_{p,qr}=(A_{p,q})_{,r}=\frac{\partial A_{p,q}}{\partial x^r}-\Gamma^j_{pr}A_{j,q}-\Gamma^j_{qr}A_{p,j}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q}-\Gamma^j_{pq}A_j\right)-\Gamma^j_{pr}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x^q}-\Gamma^k_{jq}A_k\right)-\Gamma^j_{qr}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^j}-\Gamma^l_{pj}A_l\right)=$$
$$=\frac{\partial^2 A_p}{\partial x^r\partial x^q}-\frac{\partial\Gamma^j_{pq}}{\partial x^r}A_j-\Gamma^j_{pq}\frac{\partial A_j}{\partial x^q}+\Gamma^j_{pr}\Gamma^k_{jq}A_k-\Gamma^j_{qr}\frac{\partial A_p}{\partial x^j}+\Gamma^j_{qr}\Gamma^l_{pj}A_l.$$
$$A_{p,qr}-A_{p,rq}=\Gamma^j_{pr}\Gamma^k_{jq}A_k-\frac{\partial\Gamma^j_{pq}}{\partial x^r}A_j-\Gamma^j_{pq}\Gamma^k_{jr}A_k+\frac{\partial\Gamma^j_{pr}}{\partial x^q}A_j=$$
$$=\Gamma^k_{pr}\Gamma^j_{kq}A_j-\frac{\partial\Gamma^j_{pq}}{\partial x^r}A_j-\Gamma^k_{pq}\Gamma^j_{kr}A_j+\frac{\partial\Gamma^j_{pr}}{\partial x^q}A_j=R^j_{pqr}A_j,$$

unde
$$R^j_{pqr}=\Gamma^k_{pr}\Gamma^j_{kq}-\frac{\partial\Gamma^j_{pq}}{\partial x^r}-\Gamma^k_{pq}\Gamma^j_{kr}+\frac{\partial\Gamma^j_{pr}}{\partial x^q}.$$

Înlocuind j cu n, obţinem rezultatul dorit.

Deoarece $A_{p,qr}-A_{p,rq}$ este un tensor, $R^n_{pqr}A_n$ este un tensor; şi deoarece A_n este un tensor arbitrar, R^n_{pqr} este un tensor fiind cîtul a doi tensori. Acest tensor se numeşte *tensorul Riemann-Christoffel* şi se mai poate scrie $R^n_{\cdot pqr}$, $R^{\cdot\cdot\cdot n}_{pqr\cdot}$, sau simplu R^n_{pqr}.

2° $R_{pqrs}=g_{ns}R^n_{pqr}$ este tensorul asociat lui R^n_{pqr}, deci este un tensor. El se numeşte *tensorul de curbură covariant* şi este de importanţă fundamentală în teoria generală a relativităţii a lui Einstein.

18. Dacă energia cinetică T a unei particule de masă constantă M care se mişcă cu o viteză v este $T=\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}Mg_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q$, să se demonstreze că
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}^k}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^k}=Ma_k,$$
unde a_k sînt componentele covariante ale acceleraţiei.

R. Avem
$$\frac{\partial T}{\partial x^k}=\frac{1}{2}M\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q,\quad\frac{\partial T}{\partial\dot{x}^k}=Mg_{kq}\dot{x}^q$$
şi
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}^k}\right)=M\left(g_{kq}\ddot{x}^q+\frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j}\dot{x}^j\dot{x}^q\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^k}=M\left(g_{kq}\ddot{x}^q+\frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j}\dot{x}^j\dot{x}^q-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q\right)=$$

$$=M\left[g_{kq}\ddot{x}^q+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kq}}{\partial x^p}+\frac{\partial g_{kp}}{\partial x^q}-\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^p\dot{x}^q\right]=$$

$$=M(g_{kq}\ddot{x}^q+\Gamma_{pqk}\dot{x}^p\dot{x}^q)=Mg_{kr}(\ddot{x}^r+\Gamma^r_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q)=Mg_{kr}a^r=Ma_k,$$

deoarece

$$a^r=\frac{\delta v^r}{\delta t}=\frac{d^2x^r}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^r_{pq}\frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}t}.$$

În cazul în care forţa $F_k=Ma_k$ derivă dintr-un

$$F_k=-\frac{\partial V}{\partial x^k},$$

funcţia V reprezentînd energia potenţială a particulei, ecuaţia lui Lagrange ia forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^k}+\frac{\partial V}{\partial x^k}=0.$$

19. O masă punctuală m este supusă la o mişcare fără frecare pe suprafaţa unui tor. Să se calculeze energia sa cinetică şi ecuaţiile diferenţiale de mişcare, dacă ea este supusă unei singure forţe, forţa gravitaţională g, acţionînd paralel cu axa torului (axa Ox^3, fig. III.19).

R. Să considerăm coordonatele torice definite prin ecuaţiile

$$\overline{x}^1=(a+x^1\cos x^2)\cos x^3,$$
$$\overline{x}^2=(a+x^1\cos x^2)\sin x^3,$$
$$\overline{x}^3=x^1\sin x^2.$$

Se calculează uşor

$g_{11}=1$; $g_{22}=(x^1)^2$, $g_{33}=(a+x^1\cos x^2)^2$, $g_{ij}=0$ pentru $i\neq j$ deoarece aceste coordonate sînt ortogonale.

Fie o metrică definită prin

$$\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}x^1)^2+(x^1)^2(\mathrm{d}x^2)^2+(a+x^1\cos x^2)^2(\mathrm{d}x^3)^2.$$

Dacă impunem particulei să se mişte pe torul $x^1=b$, trecem de la spaţiul euclidian cu 3 dimensiuni la un spaţiu cu două dimensiuni constituit din suprafaţa torului; acest spaţiu este riemannian şi are metrica

$$\mathrm{d}s^2=(b)^2(\mathrm{d}x^2)^2+(a+b\cos x^2)^2(\mathrm{d}x^3)^2,$$

iar tensorul metric fundamental este

$$G_{22}=(b)^2,\ G_{33}=(a+b\cos x^2)^2,\ G_{23}=G_{32}=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Energia cinetică a particulei este

$$T=\frac{1}{2}m\,G_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j= \qquad (i,\,j=2,\,3)$$

$$=\frac{1}{2}m\,(b)^2\,(\dot{x}^2)^2+\frac{1}{2}m\,(a+b\cos x^2)^2(\dot{x}^3)^2.$$

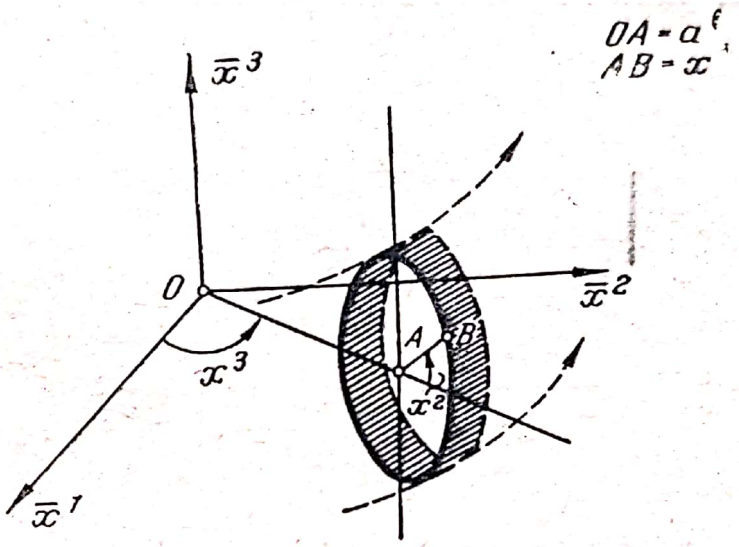


Fig. III.19

Forța aplicată derivă dintr-un potențial:

$$X_1=0,\quad X_2=0,\quad X_3=-mg,$$

adică

$$V=mg\bar{x}^3=mgb\sin x^2.$$

Avem

$$\frac{\partial V}{\partial x^2}=mgb\cos x^2, \qquad \frac{\partial V}{\partial x^3}=0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^2}=m(b)^2\dot{x}^2, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^2}\right)=m\,(b)^2\ddot{x}^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x^2}=-mb\,(a+b\cos x^2)\sin x^2\cdot(\dot{x}^3)^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^3}=m\,(a+b\cos x^2)^2\dot{x}^3,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^3}\right)=m\,(a+b\cos x^2)^2\ddot{x}^3-2\,mb\,(a+b\cos x^2)\sin x^2(\dot{x}^2\dot{x}^3),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x^3}=0.$$

Ecuaţiile diferenţiale vor fi

$$b\ddot{x}^2(a+b\cos x^2)\sin x^2\cdot(\dot{x}^3)^2+g\cos x^2=0,$$
$$(a+b\cos x^2)\ddot{x}^3-2\,b(a+b\cos x^2)\sin x^2\cdot(\dot{x}^2\dot{x}^3)=0.$$

20. Fie o bară omogenă de masă m şi moment de inerţie I în raport cu centrul său de greutate (fig. III.20, axele de inerţie sînt perpendiculare în G în planul figurii). Presupunînd că bara este supusă unei

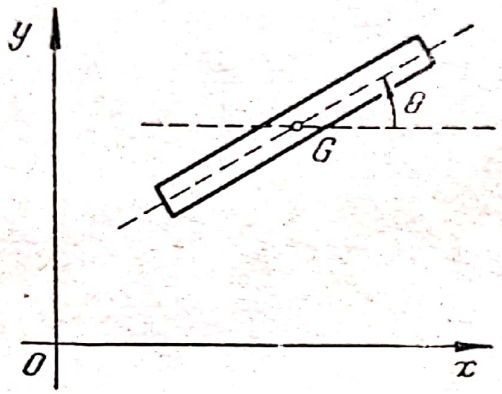


Fig. III.20

mişcări în planul xOy, să se determine ecuaţiile de mişcare a barei, calculînd întîi energia sa cinetică.

R. Energia cinetică a barei rezultă imediat din teorema lui König

$$T=\frac{1}{2}\left[m\dot{x}^2+m\dot{y}^2+I\dot{\theta}^2\right]$$

sau cu notaţia

$$q^1=x,\quad M_{11}=m,$$
$$q^2=y,\quad M_{22}=m,\qquad M_{ij}=0 \text{ pentru } i\neq j,$$
$$q^3=\theta,\quad M_{33}=I,$$
$$T=\frac{1}{2}M_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j,\qquad (i,\,j=1,\,2,\,3).$$

Acestui sistem dinamic îi asociem spaţiul lui riemannian cu metrica

$$ds^2=M_{ij}\,dq^i\,dq^j,\qquad (i,\,j=1,\,2,\,3).$$

Fiind daţi coeficienţii de inerţie constanţi, acest spaţiu riemannian este euclidian.

Presupunem că bara este supusă unui cîmp de gravitaţie uniform, orientat după Oy. Fie

$$F_1=0,\quad F_2=-mg$$

componentele forţei de gravitaţie acţionînd asupra barei. Această forţă derivă dintr-un potenţial

$$V=mgq^2.$$

În acest caz sistemul de ecuații

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^i}+\frac{\partial V}{\partial q^i}=0, \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

devine

$$\text{a)}\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^1}=M_{1j}\dot{q}^j=M_{11}\dot{q}^1=m\dot{q}^1,$$

deci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^1}\right)=m\ddot{q}^1, \qquad \frac{\partial T}{\partial q^1}=0, \qquad \frac{\partial V}{\partial q^1}=0. \tag{1}$$

$$\text{b)}\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^2}=M_{2j}\dot{q}^j=M_{22}\dot{q}^2=m\dot{q}^2,$$

deci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^2}\right)=m\ddot{q}^2, \qquad \frac{\partial T}{\partial q^2}=0, \qquad \frac{\partial V}{\partial q^2}=mg, \tag{2}$$

$$\text{c)}\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^3}=M_{3j}\dot{q}^j=M_{33}\dot{q}^3=I\dot{q}^3,$$

de unde rezultă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^3}\right)=I\ddot{q}^3, \qquad \frac{\partial T}{\partial q^3}=0, \qquad \frac{\partial V}{\partial q^2}=0.$$

Ecuațiile diferențiale de mișcare se scriu

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{q}^1&=0\\ m\ddot{q}^2&=-mg\\ I\ddot{q}^3&=0. \end{aligned}\right\}$$

21. Un cerc de rază r și de centru O materializat printr-un fir de masă m se rotește în jurul unei axe diametrale reprezentate prin axa Ox^3 (fig. III.21). Pe această circumferință poate aluneca fără frecare o masă punctuală M. Să se calculeze energia cinetică a sistemului și ecuațiile de mișcare a masei M. Ansamblul este presupus supus unui cîmp gravitic terestru dirijat după Ox^3.

R. Alegem coordonatele generalizate, unghiurile q^1 și q^2, ceea ce revine la situarea lui M în coordonate sferice.

Energia cinetică a circumferinței este

$$\frac{m}{4}(r)^2(\dot{q}^1)^2$$

iar a masei punctuale M

$$\frac{M}{2}(r\cos q^2)^2(\dot{q}^1)^2+\frac{M}{2}(r)^2(\dot{q}^2)^2.$$

Energia cinetică totală este

$$T=\left[\frac{m}{4}+\frac{M}{2}(\cos q^2)^2\right](r)^2(\dot{q}^1)^2+\frac{M}{2}(r)^2(\dot{q}^2)^2.$$

Spaţiul de configuraţie are metrica

$$ds^2=G_{ij}\,dq^i\,dq^j \qquad (i,\ j=1,\ 2)$$

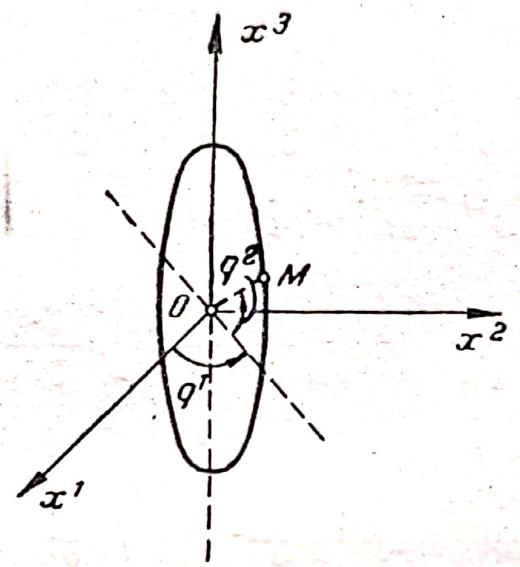


Fig. III.21

cu

$$G_{11}=\frac{1}{2}(r)^2\left[\frac{m}{2}+M(\cos q^2)^2\right], \qquad G_{22}=\frac{1}{2}M(r)^2, \qquad G_{12}=G_{21}=0.$$

Acest spaţiu nu este euclidian.

Ecuaţiile lui Lagrange se stabilesc uşor. Presupunem că nu se aplică nici o forţă exterioară. Atunci

$$\left[\frac{m}{2}+M(\cos q^2)^2\right]\ddot{q}^1-2M\sin q^2\cos q^2\cdot\dot{q}^1\cdot\dot{q}^2=0,$$

$$\ddot{q}^2+\sin q^2\cdot\cos q^2(\dot{q}^1)^2=\frac{g}{r}\cos q^2.$$

22. Să se determine condiţia necesară ca $I=\int_{t_1}^{t_2}F(t,\ x,\ \dot{x})\,dt$ să admită un extremum.

R. Fie $x=X(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, curba care realizează un extremum pentru I. Atunci $x=X(t)+\varepsilon\eta(t)$, unde ε este independent de t, este o vecinătate pentru t_1 şi t_2 astfel că $\eta(t_1)=\eta(t_2)=0$. Valoarea lui I pentru această vecinătate este

$$I(\varepsilon)=\int_{t_1}^{t_2}F(t,\ x+\varepsilon\eta,\ \dot{x}+\varepsilon\dot{\eta})\,dt.$$

Aceasta este un extremum pentru $\varepsilon > 0$. O condiție necesară este deci $\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$.

Avem

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\eta + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\eta} \right) dt = 0$$

care se mai scrie

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial x}\eta\, dt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\eta\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \eta \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) \right] dt = 0.$$

Deoarece η este arbitrar,

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0.$$

Acest rezultat se extinde simplu la

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t, x^1, \dot{x}^1, x^2, \dot{x}^2, \ldots, x^N, \dot{x}^N)\, dt$$

obținîndu-se sistemul de ecuații

$$\frac{\partial F}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k}\right) = 0$$

numit *sistemul lui Euler-Lagrange*.

23. Să se determine liniile geodezice ale suprafeței a cărei metrică este

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \qquad (y > 0).$$

R. Ecuațiile lui Lagrange sînt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial T}{\partial y}, \tag{1}$$

unde

$$T = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2y^2}, \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}\right).$$

Cu aceasta ecuațiile (1) se scriu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{y^2}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{y^2}\right) = -\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^3}. \tag{2}$$

Integrînd prima ecuație (2) obținem

$$\frac{\dot{x}}{y^2} = k, \qquad (k = \text{const}).$$

Dacă $k=0$, atunci $x=\text{const}$, deci liniile geodezice sînt paralele la axa Oy. Dacă $k\neq 0$, atunci $\frac{dx}{dt}=\frac{k}{y^2}$ iar ecuaţia a doua (2) devine

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0$$

care integrată ne dă

$$y\frac{dy}{dx}+x=C, \qquad (C=\text{const}).$$

Integrînd această ecuaţie, obţinem

$$y^2+(x-C)^2=r^2, \qquad (r=\text{const}).$$

Deci, liniile geodezice formează o familie de cercuri.

24. Să se arate că geodezicele în spaţiul Riemann sînt date de ecuaţia

$$\frac{d^2x^r}{ds^2}+\Gamma^r_{pq}\frac{dx^p}{ds}\cdot\frac{dx^q}{ds}=0.$$

R. Vom determina un extremum pentru $\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}\,dt$, utilizînd ecuaţiile Euler-Lagrange cu $F=\sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}$. Avem

$$\frac{\partial F}{\partial x^k}=\frac{1}{2}(g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q, \qquad \frac{\partial F}{\partial\dot{x}^k}=\frac{1}{2}(g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q)^{-\frac{1}{2}}2g_{pk}\dot{x}^p.$$

Dar pentru $ds=\sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}\,dt$, ecuaţiile Euler se scriu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{pk}\dot{x}^p}{\dot{s}}\right)-\frac{1}{2\dot{s}}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q=0$$

sau

$$g_{pk}\ddot{x}^p+\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q}\dot{x}^p\dot{x}^q-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q=\frac{g_{pk}\dot{x}^p\ddot{s}}{\dot{s}}.$$

Scriind

$$\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q}\dot{x}^p\dot{x}^q=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q}+\frac{\partial g_{qk}}{\partial x^p}\right)\dot{x}^p\dot{x}^q,$$

ecuaţiile devin

$$g_{pk}\ddot{x}^p+\Gamma_{pqk}\dot{x}^p\dot{x}^q=\frac{g_{pk}\dot{x}^p\ddot{s}}{\dot{s}}.$$

Dacă utilizăm lungimea arcului ca parametru $\dot{s}=1$, $\ddot{s}=0$ şi ecuaţiile sînt

$$g_{pk}\frac{d^2x^p}{ds^2}+\Gamma_{pqk}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds}=0.$$

Înmulţind cu g^{rk}, obţinem

$$\frac{d^2x^r}{ds^2}+\Gamma^r_{pq}\frac{dx^p}{ds}\cdot\frac{dx^q}{ds}=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

SERII FOURIER. INTEGRALA FOURIER

Definiție. *O serie de forma*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right), \tag{1}$$

unde a_0, a_k, b_k $(k=1, 2, \ldots)$ *sînt numere reale,* x *este variabilă reală iar* l *este un număr real pozitiv, se numește serie trigonometrică de perioadă* $2l$.

Proprietățile seriilor de funcții rămîn adevărate și pentru seriile trigonometrice. În plus avem următoarele proprietăți:

Teorema 1. *Dacă seria* (1) *este convergentă (uniform convergentă sau absolut convergentă) pe un interval compact oarecare de lungime* $2l$, *atunci ea este convergentă (uniform convergentă sau absolut convergentă) pe toată mulțimea* R *a numerelor reale, iar suma ei este o funcție periodică de perioadă* $2l$.

Teorema 2. *Dacă șirurile* (a_n) *și* (b_n) *formate cu coeficienții seriei* (1) *sînt monotone și converg la zero, atunci seria este convergentă pentru orice* $x\neq 2kl$, $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *și uniform convergentă în orice interval compact care nu conține puncte de această formă.*

Teorema 3. *Dacă seria* (1) *converge uniform către funcția* $f(x)$ *pe intervalul* $[-l, l]$, *atunci coeficienții ei sînt dați de formulele:*

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx, \quad (k=0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx, \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Definiție. Fie $f(x)$ *o funcție periodică de perioadă* $2l$ *integrabilă, pentru care avem*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right),$$

seria putînd fi integrată termen cu termen pe $[\alpha, \alpha+2l]$. *Numerele* a_k *și* b_k *date de* (2) *cu integralele luate de la* α *la* $\alpha+2l$ *se numesc coeficienții Fourier ai funcției* f, *iar seria trigonometrică de perioadă* $2l$ *formată cu acești coeficienți se numește seria Fourier asociată funcției* f.

Funcția f este dezvoltabilă în serie Fourier pe mulțimea $A \subseteq R$, dacă seria Fourier asociată converge pe această mulțime către f.

Convergența seriilor Fourier și posibilitatea dezvoltării funcțiilor în serie Fourier se studiază cu ajutorul următoarelor criterii.

Criteriul 1 (Dirichlet). *Dacă funcția* f *periodică de perioadă* T *este monotonă pe porțiuni pe un interval* $[\alpha, \alpha+T]$ *și are în acest interval un număr finit de puncte de discontinuitate de prima speță, atunci seria Fourier a ei converge în fiecare punct* $x_0 \in [\alpha, \alpha+T]$ *către*

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Criteriul 2. *Dacă funcția* f *este derivabilă sau derivabilă pe porțiuni în intervalul* $[\alpha, \alpha+T]$, *atunci seria Fourier asociată funcției* f *converge către* $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ *în orice punct* $x_0 \in [\alpha, \alpha+T]$.

Teorema 4. *Dacă funcția* $f(x)$ *periodică de perioadă* T *este pară, seria sa Fourier este*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos k\omega x, \quad \omega=\frac{2\pi}{T},$$

cu coeficienții

$$a_k=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos k\omega x\,dx,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{3}$$

Seria Fourier a unei funcții impare $f(x)$ *este*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega x,$$

cu coeficienții

$$b_k=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin k\omega x\,dx. \tag{4}$$

Fie $f(t)$ o funcție reală sau complexă, periodică de perioadă T, integrabilă pe intervalul $[\alpha,\ \alpha+T]$.

Forma complexă a seriei Fourier a funcției $f(t)$ este

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t},\quad c_n=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(\tau)\,e^{-in\omega\tau}\,d\tau. \tag{5}$$

Teorema 5. *Fie* $f(x)$ *o funcție reală sau complexă care satisface condițiile lui Dirichlet (criteriul 1) în orice interval de lungime finită; în fiecare punct de discontinuitate* x_0 *valoarea funcției este* $f(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$ *și fie funcția integrabilă pe intervalul* $(-\infty,\ +\infty)$. *În aceste condiții există egalitatea*

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,e^{-iu(x-\tau)}\,d\tau \tag{6}$$

numită integrala Fourier a funcției $f(x)$.

Forma *reală* a integralei Fourier este

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} du\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos u(x-\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $f(x)$ este o funcție pară, formula (7) se reduce la

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\, du \int_0^\infty f(\tau)\cos u\tau\, d\tau, \tag{8}$$

iar dacă $f(x)$ este o funcție impară, avem

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin ux\, du \int_0^\infty f(\tau)\sin u\tau\, d\tau. \tag{9}$$

Definiție. *Numim transformata Fourier a funcției reale sau complexe* $f(x)\in\mathcal{L}^1(-\infty, +\infty)$* *funcția*

$$\varphi(\alpha)=\varphi_f(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}f(t)\, dt=Tf. \tag{10}$$

Funcția $\varphi(\alpha)$ *există pentru orice* α *real pentru că* $|e^{i\alpha t}|=1$.

Avem

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha. \tag{11}$$

Teorema 6. *Dacă* $f, g\in\mathcal{L}^1(-\infty, +\infty)$, *atunci există* h *pentru aproape orice* x *real,* $h\in L^1(-\infty, +\infty)$ *cu*

$$\chi(\alpha)=\varphi(\alpha)\cdot\psi(\alpha), \tag{12}$$

unde $\varphi(\alpha)=Tf$, $\psi(\alpha)=Tg$, $\chi(\alpha)=Th$ *și*

$$h(x)=(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

Pentru funcții *pare* relațiile (10) și (12) devin

$$\varphi(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx,\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\alpha x\, d\alpha, \tag{13}$$

iar pentru funcții *impare*

$$\varphi(\alpha)=-i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x\, dx,\quad f(x)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\sin\alpha x\, d\alpha. \tag{14}$$

---

* Clasa de funcții $\mathcal{L}^1(\alpha, \beta)$ este clasa funcțiilor integrabile pe intervalul (α, β).

PROBLEME

1. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia

$$f(x)=\begin{cases} ax, & \text{dacă } -\pi<x\leqslant 0,\\ bx, & \text{dacă } 0\leqslant x<\pi,\end{cases}$$

unde a şi b sînt constante în intervalul $(-\pi, \pi)$.

R. Această funcţie verifică, în mod evident, condiţiile din criteriul lui Dirichlet pe intervalul $(-\pi, \pi)$, deci este dezvoltabilă în serie Fourier pe acest interval. Avem

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} ax\,dx+\int_{0}^{\pi} bx\,dx\right]=\frac{\pi}{4}(b-a),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} ax\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi} bx\cos nx\,dx\right]=$$

$$=\frac{a}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{b}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi}=\frac{b-a}{\pi n^2}[(-1)^n-1]$$

sau

$$a_n=\begin{cases} 0, \text{ dacă } n=2k\\ \dfrac{2(a-b)}{\pi(2k+1)^2}, \text{ dacă } n=2k+1,\end{cases}$$

şi

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[a\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,dx+b\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx\right]=$$

$$=\frac{a}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{x\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{b}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}-\frac{x\cos nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}(a+b).$$

Rezultă

$$f(x)=\frac{\pi}{4}(b-a)+\frac{2}{\pi}(a-b)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+(a+b)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k^2}.$$

2. Să se dezvolte în serie Fourier funcţiile

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2}, & \text{pentru } 0<x\leqslant\pi,\\ -f(-x), & \text{pentru } -\pi\leqslant x<0,\end{cases}$$

$$g(x)=\frac{x}{2}, \quad \text{pentru } -\pi<x<\pi,$$

şi să se deducă dezvoltarea în serie trigonometrică a numărului $\frac{\pi}{4}$.

R. Funcţia $f(x)$ este o funcţie periodică de perioadă 2π, impară, avînd puncte de discontinuitate de prima speţă (fig. IV.2, *a*). În intervalul de la $-\pi$ la π funcţia are $x=0$ punct de discontinuitate. În acest punct seria converge către zero:

$$f(0)=\frac{f(0-)+f(0+)}{2}=\frac{-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{2}=0.$$

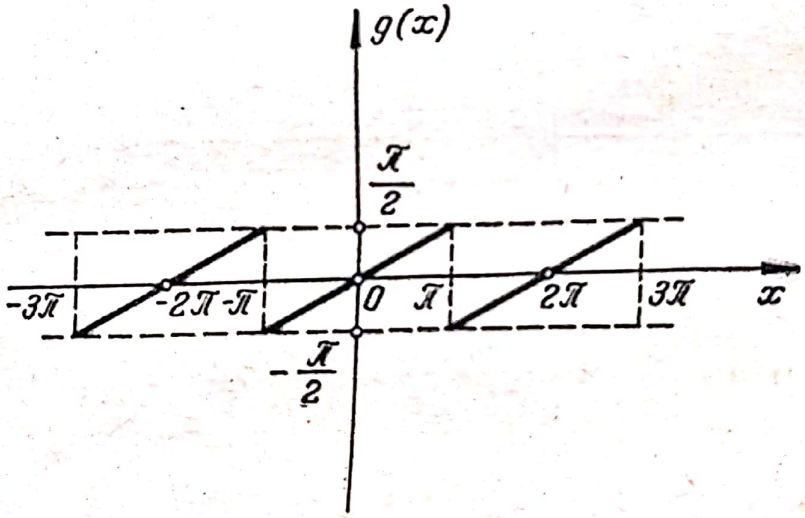


Fig. IV.2, *a*

Coeficienţii seriei sînt

$$a_0=0, \quad a_n=0, \quad b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin n\omega x\,dx.$$

Avem $T=2\pi$, deci

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx=-\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right]=\frac{1}{n}.$$

Rezultă

$$\frac{\pi-x}{2}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{\sin nx}{n}+\cdots$$

sau

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}. \tag{1}$$

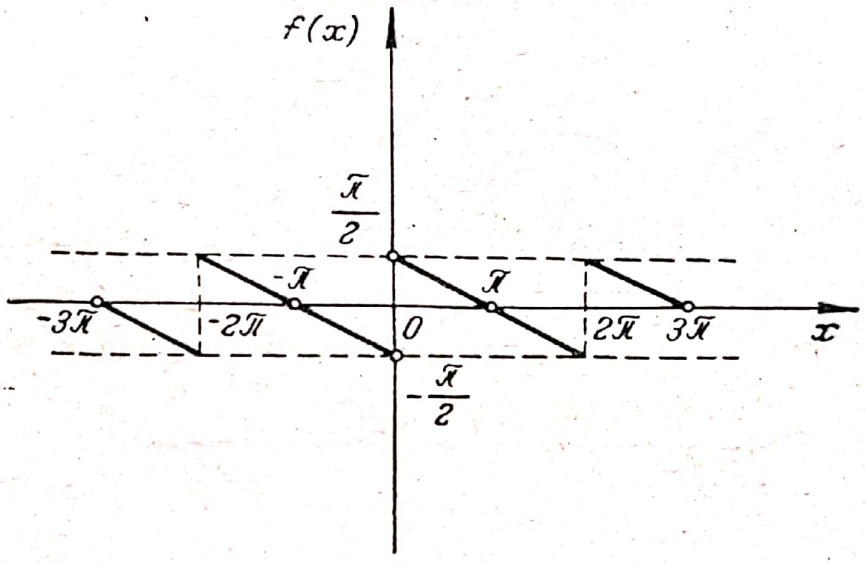


Fig. IV.2, *b*

Funcţia $g(x)$ este o funcţie periodică de perioadă 2π, impară avînd puncte de discontinuitate de prima speţă (fig. IV.2, *b*). Avem pentru $-\pi$ şi π valorile

$$g(-\pi)=\frac{g(-\pi-0)+g(-\pi+0)}{2}=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{2}=0,$$

$$g(\pi)=\frac{g(\pi-0)+g(\pi+0)}{2}=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{2}=0.$$

Funcţia fiind impară rezultă $a_0=a_n=0$ şi

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\,dx=\frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

deci

$$\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx. \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},\quad \text{pentru } x\in(0,\pi).$$

3. Să se dezvolte în serie Fourier funcția

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & -\pi<x<-\varphi,\ \varphi<x<\pi,\\ \cos\varphi, & -\varphi<x<\varphi.\end{cases}$$

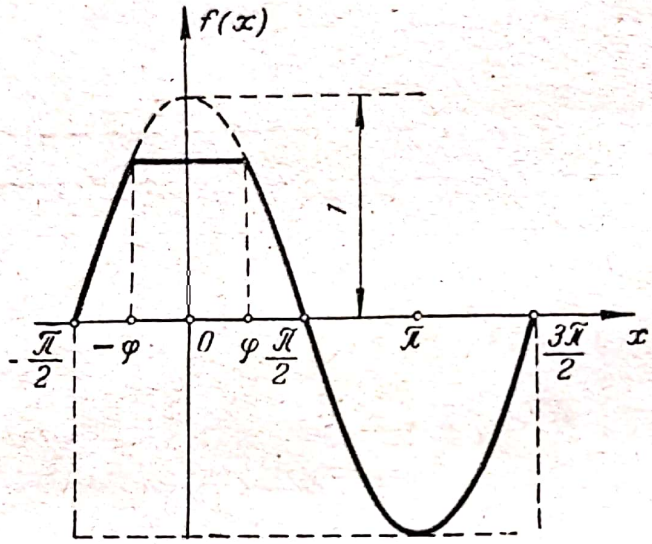


Fig. IV.3

R. Funcția $f(x)$ este o funcție pară, periodică de perioadă 2π (fig. IV.3). Avem

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\varphi}\cos\varphi\cos nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int_{\varphi}^{\pi}\cos x\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{\cos\varphi\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\varphi}+\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)x}{2(n+1)}+\frac{\sin(n-1)x}{2(n-1)}\right]_{\varphi}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2\cos\varphi\sin n\varphi}{n}-\frac{\sin(n+1)\varphi}{n+1}-\frac{\sin(n-1)\varphi}{n-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)\varphi}{n(n+1)}-\frac{\sin(n-1)\varphi}{n(n-1)}\right].$$

Această expresie este nedeterminată cînd $n=0$ și $n=1$. Pentru $n=0$,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\varphi}\cos\varphi\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{\varphi}^{\pi}\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}[\varphi\cos\varphi-\sin\varphi],$$

iar pentru $n=1$,

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\varphi}\cos\varphi\cos x\,dx+\frac{2}{\pi}\int_{\varphi}^{\pi}\cos^2 x\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\sin\varphi\cos\varphi+\frac{1}{2}(\pi-\varphi)-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]=\frac{1}{\pi}[\pi-\varphi+\sin\varphi\cos\varphi].$$

Rezultă

$$f(x)=\frac{1}{\pi}(\varphi\cos\varphi-\sin\varphi)+\frac{1}{\pi}(\pi-\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)\cos x+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{\sin(n+1)\varphi}{n(n+1)}-\frac{\sin(n-1)\varphi}{n(n-1)}\right]\cos nx.$$

4. Să se determine forma complexă a seriei Fourier pentru funcția

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi,\\ -1, & \pi<x<2\pi.\end{cases}$$

R. Forma complexă a seriei Fourier este

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{inx},$$

unde

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{-inx}\,dx-\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}e^{-inx}\,dx=$$

$$=\frac{-1}{2\pi in}e^{-inx}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2\pi in}e^{-inx}\Big|_{\pi}^{2\pi}=\frac{1}{n\pi i}(1-e^{-in\pi}).$$

Pentru $n=0$ avem

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}dx-\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}dx=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru n par, $c_n=0$, iar pentru n impar, $c_n=\frac{2}{\pi n i}$, deci

$$f(x)=\frac{2}{\pi i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{n}.$$

5. Să se scrie seria Fourier a funcţiei de pulsaţie periodică, rectangulară (fig. IV.5)

$$f(t)=\begin{cases}A, & 0<t<t_1,\\ 0, & t_1<t<T.\end{cases}$$

R. Pentru simplificare vom scrie această expresie în termenii unei faze x, astfel ca x să varieze de la 0 la 2π; valoarea lui x la timpul w este

$$\tau=\frac{2\pi}{T}w.$$

Avem

$$f(x)=\begin{cases}A, & 0<x<\tau,\\ 0, & \tau<x<2\pi.\end{cases}$$

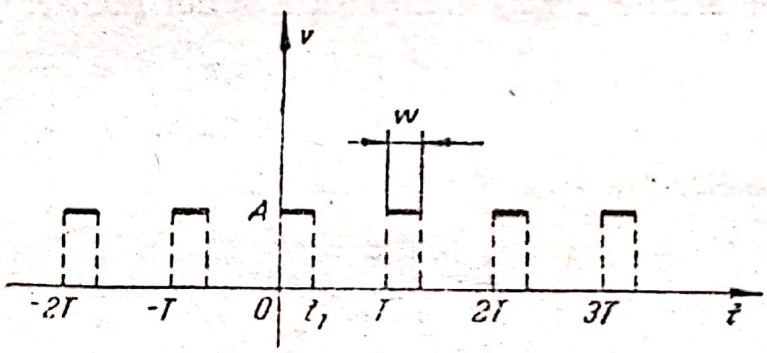


Fig. IV.5

Coeficienţii Fourier se obţin în formă exponenţială astfel

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\tau}A\,dx=\frac{A}{2\pi}x\Big|_0^{\tau}=\frac{A\tau}{2\pi}=\frac{Aw}{T},$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\tau}Ae^{-inx}\,dx=\frac{-A}{2\pi ni}e^{-inx}\Big|_0^{\tau}=\frac{A}{2\pi ni}(1-e^{-in\tau}).$$

Rezultă

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{A}{2\pi ni}(1-e^{-in\tau})\,e^{inx}=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{2\pi ni}(e^{inx}-e^{in(x-\tau)}+$$

$$+e^{-in(x-\tau)}-e^{-inx})=c_0-\frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[\sin n(x-\tau)-\sin nx]=$$

$$=c_0-\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{-n\tau}{2}\cos n\left(x-\frac{\tau}{2}\right)=$$

$$=\frac{\tau}{2\pi}A+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\tau}{2}\cos n\left(x-\frac{\tau}{2}\right),$$

deoarece

$$\frac{\tau}{2\pi}A=\frac{w}{T}A.$$

6. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia periodică de perioadă T definită astfel:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2a}{T}x, & \text{dacă } 0\leqslant x<\dfrac{T}{2},\\ 0, & \text{dacă } x=\dfrac{T}{2},\\ \dfrac{2a}{T}x-2a, & \text{dacă } \dfrac{T}{2}<x\leqslant T.\end{cases}$$

R. Funcţia $f(x)$ (fig. IV.6) satisface condiţiile lui Dirichlet, deci poate fi dezvoltată în serie Fourier pe intervalul $[0, T]$. Fiind o funcţie impară, avem $a_0=0$, $a_n=0$. În soluţia pe care o dăm vom face schimbarea

$$x=\frac{T}{2\pi}t.$$

Transformata funcţiei $f(x)$ este o funcţie periodică de perioadă 2π impară

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{a}{\pi}t, & \text{pentru } 0\leqslant t<\pi,\\ 0, & \text{pentru } t=\pi,\\ \dfrac{a}{\pi}t-2a, & \text{pentru } \pi<t\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{a}{\pi}\, t \sin nt\, dt = (-1)^{n+1}\frac{2a}{\pi n}.$$

Rezultă

$$g(t) = \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nt}{n}.$$

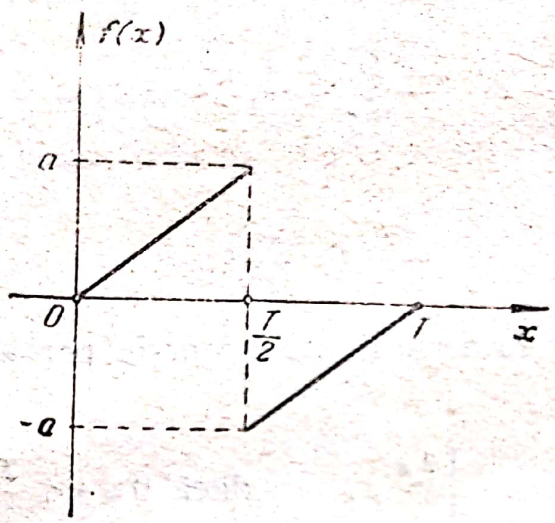


Fig. IV.6

Făcînd transformarea inversă $t = \frac{2\pi}{T}x$, avem

$$f(x) = \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{2n\pi}{T}x.$$

7. Să se dezvolte în serie Fourier de cosinusuri şi apoi de sinusuri funcţia periodică

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi - x}{4}, & \text{pentru } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

R. Funcţia $f(x)$ este continuă pe intervalul $[-\pi, \pi]$, satisface condiţiile lui Dirichlet, deci este dezvoltabilă în serie Fourier. Pentru a dezvolta această funcţie în serie de cosinusuri, o vom prelungi ca funcţie pară pe intervalul $[-\pi, 0]$, (fig. IV.7, *a*).

Scanned with OKEN Scanner

Avem

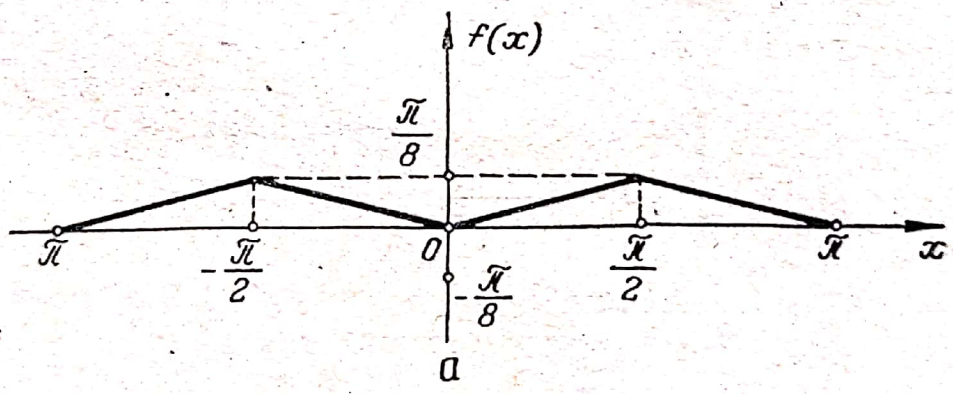
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{4}\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi-x}{4}\,dx\right]=\frac{\pi}{16},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos nx\,dx+\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,dx\right]=$$

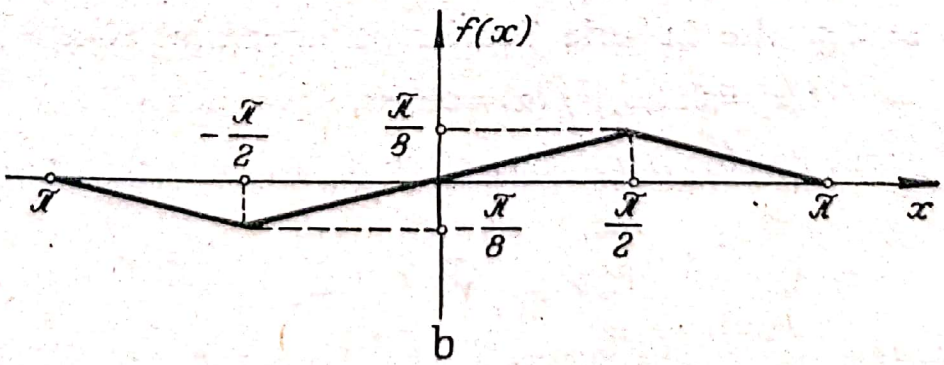
$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{\pi}{4n}\sin n\pi-\frac{\pi}{4n}\sin\frac{n\pi}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{n}\sin n\pi-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}\left\{\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{2}[1+(-1)^n]\right\},$$



a



b

Fig. IV.7

deci

$$a_n=\begin{cases}-\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{1}{(4k+2)^2}, & \text{pentru } n=4k+2,\\ 0, & \text{pentru } n\neq 4k+2,\end{cases}$$

$$b_n=0$$

şi

$$f(x)=\frac{\pi}{16}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(4k+2)x}{(4k+2)^2}.$$

Pentru a dezvolta funcţia $f(x)$ în serie de sinusuri, vom considera $f(x)=-f(-x)$ pentru $x\in[-\pi, 0]$ (fig. IV.7, b). Funcţia fiind impară, avem $a_0=0$, $a_n=0$ şi

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}-f(-x)\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\,dx+\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx\right]=\frac{2}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Rezultă

$$b_n=\begin{cases}0, & \text{pentru } n=2k,\\ (-1)^k\dfrac{2}{(2k+1)^2}, & \text{pentru } n=2k+1\end{cases}$$

şi

$$f(x)=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x.$$

8. Să se dezvolte în serie Fourier pe intervalul $(-\pi, \pi)$ funcţiile

$$f(x)=\operatorname{sh} ax,\quad g(x)=\operatorname{ch} ax,\quad (a\neq \text{intreg}).$$

Cu ajutorul acestor dezvoltări să se deducă sumele seriilor

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a^2+n^2)^2};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(a^2+n^2)^2}.$$

R. Funcţiile date îndeplinesc condiţiile lui Dirichlet, $f(x)$ este o funcţie impară iar $g(x)$ este pară.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $f(x)$ avem $a_0=0$, $a_n=0$, iar

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sh} ax\sin nx\,dx.$$

Integrînd de două ori prin părţi, obţinem

$$b_n=\frac{2}{\pi(a^2+n^2)}[a\sin nx\operatorname{ch} ax-n\cos nx\operatorname{sh} ax]_0^{\pi}=(-1)^{n-1}\frac{2n}{\pi(a^2+n^2)}\operatorname{sh} a\pi,$$

deci

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh} a\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{a^2+n^2}\sin nx,\quad |x|<\pi. \tag{1}$$

Pentru $g(x)$ avem $b_n=0$ şi

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{ch} ax\,dx=\frac{\operatorname{sh} a\pi}{a\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{ch} ax\cdot\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\operatorname{ch} ax\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}-$$

$$-\frac{2a}{n\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sh} ax\cdot\sin nx\,dx=(-1)^n\frac{2a\operatorname{sh} a\pi}{\pi(a^2+n^2)},$$

deci

$$g(x)=\frac{\operatorname{sh} a\pi}{a\pi}+\frac{2a\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{a^2+n^2},\quad |x|\leqslant\pi. \tag{2}$$

Utilizînd formula lui Parseval

$$a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx,$$

unde $f:[-l,\ l]\to R$ şi pătratul ei este o funcţie integrabilă, şi ţinînd seama de relaţiile (1) şi (2), obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(a^2+n^2)^2}=\frac{\pi}{2\operatorname{sh}^2 a\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sh}^2 ax\,dx$$

şi

$$\frac{1}{4a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2}{(a^2+n^2)^2}=\frac{\pi}{2\operatorname{sh}^2 a\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{ch}^2 ax\,dx.$$

Calculînd integralele din membrii doi, avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a^2+n^2)^2} = \frac{\pi}{8a\,\mathrm{sh}^2 a\pi}\,[\mathrm{sh}\,2a\pi - 2a\pi], \tag{1'}$$

$$\frac{1}{4a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2}{(a^2+n^2)^2} = \frac{\pi}{8a\,\mathrm{sh}^2 a\pi}\,[\mathrm{sh}\,2a\pi + 2a\pi]. \tag{2'}$$

Din (2') obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2+n^2)^2} = \frac{\pi a - 1}{4a^4} + \frac{\pi\,[(2a\pi+1)e^{2a\pi}-1]}{2a^3\,(e^{2a\pi}-1)^2}. \tag{3}$$

Aplicînd de trei ori regula lui l'Hospital, obţinem

$$\lim_{a\to 0} \frac{\pi}{8a\,\mathrm{sh}^2 a\pi}\,[\mathrm{sh}\,2a\pi - 2a\pi] = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ţinînd seama că seria din membrul întîi al egalităţii (1') este absolut convergentă, rezultă că putem trece la limită pentru $a\to 0$ sub semnul sumă astfel că din (1') deducem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

9. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|, & \text{dacă } x \neq 2k\pi,\ (k=\text{intreg}) \text{ pe } R-\{2k\pi\}, \\ 0, & \text{dacă } x = 2k\pi. \end{cases}$$

R. Funcţia $f(x)$ este periodică de perioadă $T=2\pi$ şi pară. Este o funcţie nemărginită, satisface condiţiile lui Dirichlet, deci este dezvoltabilă în serie Fourier. Avem $b_n=0$ şi

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\omega x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx\cdot \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\cdot \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi} \sin nx\cdot \mathrm{cotg}\,\frac{x}{2}\,dx\right].$$

Dar $\lim_{n\to 0} \sin nx \cdot \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)=0$, după cum se verifică uşor aplicînd regula lui l'Hospital, deci

$$a_n=-\frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx.$$

Ţinînd seama că

$$\sin nx\cdot\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right],$$

iar

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},$$

obţinem

$$a_n=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\left[2\sum_{k=1}^{n-1}\cos kx+\cos nx+1\right]dx=-\frac{1}{n}.$$

Aşadar

$$f(x)=a_0-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}.$$

Înlocuind în această egalitate pe x cu π deducem că

$$0=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Seria din membrul al doilea este seria armonică alternată care are suma $\ln 2$, deci

$$a_0=-\ln 2$$

şi

$$f(x)=-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}.$$

10. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia

$$f(x)=\frac{1-\alpha\cos x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2},\quad |\alpha|<1,\quad x\in R,\quad \alpha\in R.$$

R. Funcţia $f(x)$ este periodică de perioadă 2π, derivabilă şi cu derivata continuă pe R, deci este dezvoltabilă în serie Fourier pe R. Funcţia $f(x)$ este pară, deci $b_n=0$. Avem

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\alpha\cos x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}\,dx.$$

Cu schimbarea $e^{ix}=z$, intervalul $[0, 2\pi]$ se transformă în cercul $|z|=1$, deci

$$a_0=\frac{1}{4\pi i}\int_{|z|=i}\frac{\alpha z^2-2z+\alpha}{\alpha z^2-z(1+\alpha^2)+\alpha}\cdot\frac{dz}{z}.$$

Funcţia $F(z)=\dfrac{\alpha z^2-2z+\alpha}{z[\alpha z^2-z(1+\alpha^2)+\alpha]}$ are în interiorul domeniului $|z|=1$ punctele singulare $z=0$ şi $z=\alpha$, $(|\alpha|<1)$ ca poli simpli. Rezultă

$$a_0=\frac{1}{4\pi i}\int_{|z|=i}\frac{\alpha z^2-2z+\alpha}{z[\alpha z^2-z(1+\alpha^2)+\alpha]}dz=\frac{1}{2}[R_0+R_\alpha],$$

unde

$$R_0=\left.\frac{\alpha z^2-2z+\alpha}{\alpha z^2-z(1+\alpha^2)+\alpha}\right|_{z=0}=1,\quad R_\alpha=\left.\frac{\alpha z^2-2z+\alpha}{\alpha z\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)}\right|_{z=\alpha}=\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-1}=1,\quad a_0=1.$$

$$a_n+ib_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\alpha\cos x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}(\cos nx+i\sin nx)\,dx.$$

Făcînd schimbarea $e^{ix}=z$, obţinem

$$a_n+ib_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(\alpha z^2-2z+\alpha)z^{n-1}}{\alpha z^2+z(1+\alpha^2)+\alpha}dz=R_{z=\alpha}$$

unde

$$R_\alpha=\left.\frac{(\alpha z^2-2z+\alpha)z^{n-1}}{\alpha\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)}\right|_{z=\alpha}=\alpha^n.$$

Rezultă $a_n+ib_n=\alpha^n$, deci $a_n=\alpha^n$, $b_n=0$ şi

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\cos nx,\quad x\in R.$$

11. Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0,\\ 1, & 0<x<d,\\ 0, & d<x<\infty.\end{cases}$$

R. Transformata Fourier a acestei funcţii este

$$\varphi(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx=\int_{0}^{d} e^{i\alpha x}\,dx=\frac{e^{i\alpha x}}{i\alpha}\Big|_0^d=\frac{e^{i\alpha d}-1}{i\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\alpha d}{\alpha}+i\frac{1-\cos\alpha d}{\alpha}=\varphi_1(\alpha)+\varphi_2(\alpha).$$

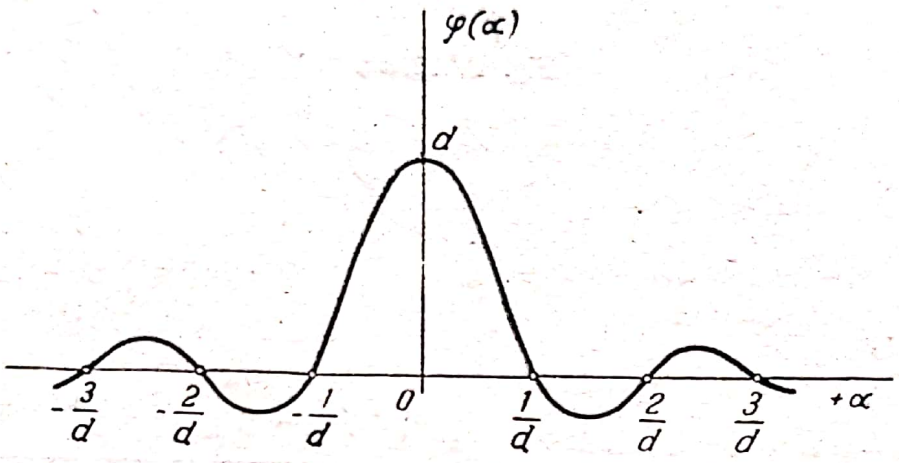


Fig. IV.11

Pentru a reprezenta grafic funcţia $\varphi(\alpha)$ (fig. IV.11) îi vom calcula mărimea

$$|\varphi(\alpha)|=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha d+(1-\cos\alpha d)^2}=\frac{1}{\alpha}\sqrt{2-2\cos\alpha d}=\frac{d}{\alpha}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha d}{2}}{\frac{\alpha d}{2}}.$$

12. Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei

$$f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-\frac{d}{2},\\ \cos\omega t, & -\frac{d}{2}<t<\frac{d}{2},\\ 0, & \frac{d}{2}<t<+\infty,\end{cases}$$

şi să se reprezinte această funcţie printr-o integrală Fourier.

R. Funcţia $f(t)$ este pară (fig. IV.12, *a*), deci vom aplica formula care ne dă transformata Fourier prin cosinus şi anume

$$\varphi(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt.$$

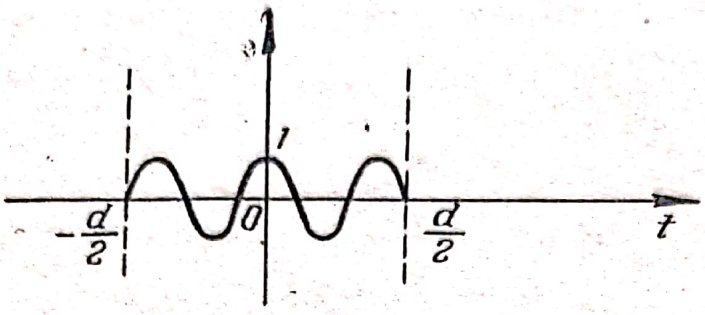


Fig. IV.12, *a*

Avem

$$\varphi(\alpha)=\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\cos\omega t\cos\alpha t\,dt=\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}[\cos(\omega-\alpha)t+\cos(\omega+\alpha)t]dt=$$

$$=\left[\frac{\sin(\omega-\alpha)t}{\omega-\alpha}+\frac{\sin(\omega+\alpha)t}{\omega+\alpha}\right]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}=d\left\{\frac{\sin\left[(\omega-\alpha)\frac{d}{2}\right]}{(\omega-\alpha)\frac{d}{2}}+\frac{\sin\left[(\omega+\alpha)\frac{d}{2}\right]}{(\omega+\alpha)\frac{d}{2}}\right\}.$$

Graficul acestei funcții este dat în fig. IV.12, *b*.
Integrala Fourier este

$$f(t)=\frac{d}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\sin\left[(\omega-\alpha)\frac{d}{2}\right]}{(\omega-\alpha)\frac{d}{2}}+\frac{\sin\left[(\omega+\alpha)\frac{d}{2}\right]}{(\omega+\alpha)\frac{d}{2}}\right\}e^{-i\alpha t}d\alpha.$$

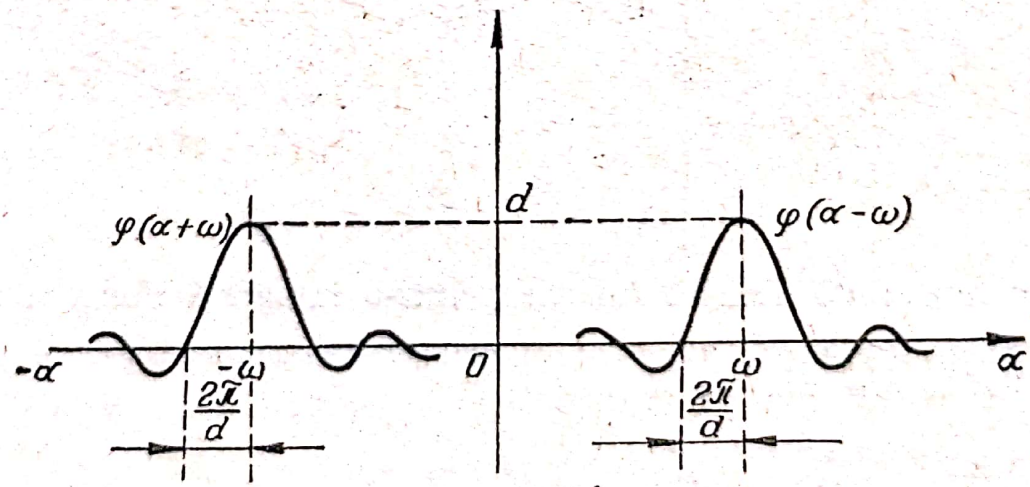


Fig. IV.12, *b*

13. Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei

$$f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<0,\\ e^{-at}, & 0<t<\infty,\quad a>0\end{cases}$$

şi să se reprezinte această funcţie printr-o integrală Fourier.

R. Avem

$$\varphi(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\alpha t}\,dt=\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{i\alpha t}\,dt=\frac{e^{-(a-i\alpha)t}}{-(a-i\alpha)}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{a-i\alpha}.$$

Deoarece $f(t)$ nu este nici pară, nici impară, $\varphi(\alpha)$ poate fi scris sub forma

$$\varphi(\alpha)=\varphi_1(\alpha)+\varphi_2(\alpha),$$

unde $\varphi_1(\alpha)$ va fi transformata lui $f_1(t)$ şi $\varphi_2(\alpha)$ a lui $f_2(t)$, iar

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t),$$

unde $f_1(t)$ este o funcţie pară, iar $f_2(t)$ o funcţie impară.

Deci

$$\varphi(\alpha)=\frac{a+i\alpha}{a^2+\alpha^2}=\frac{a}{a^2+\alpha^2}+i\frac{\alpha}{a^2+\alpha^2},$$

de unde rezultă

$$\varphi_1(\alpha)=\frac{a}{a^2+\alpha^2},\qquad \varphi_2(\alpha)=i\frac{\alpha}{a^2+\alpha^2}.$$

Pentru integrala Fourier observăm că

$$f_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(\alpha)\cos\alpha t\,d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\cos\alpha t}{a^2+\alpha^2}\,d\alpha,$$

$$f_2(t)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(\alpha)\sin\alpha t\,d\alpha=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha t}{\alpha^2+a^2}\,d\alpha.$$

14. Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcţiile:

$$f(x)=\begin{cases}h\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right), & \text{dacă } |x|\leqslant a,\\ 0, & \text{dacă } |x|>a,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\operatorname{sign} nx, & \text{dacă } |x|<1,\\ 0, & \text{dacă } |x|>1.\end{cases}$$

R. Toate condiţiile din propoziţia 5 sînt satisfăcute, deci se poate aplica formula lui Fourier. Funcţia $f(x)$ este pară, deci

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos ux\,du\int_0^{\infty}f(\tau)\cos u\tau\,d\tau.$$

Avem

$$\int_0^{\infty} f(\tau)\cos u\tau\,d\tau = \int_0^{a}\left(1-\frac{\tau}{a}\right)\cos u\tau\,d\tau = \frac{h}{a}\left(\frac{1-\cos au}{u^2}\right),$$

deci

$$f(x)=\frac{2h}{a\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos ux}{u^2}\,(1-\cos au)\,du.$$

Funcţia $g(x)$ se mai scrie

$$g(x)=\begin{cases}0, & \text{pentru } x<-1 \text{ şi } x>1,\\ -1, & \text{pentru } -1<x\leqslant 0,\\ 1, & \text{pentru } 0\leqslant x<1\end{cases}$$

şi este o funcţie impară, deci

$$g(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin ux\,dx\int_0^{\infty} f(\tau)\sin u\tau\,d\tau,$$

unde

$$\int_0^{\infty} f(\tau)\sin u\tau\,d\tau=\int_0^{1}\sin u\tau\,d\tau=\frac{1-\cos u}{u},$$

deci

$$g(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos u}{u}\sin ux\,du.$$

15. Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcţiile

$$f(x)=e^{-\alpha|x|}\cos\beta x,\quad (\alpha>0);$$

$$g(x)=xe^{-x^2}.$$

R. Funcţiile date satisfac condiţiile propoziţiei 5, deci pot fi reprezentate prin integrale Fourier.

Funcţia $f(x)$ este pară, deci

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos ux\,du\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau}\cos\beta\tau\cos u\tau\,d\tau.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scriind $\cos \lambda\tau = \dfrac{e^{i\lambda\tau}+e^{-i\lambda\tau}}{2}$, făcînd înmulțirile și integrînd, obținem

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\cos\beta\tau\cos u\tau\,d\tau = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha}{(u-\beta)^2+\alpha^2}+\frac{\alpha}{(u+\beta)^2+\alpha^2}\right].$$

Rezultă

$$f(x)=\frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1}{\alpha^2+(u+\beta)^2}+\frac{1}{\alpha^2+(u-\beta)^2}\right]\cos ux\,du.$$

Funcția $g(x)$ este impară, deci

$$g(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin ux\,du\int_0^\infty \tau\, e^{-\tau^2}\sin u\tau\,d\tau.$$

Avem

$$\int_0^\infty \tau e^{-\tau^2}\sin u\tau\,d\tau=\frac{e^{-\tau^2}\sin u\tau}{-2}\Bigg|_0^\infty+\frac{u}{2}\int_0^\infty e^{-\tau^2}\cos u\tau\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{4u}\left[\int_0^\infty e^{-\tau^2+iu\tau}\,d\tau+\int_0^\infty e^{-\tau^2-iu\tau}\,d\tau\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{4}u\,e^{-\frac{u^2}{4}},$$

deci

$$g(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u\,e^{-\frac{u^2}{4}}\sin ux\,du.$$

16. Să se determine funcția $\varphi(\alpha)$ dacă

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha = e^{-x},\quad (x>0).$$

R. Avem înmulțind cu $\dfrac{i}{\pi}$

$$\frac{i}{\pi}\int_0^\infty \varphi(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha=\frac{i}{\pi}e^{-x}.$$

Soluția acestei ecuații este dată de prima relație (14) și anume

$$\varphi(\alpha)=-2i\int_0^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x}\sin\alpha x\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int_0^{\infty}\left[e^{-x(1-\alpha i)}-e^{-x(1+\alpha i)}\right]dx=\frac{1}{\pi i}\left[\frac{1}{1-\alpha i}-\frac{1}{1+\alpha i}\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

17. Să se determine funcția $\varphi(\alpha)$ dacă

$$\int_0^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\alpha u\,d\alpha=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos u, & \text{pentru } u\in(0,\pi),\\ 0, & \text{pentru } u>\pi,\\ -\frac{\pi}{4}, & \text{pentru } u=\pi.\end{cases}$$

R. Ecuația dată se mai scrie

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\alpha u\,d\alpha=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos u, & \text{pentru } u\in(0,\pi),\\ 0, & \text{pentru } u>\pi,\\ -\frac{1}{4}, & \text{pentru } u=\pi.\end{cases}$$

Soluția acestei ecuații este dată de relația (13) și anume

$$\varphi(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos\alpha u\,du=2\int_0^{\pi}\frac{\cos u}{2}\cos\alpha u\,du=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos u(1+\alpha)+\cos u(1-\alpha)\right]du=\frac{u\sin u\pi}{1-u^2}.$$

18. Să se determine funcția $\varphi(\alpha)$ dacă

$$\int_0^{\infty}\varphi(u)\cos ux\,du=\frac{1}{1+x^2}.$$

R. Soluția acestei ecuații este dată de relația (13)

$$\varphi(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ux\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos ux}{1+x^2}dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm funcția $f(z)=\dfrac{e^{iuz}}{1+z^2}$ și $\displaystyle\int_C \frac{e^{iuz}}{1+z^2}\,dz$, unde C este conturul din fig. IV.18.

Funcția $f(z)$ are în interiorul conturului C polul simplu $z=i$, deci

$$\int_C \frac{e^{iuz}}{1+z^2}\,dz=\int_{-R}^{R}\frac{e^{iux}}{1+x^2}\,dx+\int_\gamma \frac{e^{iuz}}{1+z^2}\,dz=2\pi i\ R_i, \tag{1}$$

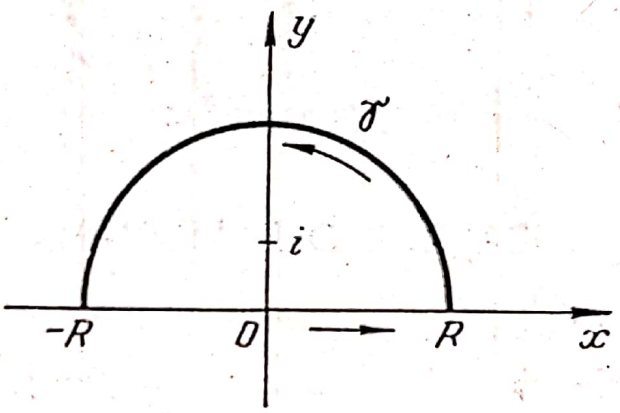


Fig. IV.18

unde

$$R_i=\left.\frac{e^{iuz}}{z+i}\right|_{z=i}=\frac{e^{-u}}{2i}.$$

Trecînd la limită în relația (1) pentru $R\to\infty$ și ținînd seama că $\lim\limits_{R\to\infty}\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iuz}}{1+z^2}dz=0$ (verificarea este imediată), obținem

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iux}}{1+x^2}\,dx=\pi e^{-u}$$

și

$$2\int_0^{\infty}\frac{\cos ux}{1+x^2}\,dx=\pi e^{-u}.$$

Rezultă

$$\varphi(u)=e^{-u},\qquad (u\geq 0).$$

CAPITOLUL V

CALCUL OPERAȚIONAL

Fie $f(t)$ o funcție măsurabilă reală sau complexă, definită pe dreapta reală și p un parametru real sau complex.

Definiție. *Dacă*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt \tag{1}$$

există (integrala fiind luată în sensul lui Lebesgue), ea poartă numele de integrala lui Laplace unilaterală a funcției $f(t)$.

Dacă $f(t)=0$ pentru $t<0$, integrala (1) se reduce la $\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$.

Notăm

$$F(p)=\mathcal{L}f(t)=\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{2}$$

Definiția 1. *Transformarea care face să corespundă funcției* $f(t)$ *funcția* $F(p)$ *poartă numele de transformare Laplace, iar* $F(p)$ *se numește transformata Laplace a funcției* $f(t)$.

Fie α marginea inferioară a numerelor reale p_0 pentru care $e^{-p_0 t} f(t)$ este funcție sumabilă în $[0, \infty)$. Transformata Laplace $F(p)$ este definită în semiplanul deschis $\operatorname{Re} p>\alpha$, iar α se numește *abscisă de convergență* corespunzătoare funcției $f(t)$.

Definiție. *Se numește original o funcție complexă $f(t)$, definită pe $[0, \infty)$, (dacă se extinde $f(t)$ pe $(-\infty, +\infty)$, atunci $f(t)=0$ pentru $t<0$), continuă pe acest interval în afară, eventual, de un număr finit de puncte și cu creștere mărginită.*

Cea mai simplă funcție original este *funcția unitate*

$$\eta(t)=\begin{cases} 0, & \text{pentru } t<0, \\ \frac{1}{2}, & \text{pentru } t=0, \\ 1, & \text{pentru } t>0. \end{cases} \tag{3}$$

Definiția 2. *Fie $f(t)$ un original și s_0 abscisa sa de convergență. Se numește transformata Laplace a funcției $f(t)$* (sau imagine) *funcția*

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

Transformata Laplace $F(p)$ este o funcție olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} p>s_0$ și

$$F'(p)=\int_0^\infty [-tf(t)]\,e^{-pt}\,dt. \tag{4}$$

Vom da cîteva proprietăți importante ale transformatei Laplace.

Propoziția 1. *Transformata Laplace este o transformare liniară, adică*

$$\mathcal{L}[\lambda f(t)+\mu g(t)]=\lambda \mathcal{L}f(t)+\mu \mathcal{L}g(t), \ (\lambda, \mu=\text{constante complexe}). \tag{5}$$

Propoziția 2 (Teorema asemănării). *Dacă $F(p)$ este imaginea funcției $f(t)$, oricare ar fi constanta $\alpha>0$, avem*

$$\mathcal{L}f(\alpha t)=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{6}$$

Propoziția 3 (Teorema întîrzierii). *Dacă $f(t)$ este un original și τ o constantă, $f(t-\tau)$ este un original și*

$$\mathcal{L}f(t-\tau)=e^{-p\tau}\mathcal{L}f(t). \tag{7}$$

Propoziția 4 (Derivata unui original). *Dacă $f(t)$ are derivată continuă pe $(0, \infty)$ și dacă $f'(t)$ este un original* (de unde *rezultă că și $f(t)$ este un original și $\lim_{t\to+0} f(t)=f(+0)$ există*), *atunci din $\mathcal{L}f(t)=F(p)$ deducem*

$$\mathcal{L}f'(t)=pF(p)-f(+0).$$

Dacă $f(t)$ are derivată continuă de ordinul n pe $(0, \infty)$ și dacă $f^{(n)}(t)$ este un original și $\mathcal{L}f(t)=F(p)$, rezultă

$$\mathcal{L}f^{(n)}(t)=p^nF(p)-p^{n-1}f(+0)-p^{n-2}f'(+0)-\cdots-f^{(n-1)}(+0). \quad (8)$$

Propoziția 5 (Derivarea imaginii). *Dacă $\mathcal{L}f(t)=F(p)$, atunci*

$$F^{(n)}(p)=\mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)]. \quad (9)$$

Propoziția 6 (Integrarea unui original). *Fie $f(t)$ un original. Dacă $f(t)$ este continuă pe $(0, \infty)$ și $\mathcal{L}f(t)=F(p)$, atunci*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right]=\frac{F(p)}{p}. \quad (10)$$

Propoziția 7 (Integrarea imaginii). *Dacă $\frac{f(t)}{t}$ este un original și $F(p)=\mathcal{L}f(t)$, atunci*

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_p^\infty F(q)\,dq. \quad (11)$$

Propoziția 8. *Fie $f(t)$ un original și s abscisa de convergență corespunzătoare. Atunci $e^{at}f(t)$ este un original și pentru* Re $p>s+a$ *avem*

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(p-a). \quad (12)$$

Propoziția 9. *Dacă $f(t)$ și $g(t)$ sînt originale și abscisele lor de convergență sînt s_1, respectiv s_2, atunci funcția numită produs de compoziție*

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau \quad (13)$$

este un original cu abscisa de convergență $s_0\geqslant\max(s_1, s_2)$. Dacă $F(p)=\mathcal{L}f(t)$ și $G(p)=\mathcal{L}g(t)$, atunci

$$F(p)\,G(p)=\mathcal{L}\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau. \quad (14)$$

Propoziția 10. *Dacă $f(t)$ este un original și $F(p)$ transformata sa Laplace, atunci în fiecare punct t în care f este diferențiabilă are loc formula de inversiune a lui Mellin-Fourier:*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\,e^{pt}\,dp. \quad (15)$$

Scanned with OKEN Scanner

Propoziția 11. *Dacă $f(t)$ și $g(t)$ sînt originale cu abscisele de convergență s_1, respectiv s_2, produsul lor $f(t)g(t)$ este un original cu abscisa de convergență s_1+s_2. Dacă $F(p)=\mathcal{L}f(t)$ și $G(p)=\mathcal{L}g(t)$, avem*

$$\mathcal{L}[f(t)\,g(t)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)\,G(p-q)\,dq, \quad a>s_1. \tag{16}$$

Propoziția 12. *Dacă $F(p)$ este o funcție rațională*

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}$$

în care gradul numărătorului este mai mic decît gradul numitorului, iar $B(p)$ are rădăcini simple, fie acestea $p_0, p_1, \ldots, p_n$, atunci $F(p)$ este transformata Laplace (imaginea) *a funcției*

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\,e^{p_k t}. \tag{17}$$

Dacă una dintre rădăcini este zero, de exemplu $p_0=0$, relația (17) se scrie

$$f(t)=\frac{A(0)}{R(0)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{R'(p_k)}\,\frac{e^{p_k t}}{p_k} \tag{18}$$

cu $B(p)=pR(p)$.

Această egalitate (18) se numește *formula lui Heaviside.*

Dacă numărătorul are rădăcini multiple și dacă α_k este ordinul de multiplicitate al polului p_k, avem

$$f(t)=\sum_{k}\frac{1}{(\alpha_k-1)!}\left[(p-p_k)^{\alpha_k}F(p)e^{pt}\right]^{(\alpha_k-1)}_{p=p_k}. \tag{19}$$

Propoziția 13. *Dacă $F(p)$ este olomorfă în afara unui cerc cu centrul în origine și raza R și dacă dezvoltarea sa în serie Laurent este*

$$F(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{p^n}, \quad |p|>R,$$

atunci $F(p)$ este transformata Laplace a funcției

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n-1)!}\,t^{n-1}. \tag{20}$$

Pornind de la definiția transformatei Laplace și utilizînd diversele propoziții, obținem următoarele imagini, respectiv originale:

Nr.	$F(p)$	$f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	$\eta(t)$
2	$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
3	$\frac{1}{p-\alpha \ln a}$	$a^{\alpha t}, \quad a>1$
4	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$
5	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
6	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\operatorname{sh} at$
7	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\operatorname{ch} at$
8	$\frac{a^2}{p(p^2+a^2)}$	$1-\cos at$
9	$\frac{a^2}{p(p^2-a^2)}$	$\operatorname{ch} at-1$
10	$\frac{p+k}{(p+a)^2}$	$[(k-a)t+1]e^{-at}$
11	$\frac{p+k}{p^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\sqrt{k^2+a^2}\sin(at+\varphi), \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{a}{k}$
12	$\frac{1}{p^2(p+a)}$	$\frac{e^{-at}}{a^2}+\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}$
13	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{ab}\left[1+\frac{be^{-at}-ae^{-bt}}{a-b}\right]$
14	$\frac{p+c}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{c}{ab}+\frac{c-a}{a(a-b)}e^{-at}+\frac{c-b}{b(b-a)}e^{-bt}$
15	$\frac{p+b}{(p+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\cos at$

Nr.	$F(p)$	$f(t)$
16	$\frac{a}{(p+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\sin at$
17	$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}
18	$\frac{p}{(p+a)^2}$	$e^{-at}(1-at)$
19	$\frac{p^2+pc+d}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{d}{ab}+\frac{(a^2-ac+d)e^{-at}}{a(a-b)}-\frac{(b^2-bc+d)e^{-bt}}{b(a-b)}$
20	$\frac{p+a}{p(p^2+b^2)}$	$\frac{a}{b^2}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\cos(bt+\varphi)$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.
21	$\frac{p^2+pc+d}{p(p^2+b^2)}$	$\frac{d}{b^2}-\frac{\sqrt{(d-b^2)^2+c^2b^2}}{b^2}\cos(bt+\varphi)$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{bc}{d-b^2}$.
22	$\frac{1}{p[(p+a)^2+b^2]}$	$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b\sqrt{a^2+b^2}}e^{-at}\sin(bt-\varphi)$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$
23	$\frac{1}{p(p^2+2ap+\omega_0^2)}$, $\omega_0^2>a^2$	$\frac{1}{\omega_0^2}\left[1-\frac{\omega_0}{\omega}e^{-at}\sin(\omega t+\varphi)\right]$, $\omega^2=\omega_0^2-a^2$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\omega}{a}$.
24	$\frac{1}{p(p^2+2ap+\omega_0^2)}$, $\omega_0^2<a^2$	$\frac{1}{\omega_0^2}\left[1-\frac{\omega_0^2}{n-m}\left(\frac{e^{-mt}}{m}-\frac{e^{-nt}}{n}\right)\right]$, unde $(-m)$ și $(-n)$ sînt rădăcinile ecuației $p^2+2ap+\omega_0^2=0$
25	$\frac{1}{p^2+2ap+\omega_0^2}$, $\omega_0^2>a^2$	$\frac{e^{-at}}{\omega}\sin\omega t$, $\omega^2=\omega_0^2-a^2$
26	$\frac{1}{p^2+2ap+\omega_0^2}$, $\omega_0^2<a^2$	$\frac{1}{n-m}(e^{-mt}-e^{-nt})$, m și n sînt definiți la punctul 24
27	$\frac{\omega\cos\varphi\pm p\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t\pm\varphi)$
28	$\frac{p\cos\varphi\pm\omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t\pm\varphi)$
29	$\frac{\omega\cos\varphi\pm(p+b)\sin\varphi}{(p+b)^2+\omega^2}$	$e^{-bt}\sin(\omega t\pm\varphi)$

Scanned with OKEN Scanner

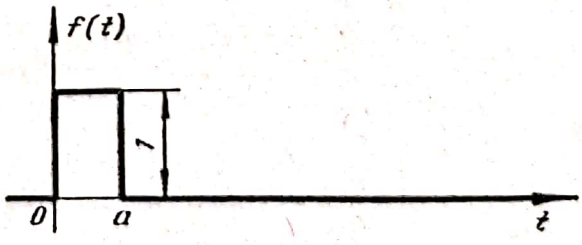
Nr.	$F(p)$	$f(t)$
30	$\frac{(p+b)\cos\varphi \pm \omega \sin\varphi}{(p+b)^2+\omega^2}$	$e^{-bt}\cos(\omega t \pm \varphi)$
31	$\frac{(p-a)^2}{p(p+a)^2}$	$1-4ate^{-at}$
32	$\frac{(p-a)\ (p-b)}{p(p+a)\ (p+b)}$	$1+2\frac{a+b}{a-b}(e^{-at}-e^{-bt})$
33	$\frac{(p-a)^2}{p(p^2+a^2)}$	$1-2\sin at$
34	$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
35	$\frac{1}{(p+a)(p+b)^2}$	$\frac{e^{-at}+[1+(b-a)\ t]\ e^{-bt}}{(b-a)^2}$
36	$\frac{1}{(p+a)^3}$	$\frac{t^2\ e^{-at}}{2}$
37	$\frac{1}{p^3+a^3}$	$\frac{1}{3a^2}\left[e^{-at}-e^{\frac{at}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}at\right)\right]$
38	$\frac{p}{p^3+a^3}$	$\frac{1}{3a}\left[-e^{-at}+e^{\frac{at}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}at\right)\right]$
39	$\frac{p^2}{p^3+a^3}$	$\frac{1}{3}\left(e^{-at}+2\ e^{\frac{at}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at\right)$
40	$\frac{1}{(p+c)\ [(p+a)^2+b^2]}$	$\frac{e^{-ct}}{(c-a)^2+b^2}+\frac{e^{-at}\sin(bt-\varphi)}{b[(c-a)^2+b^2]^{1/2}},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{c-a}$
41	$\frac{1}{p^2(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2}t-\frac{1}{b^3}\sin bt$
42	$\frac{1}{p^2(p^2-b^2)}$	$\frac{1}{b^3}\operatorname{sh} bt-\frac{1}{b^2}t$
43	$\frac{1}{p^4+a^4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}a^3}\left(\operatorname{ch}\frac{a}{\sqrt{2}}t\sin\frac{a}{\sqrt{2}}t-\operatorname{sh}\frac{a}{\sqrt{2}}t\cos\frac{a}{\sqrt{2}}t\right)=$ $=\frac{2}{a^2}\operatorname{Ber} at * \operatorname{Bei} at$

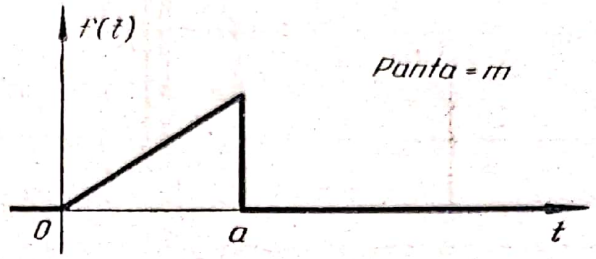
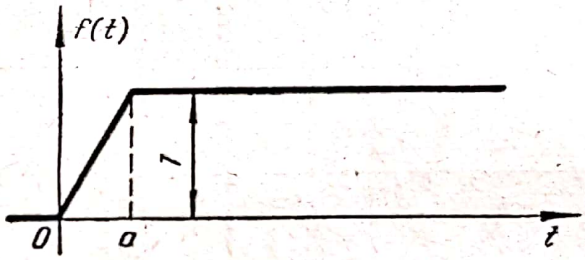
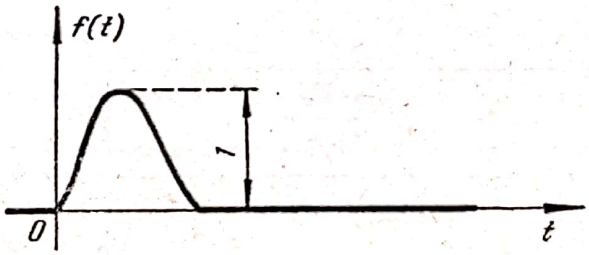
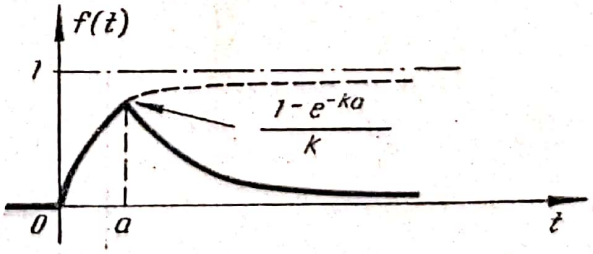
Scanned with OKEN Scanner

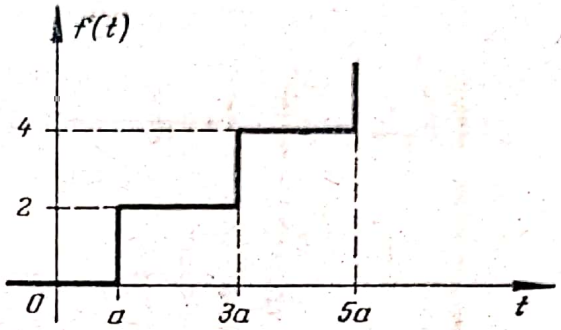
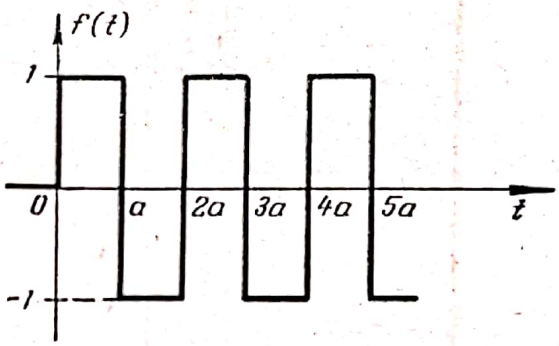
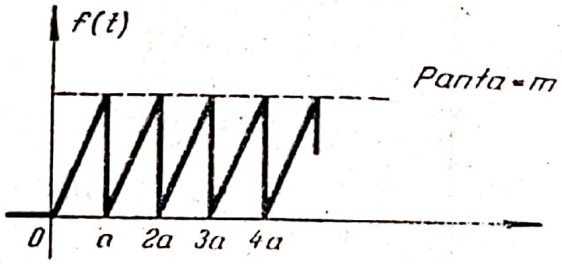
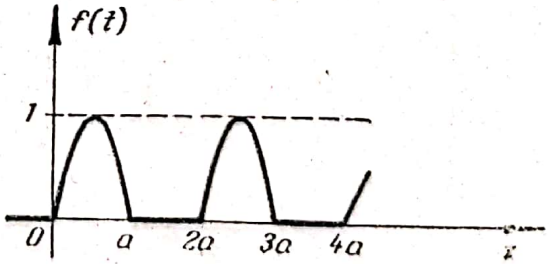
Nr.	$F(p)$	$f(t)$
44	$\frac{p}{p^4+a^4}$	$\frac{1}{a^2}\sin\frac{a}{\sqrt{2}}t\ \mathrm{sh}\frac{a}{\sqrt{2}}t$
45	$\frac{p^2}{p^4+a^4}$	$\cos\frac{a}{\sqrt{2}}t\ \mathrm{ch}\frac{a}{\sqrt{2}}t$
46	$\frac{1}{p^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^3}(\mathrm{sh}\ at-\sin at)$
47	$\frac{p}{p^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^2}(\mathrm{ch}\ at-\cos at)$
48	$\frac{p^2}{p^4-a^4}$	$\frac{1}{2a}(\mathrm{sh}\ at+\sin at)$
49	$\frac{p^3}{p^4-a^4}$	$\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\ at+\cos at)$
50	$\frac{p}{[p^2+(b+a)^2][p^2+(b-a)^2]}$	$\frac{1}{2ab}\sin at\sin bt$
51	$\frac{p^2-2a^2}{p^4+4a^4}$	$\frac{1}{a}\cos at\ \mathrm{sh}\ at$
52	$\frac{p^2+2a^2}{p^4+4a^4}$	$\frac{1}{a}\sin at\ \mathrm{ch}\ at$
53	$\frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+9a^2)}$	$\frac{\sin^3 at}{6a^3}$
54	$\frac{p(p^2+7a^2)}{(p^2+a^2)(p^2+9a^2)}$	$\cos^3 at$
55	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
56	$\frac{1}{(p^2+a^2)^3}$	$\frac{1}{8a^5}[(3-a^2t^2)\sin at-3\ at\cos at]$
57	$\frac{1}{(p^2-a^2)^3}$	$\frac{1}{8a^5}[(3+a^2t^2)\ \mathrm{sh}\ at-3\ a\ \mathrm{ch}\ at]$
58	$\frac{1}{(p+a)^n}$	$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$, $n=1, 2, 3, 4, \ldots$

Nr.	$F(p)$	$f(t)$
59	$\frac{1}{p(p+1)^n}$	$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^t e^{-u}\,u^{n-1}\,du,\ n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$
60	$\frac{2\,n!}{p\,(p^2+2^2)\,(p^2+4^2)\ldots[p^2+(2n)^2]}$	$\sin^{(2n)} t$
61	$\frac{(2n+1)!}{(p^2+1^2)\,(p^2+3^2)\ldots[p^2+(2n+1)^2]}$	$\sin^{(2n+1)} t$
62	$\frac{1}{p\,(ap+1)\ldots(ap+n)}$	$\frac{1}{n!}\left(1-e^{-\frac{t}{a}}\right)^n$
63	$\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}$	$J_0\,(at)$ funcția lui Bessel de speța întîi și de ordin zero
64	$\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}+p}$	$\frac{1}{a}\cdot\frac{J_1\,(at)}{t}$
65	$\frac{1}{(\sqrt{p^2+a^2}+p)^n}$	$\frac{n}{a^n}\cdot\frac{J_n\,(at)}{t},\ n>0$
66	$\frac{1}{p(\sqrt{p^2+a^2}+p)^n}$	$\frac{n}{a^n}\int_0^t\frac{J_n\,(au)}{u}\,du,\ n>0$
67	$(\sqrt{p^2+a^2}-p)^n$	$\frac{na^n}{t}\,J_n\,(at)$
68	$\frac{\sqrt{p}}{p\,(p-a^2)}$	$\frac{1}{a}\,e^{a^2t}\,\mathrm{erf}\,(a\sqrt{t})$
69	$\frac{p}{(p-a)^{3/2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{at}\,(1+2\,at)$
70	$\frac{\sqrt{p+a}}{p}$	$\sqrt{a}\,\mathrm{erf}\,(\sqrt{at})+\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$
71	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$
72	$\frac{1}{p}\,e^{-\frac{a}{p}}$	$J_0\,(2\sqrt{at})$
73	$\frac{1}{\sqrt{p}}\,e^{-\frac{a}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\,(2\sqrt{at})$
74	$\frac{1}{p\sqrt{p}}\,e^{-\frac{a}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\sin\,(2\sqrt{at})$

Scanned with OKEN Scanner

Nr.	$F(p)$	$f(t)$
75	$e^{-a\sqrt{p}}$	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}\, e^{-\frac{a^2}{4t}},\ a \geqslant 0$
76	$\operatorname{arctg} \frac{a}{p}$	$\frac{\sin at}{t}$
77	$\ln \frac{p+b}{p+a}$	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$
78	$\frac{1}{p} \ln \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$	$C_i(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\cos u}{u}\, du$
79	$\frac{1}{p} \operatorname{arctg} p$	$\operatorname{Si}(t) = \int_{0}^{t} \frac{\sin u}{u}\, du$
80	$\frac{1}{p} \ln p$	$-\ln t + \Gamma'(1),\ \Gamma'(1) = -0{,}5772$
81	$\frac{1}{p^2+1} \ln p$	$\cos t \cdot \operatorname{Si}(t) - \sin t \cdot \operatorname{Ci}(t)$
82	$\frac{p}{p^2+1} \ln p$	$-\sin t \cdot \operatorname{Si}(t) - \cos t \cdot \operatorname{Ci}(t)$
83	$\ln \frac{p^2+a^2}{p^2}$	$\frac{2}{t}(1-\cos at)$
84	$\ln \frac{p^2-a^2}{p^2}$	$\frac{2}{t}(1-\operatorname{ch} at)$
85	$\frac{1}{p-a} \ln p$	$e^{at}[\ln a - E_i(-at)]$, unde $E_i(-x) = -\int_{x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du,\ x>0$
86	$\frac{1-e^{-pa}}{p}$	

Nr.	$F(p)$	$f(t)$
87	$\frac{m}{p^2}\left(1-e^{-pa}\right)-\frac{ma}{p}e^{-pa}$	
88	$\frac{1}{a}\frac{1-e^{-pa}}{p^2}$	
89	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\left(1+e^{-pa}\right),\ \omega=\frac{\pi}{a}$	
90	$\frac{1}{p\,(p+k)}\left(1-e^{-pa}\right)$	

Nr.	$F(p)$	$f(t)$
91	$\frac{1}{p \operatorname{sh} pa}$	
92	$\frac{1}{p}\frac{1-e^{-pa}}{1+e^{-pa}}$ sau $\frac{1}{p}\operatorname{th}\frac{pa}{2}$	
93	$\frac{m}{p^2}-\frac{ma}{2p}\cdot(\coth\frac{pa}{2}-1)$	
94	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{1-e^{\frac{-\pi p}{\omega}}}$, $\omega=\frac{\pi}{a}$	

PROBLEME

1. Să se calculeze imaginile următoarelor funcții:

$$1^\circ\ t\sin at;\quad 2^\circ\ \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t};\quad 3^\circ\ \cos^2 kt;\quad 4^\circ\ e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\varphi).$$

R. 1°

$$\mathcal{L}\sin at=\int_0^\infty e^{-pt}\sin at\,\mathrm{d}t=\frac{a}{p^2+a^2}.$$

Derivînd în raport cu p această egalitate, obținem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}[\mathcal{L}\sin at]=-\int_0^\infty e^{-pt}\,t\sin at\,\mathrm{d}t,$$

de unde rezultă imediat

$$\mathcal{L}\,t\sin at=\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}.$$

Obținem imediat același rezultat aplicînd teorema de derivare a imaginii

$$F'(p)=\mathcal{L}[-tf(t)],$$

unde $f(t)=\sin at$ iar $F(p)=\mathcal{L}\sin at=\dfrac{a}{a^2+p^2}$.

2° Aplicăm teorema de integrare a imaginii

$$\mathcal{L}\frac{f(t)}{t}=\int_p^\infty F(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda,$$

unde $F(p)=\mathcal{L}f(t)$.

Avem

$$\mathcal{L}(e^{-at}-e^{-bt})=\mathcal{L}\,e^{-at}-\mathcal{L}\,e^{-bt}=\frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b}$$

și

$$\mathcal{L}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}=\int_p^\infty\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda+a}-\int_p^\infty\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda+b}=\ln\frac{p+b}{p+a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3°

$$\mathcal{L}\cos^2 kt = \mathcal{L}\frac{\cos 2kt+1}{2} = \frac{1}{2}[\mathcal{L}\cos 2kt+\mathcal{L}\eta(t)] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{p}{p^2+4k^2}+\frac{1}{p}\right] = \frac{p^2+2k^2}{p(p^2+4k^2)}.$$

4° Aplicăm propoziția 8:

$$\mathcal{L}[e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\varphi)] = G(p+\lambda),$$

unde

$$G(p) = \mathcal{L}\cos(\omega t+\varphi) = \mathcal{L}\cos\omega\left(t+\frac{\varphi}{\omega}\right).$$

Aplicînd propoziția 3 și apoi propoziția 2, obținem

$$G(p) = \mathcal{L}\cos\omega\left(t+\frac{\varphi}{\omega}\right) = e^{p\frac{\varphi}{\omega}}\mathcal{L}\cos\omega t = e^{p\frac{\varphi}{\omega}}\frac{p}{p^2+\omega^2},$$

de unde rezultă

$$G(p+\lambda) = e^{(p+\lambda)\frac{\varphi}{\omega}}\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}.$$

2. Să se calculeze imaginile funcțiilor

1° $f(t) = \begin{cases} c, \text{ pentru } 2n\tau<t<(2n+1)\tau \\ -c, \text{ pentru } (2n+1)\tau<t<2(n+1)\tau, \end{cases} \begin{pmatrix} n=0, 1, 2, 3, \ldots, \\ c=\text{const} \end{pmatrix}$

2° $g(t) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } t<0, \\ \dfrac{t}{\tau}, \text{ pentru } 0<t<\tau, \\ 2-\dfrac{t}{\tau}, \text{ pentru } \tau<t<2\tau, \\ 0, \text{ pentru } t>2\tau. \end{cases}$

R. Funcția $f(t)$ poate fi scrisă cu ajutorul funcției unitate $\eta(t)$ sub forma

$$f(t) = c[\eta(t)-\eta(t-\tau)]-c[\eta(t-\tau)-\eta(t-2\tau)]+c[\eta(t-2\tau)-\eta(t-3\tau)]+$$

$$+\cdots+(-1)^n c[\eta(t-n\tau)-\eta(t-(n+1)\tau)]+\cdots = c\eta(t)+2c\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\eta(t-n\tau).$$

Avem

$$F(p) = \mathcal{L}f(t) = c\mathcal{L}\eta(t)+2c\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathcal{L}\eta(t-n\tau).$$

Aplicînd teorema întîrzierii, rezultă

$$F(p)=\frac{c}{p}+\frac{2c}{p}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-np\tau}.$$

Funcția $g(t)$ se mai scrie

$$g(t)=\frac{t}{\tau}\eta(t)-\frac{2}{\tau}(t-\tau)\eta(t-\tau)+\frac{1}{\tau}(t-2\tau)\eta(t-2\tau),$$

$$G(p)=\mathcal{L}\,g(t)=\frac{1}{\tau}\mathcal{L}\,t-\frac{2}{\tau}\mathcal{L}\,(t-\tau)+\frac{1}{\tau}\mathcal{L}\,(t-2\tau).$$

Aplicînd teorema întîrzierii, se obține

$$G(p)=\frac{1}{\tau}\left[\frac{1}{p^2}-2\frac{e^{-p\tau}}{p^2}+\frac{e^{-2p\tau}}{p^2}\right]=\frac{1}{p^2\tau}(1-e^{-p\tau})^2.$$

3. Să se determine imaginea funcției periodice (nesinusoidale) $h(t)=h(t+2ka)$, $(k=0, 1, 2, \ldots)$ reprezentate prin graficul din fig. V.3, *a* și a funcției antiperiodice reprezentate prin graficul din fig. V.3, *b*.

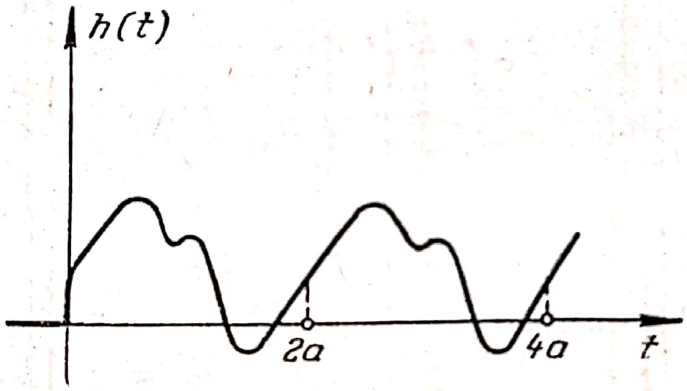


Fig. V.3, *a*

R. Deoarece $h(t)$ este periodică, avem

$$\mathcal{L}\,h(t)=\int_0^{\infty}e^{-pt}h(t)\,dt=\int_0^{2a}e^{-pt}h(t)\,dt+\int_{2a}^{4a}e^{-pt}h(t)\,dt+\cdots+$$

$$+\int_{2na}^{2(n+1)a}e^{-pt}h(t)\,dt+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2na}^{2(n+1)a}e^{-pt}h(t)\,dt.$$

Punînd $u=t-2na$, avem

$$h(t)=h(u+2na),$$

deci

$$h(u)=h(u+2na).$$

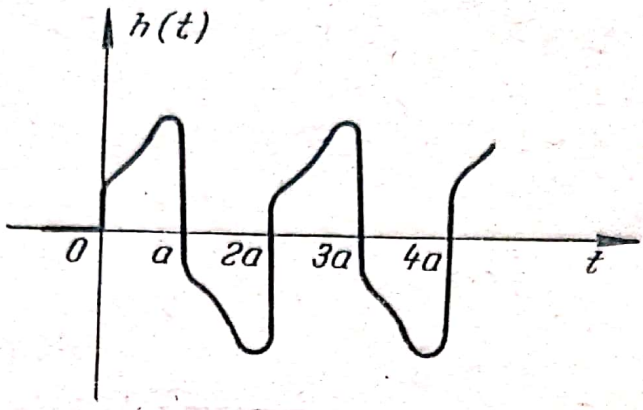


Fig. V.3, *b*

Cu această schimbare de variabilă, obținem

$$\mathcal{L}\,h(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2a}e^{-p(u+2na)}h(u)\,du=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2pna}\int_0^{2a}e^{-pu}h(u)\,du=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2pa}}\int_0^{2a}e^{-pu}h(u)\,du. \qquad (1)$$

În al doilea caz putem scrie

$$\int_0^{2a}e^{-pu}h(u)\,du=\int_0^{a}e^{-pu}h(u)\,du+\int_a^{2a}e^{-p(u+a)}h(u)\,du=$$

$$=\int_0^{a}e^{-pu}h(u)\,du-e^{-pa}\int_0^{a}e^{-pu}h(u)\,du=(1-e^{-pa})\int_0^{a}e^{-pu}h(u)\,du,$$

Dar pentru aceste funcții avem $h(t)=h\,(t+2\,ka)$ și $h(t)=-h\,(t+a)$, deci, ținînd seama de ultima relație și de (1), rezultă

$$\mathcal{L}\,h(t)=\frac{1-e^{-pa}}{1-e^{-2pa}}\int_0^{a}e^{-pt}h(t)\,dt.$$

4. Să se calculeze imaginea funcției periodice $h(t)$ de perioadă T, pentru $t>0$, definită astfel (fig. V.4):

$$h(t)=\begin{cases}0, \text{ pentru } t<0,\\ \dfrac{2Et}{T}, \text{ pentru } 0\leqslant t<\dfrac{T}{2},\\ \dfrac{2E(T-t)}{T}, \text{ pentru } \dfrac{T}{2}\leqslant t<T, \text{ etc.}\end{cases}$$

R. Pentru funcții periodice de perioadă T aplicăm formula

$$\mathcal{L}h(t)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}h(t)\,dt.$$

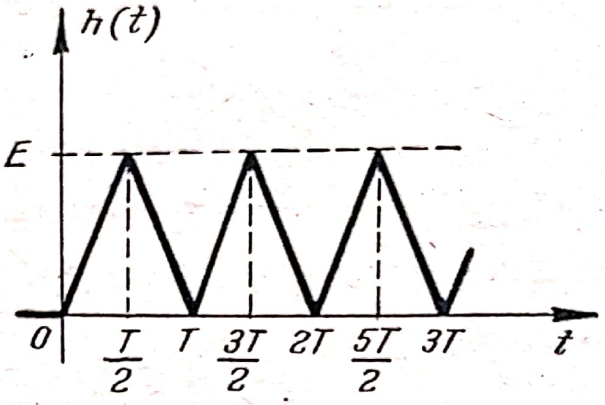


Fig. V.4

Deci

$$\mathcal{L}h(t)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{2Et}{T}e^{-pt}dt+\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_{\frac{T}{2}}^{T}\frac{2E(T-t)}{T}e^{-pt}dt=$$

$$=\frac{2E}{T(1-e^{-pT})}\int_0^{\frac{T}{2}}te^{-pt}dt+\frac{2E}{T(1-e^{-pT})}\int_{\frac{T}{2}}^{T}(T-t)\,e^{-pT}dt.$$

Integrînd prin părți, obținem

$$\mathcal{L}h(t)=\frac{2E}{T(1-e^{-pT})}\left[-\frac{T}{2p}e^{-p\frac{T}{2}}-\frac{e^{-p\frac{T}{2}}}{p^2}+\frac{1}{p^2}-\frac{T}{p}\left(e^{-pT}e^{-p\frac{T}{2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{Te^{-pT}}{p}-\frac{Te^{-p\frac{T}{2}}}{2p}+\frac{e^{-pT}}{p^2}-\frac{e^{-p\frac{T}{2}}}{p^2}\right]=\frac{2E}{p^2T}\frac{1-e^{-p\frac{T}{2}}}{1+e^{-p\frac{T}{2}}}=\frac{2E}{p^2T}\operatorname{th}\frac{pT}{4}.$$

5. Să se arate că $\frac{1}{\sqrt{p+1}}$ este transformata Laplace a funcției erorilor

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\mu^2}\,d\mu.$$

R. Avem

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{p}{\sqrt{p}(p-1)}=e^t * \frac{1}{\sqrt{\pi t}}=e^t\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{e^{-\tau}}{2\sqrt{\tau}}\,d\tau.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $\mu^2=\tau$, rezultă

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{p}{\sqrt{p}(p-1)}=e^t\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-\mu^2}d\mu=e^t\cdot\operatorname{erf}(\sqrt{t}),$$

sau

$$\frac{p}{\sqrt{p}(p-1)}=\mathcal{L}e^t\operatorname{erf}(\sqrt{t}).$$

Aplicînd teorema deplasării și anume, dacă

$$\mathcal{L}h(t)=H(p)\quad\text{atunci}\quad\mathcal{L}e^{at}h(t)=\frac{p}{p-a}H(p-a),$$

avem

$$\frac{p}{p+1}H(p+1)=\frac{p}{p+1}\cdot\frac{p+1}{p\sqrt{p+1}}=\frac{1}{\sqrt{p+1}}=\mathcal{L}\operatorname{erf}(\sqrt{t}).$$

6. Să se calculeze imaginile următoarelor funcții:

1° $\cos t * t$,

2° $|\sin t| * \eta(t)$, cu $\eta(t)=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<0,\\ 1, & \text{pentru } t>0,\end{cases}$

3° $e^{\lambda t} * \sin at$.

R. Aplicăm teorema lui Borel (propoziția 9)

$$F(p)G(p)=\mathcal{L}\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau=\mathcal{L}\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\mathcal{L}[f(t) * g(t)]=\mathcal{L}[g(t) * f(t)].$$

Avem deci

$$1°\quad\mathcal{L}(\cos t * t)=\mathcal{L}\cos t\cdot\mathcal{L}t=\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p(p^2+1)}.$$

* Vezi formula (13) din Introducere.

2° Avem

$$\mathcal{L}\,|\sin t|=\frac{1}{1+p^2}\,\mathrm{th}\,p\frac{\pi}{2},$$

deci

$$\mathcal{L}[|\sin t| * \eta(t)]=\frac{1}{p(1+p^2)}\,\mathrm{th}\,p\frac{\pi}{2}.$$

3°

$$F(p)=\mathcal{L}e^{\lambda t}=\frac{1}{p-\lambda},$$

$$G(p)=\mathcal{L}\sin at=\frac{a}{p^2+a^2}.$$

Rezultă

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t} * \sin at)=F(p)\cdot G(p)=\frac{a}{(p-\lambda)(p^2+a^2)}.$$

7. Să se determine imaginea consinusului integral și a sinusului integral.

R. Prin definiție avem

$$\mathrm{Si}(t)=\frac{\pi}{2}+\mathrm{si}(t)=\frac{\pi}{2}-\int_t^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

$$\mathrm{Ci}(t)=-\int_t^\infty\frac{\cos x}{x}\,dx.$$

Avem

$$\mathcal{L}\sin t=\frac{1}{p^2+1},\quad \mathcal{L}\cos t=\frac{p}{p^2+1}. \tag{1}$$

Aplicînd acestor relații formula

$$\mathcal{L}\int_t^\infty\frac{h(x)}{x}\,dx=\frac{1}{p}\int_0^p F(s)\,ds,$$

obținem

$$\mathcal{L}\,\mathrm{si}(t)=-\mathcal{L}\int_t^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx=-\frac{1}{p}\int_0^p\frac{ds}{s^2+1}=\frac{-1}{p}\operatorname{arctg}p.$$

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Ci}(t)=-\mathcal{L}\int_t^\infty\frac{\cos x}{x}\,dx=-\frac{1}{p}\int_0^p\frac{s\,ds}{s^2+1}=-\frac{1}{p}\ln\sqrt{p^2+1}.$$

8. Să se calculeze originalele următoarelor funcţii

$$1^\circ\ \frac{p^2+3p+1}{(p+1)(p+2)(p+3)};\quad 2^\circ e^{-kp}\frac{1}{p+a};\quad 3^\circ\ \frac{e^{-\frac{a}{p}}}{p^3};\quad 4^\circ\ \frac{1}{(p^2+a^2)^2}.$$

R. 1° Descompunerea în elemente simple conduce la

$$\frac{p^2+3p+1}{(p+1)(p+2)(p+3)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+3}.$$

Deci

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{p^2+3p+1}{(p+1)(p+2)(p+3)}=-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p+1}+\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p+2}+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p+3}=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-t}+e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}.$$

Observînd că numitorul are rădăcini simple şi gradul polinomului de la numărător este mai mic decît al celui de la numitor, se putea aplica direct prima teoremă de dezvoltare

$$f(t)=\sum_{k=1}^{3}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_kt},\quad \text{dacă } F(p)=\frac{A(p)}{B(p)},$$

p_k fiind rădăcinile numitorului.

Avem $B'(p)=3p^2+12p+11$, deci

$$f(t)=\left[\frac{p^2+3p+1}{3p^2+12p+11}e^{pt}\right]_{p=-1}+\left[\frac{p^2+3p+1}{3p^2+12p+11}e^{pt}\right]_{p=-2}+$$

$$+\left[\frac{p^2+3p+1}{3p^2+12p+11}e^{pt}\right]_{p=-3}=-\frac{1}{2}e^{-t}+e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}.$$

2° Remarcînd că $\frac{1}{p+a}=\mathcal{L}\,e^{-at}$, putem scrie

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-kp}\frac{1}{p+a}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-kp}\,\mathcal{L}e^{-at}\right].$$

Teorema întîrzierii ne dă

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-kp}\,\mathcal{L}e^{-at}\right]=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<k,\\ e^{-a(t-k)}, & \text{pentru } t\geqslant k.\end{cases}$$

3° Avem

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{e^{-\frac{a}{p}}}{p^3}=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\cdot\frac{e^{-\frac{a}{p}}}{p}\right).$$

Pentru a determina originalul funcției $\frac{e^{-\frac{a}{p}}}{p}$, să determinăm într-un caz mai general originalul funcției $F(p)=\frac{1}{p^{n+1}}\,e^{-\frac{1}{p}}$. Observăm că $F(p)$ satisface condițiile din a doua teoremă de dezvoltare. Evident

$$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,p^{n+k+1}},\quad |p|>\varepsilon>0,$$

cu ε suficient de mic. Punctul de la infinit este pentru această funcție un punct ordinar. Originalul său este

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{n+k}}{k!\,(n+k)!}.$$

Această funcție poate fi pusă în legătură cu funcțiile lui Bessel de speța întîi și de ordin întreg. Cu schimbarea de variabilă $t=\left(\frac{\tau}{2}\right)^2$ seria devine

$$\left(\frac{\tau}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{\tau}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}=\left(\frac{\tau}{2}\right)^n J_n(\tau).$$

Revenind la vechea variabilă, obținem

$$f(t)=\sqrt{t^n}\,nJ\,(2\sqrt{t}\,)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^{n+1}}\cdot e^{-\frac{1}{p}}\right)$$

În cazul particular $n=0$,

$$\mathcal{L}J_0(2\sqrt{t}\,)=\frac{1}{p}\,e^{-\frac{1}{p}}.$$

Ținînd seama de acest rezultat, avem

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{e^{-\frac{a}{p}}}{p}=J_0(2\sqrt{at}\,).$$

Rezultă că

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\cdot\frac{e^{-\frac{a}{p}}}{p}\right)=t*J_0(2\sqrt{at}\,)=\int_0^t(t-\tau)\,J_0(2\sqrt{a\tau}\,)\,d\tau.$$

Se poate integra utilizînd dezvoltarea în serie a lui $J_0(2\sqrt{a\tau}\,)$.

4° Scriem

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(p^2+a^2)^2}=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+a^2}\cdot\frac{1}{p^2+a^2}\right).$$

Știm că

$$\frac{1}{p^2+a^2}=\mathcal{L}\,\frac{1}{a}\sin at.$$

Din teorema lui Borel rezultă

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(p^2+a^2)^2}=\frac{1}{a}\sin at * \frac{1}{a}\sin at=\frac{1}{a^2}\int_0^t \sin a\tau\cdot\sin a\,(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{\sin at}{2\,a^3}-\frac{t\cos at}{2\,a^2}.$$

9. Să se calculeze originalele funcțiilor

$$1°\ \ln\frac{p+a}{p+b};\quad 2°\ \frac{1}{\sqrt{p}\,e^{a\sqrt{p}}},\quad a>0;\quad 3°\ \frac{\sqrt{p}}{p^2+\omega^2}$$

R. 1° Această expresie se poate scrie $\ln(p+a)-\ln(p+b)$. Avem

$$\frac{1}{p+a}=\frac{1}{p\left(1+\frac{a}{p}\right)}=\frac{1}{p}\left[1-\frac{a}{p}+\frac{a^2}{p^2}-\frac{a^3}{p^3}+\cdots\right]=\frac{1}{p}-\frac{a}{p^2}+\frac{a^2}{p^3}-\frac{a^3}{p^4}+\cdots$$

și integrînd

$$\ln(p+a)=\ln p+\frac{a}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{p^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{a^3}{p^3}+\cdots$$

Rezultă

$$\ln(p+a)-\ln(p+b)=\frac{a}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{p^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{a^3}{p^3}+\cdots-\left(\frac{b}{p}-\frac{1}{2}\frac{b^2}{p^2}+\frac{1}{3}\frac{b^3}{p^3}-\cdots\right),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\ln\frac{p+a}{p+b}=a-\frac{1}{2\,!}a^2t+\frac{1}{3\,!}a^3t^2+\cdots-\left(b-\frac{1}{2\,!}b^2t-\frac{1}{3\,!}b^3t^2+\cdots\right)=$$

$$=\frac{1-e^{-at}}{t}+\frac{e^{-bt}-1}{t}=\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}.$$

2° Integrala Mellin-Fourier se scrie în acest caz

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\sqrt{p}\,e^{pt}}{pe^{a\sqrt{p}}}\,dp.$$

Această funcție are o singularitate pentru $p=0$, deci vom lua conturul lui Bromwich cu tăietura din fig. V.9 și considerăm integrala echivalentă

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}\,e^{a\sqrt{p}}}\,dp=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_1}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}\,e^{a\sqrt{p}}}\,dp+\int_{\gamma}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}\,e^{a\sqrt{p}}}\,dp+\int_{C_2}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}\,e^{a\sqrt{p}}}\,dp\right],$$

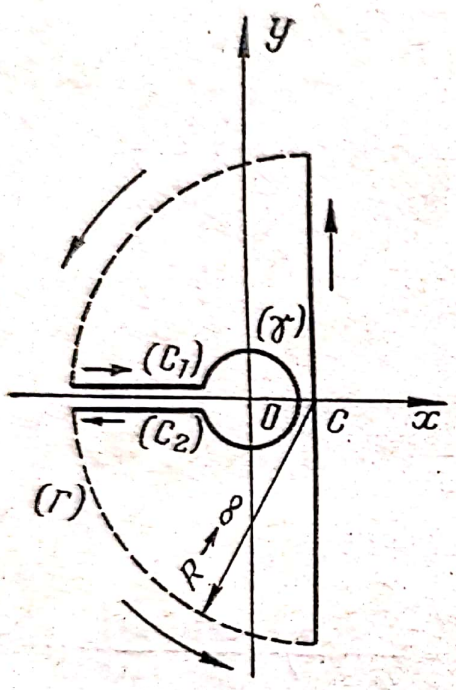


Fig. V.9

integrala pe cercul mare fiind nulă.

Pe cercul mic γ cu centrul în origine avem

$$p=\rho e^{i\theta},\quad dp=i\rho e^{i\theta}d\theta,$$

$$\int_{\gamma}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}\,e^{a\sqrt{p}}}\,dp=$$

$$=\int_{\pi}^{-\pi}\frac{e^{\rho e^{i\theta}t}}{\sqrt{\rho}\,e^{i\frac{\theta}{2}}\cdot e^{a\sqrt{\rho}\,e^{i\frac{\theta}{2}}}}\cdot i\rho e^{i\theta}\,d\theta=i\int_{\pi}^{-\pi}\sqrt{\rho}f(\theta)d\theta$$

și

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}\,e^{a\sqrt{p}}}\,dp=0.$$

Pe partea de sus a tăieturii avem

$$p=re^{i\pi}=-r,\quad \sqrt{p}=i\sqrt{r},\quad dp=-dr,$$

deci

$$\int_{C_1}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}\,e^{a\sqrt{p}}}\,dp=-\int_{R}^{\rho}\frac{e^{-rt}}{i\sqrt{r}\,e^{ai\sqrt{r}}}\,dr\xrightarrow[R\to\infty]{\rho\to 0}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-rt}\,e^{-ai\sqrt{r}}}{i\sqrt{r}}\,dr,$$

iar pe partea de jos a tăieturii

$$\int_{C_2}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}\,e^{a\sqrt{p}}}\,dp\xrightarrow[R\to\infty]{\rho\to 0}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-rt}\,e^{ai\sqrt{r}}}{i\sqrt{r}}\,dr.$$

Rezultă

$$\int_{C_1}+\int_{C_2}=\frac{2}{i}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-rt}}{\sqrt{r}}\cos a\sqrt{r}\,dr$$

și

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{pt}}{\sqrt{p}\,e^{a\sqrt{p}}}\,dp=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{2}{i}\int_0^\infty \frac{e^{-rt}}{\sqrt{r}}\cos a\sqrt{r}\,dr=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-rt}}{\sqrt{r}}\cos a\sqrt{r}\,dr.$$

Cu schimbarea de variabilă $a\sqrt{r}=\mu$, integrala devine

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\mu^2}{a^2}t}}{\frac{\mu}{a}}\cos\mu\cdot\frac{2\mu}{a^2}\,d\mu=\frac{-2}{a\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{\mu^2}{a^2}t}\cdot\cos\mu\cdot d\mu=-\frac{2}{a\pi}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{a^2}{4t}}.$$

Deci

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{pt}}{\sqrt{p}\,e^{a\sqrt{p}}}\,dp=-\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{a^2}{4t}},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{\sqrt{p}\,e^{a\sqrt{p}}}=-\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{a^2}{4t}}.$$

3°

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\sqrt{p}\,e^{pt}}{p^2+\omega^2}\,dp.$$

Această funcție are ca puncte singulare polii simpli $p=\pm i\omega$ și punctul critic $p=0$. Considerăm conturul (Γ) din fig. V.9:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\sqrt{p}\,e^{pt}}{p^2+\omega^2}\,dp=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_1}\frac{\sqrt{p}\,e^{pt}}{p^2+\omega^2}\,dp+\int_{C_2}\frac{\sqrt{p}\,e^{pt}}{p^2+\omega^2}\,dp+\int_\Gamma\frac{\sqrt{p}\,e^{pt}}{p^2+\omega^2}\,dp\right]+R_{i\omega}+R_{-i\omega},$$

unde

$$R_{i\omega}=\left.\frac{e^{pt}\sqrt{p}}{p+i\omega}\right|_{p=i\omega}=\frac{e^{i\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)}}{2i\sqrt{\omega}};\quad R_{-i\omega}=-\frac{e^{-i\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)}}{2i\sqrt{\omega}},$$

deci

$$R_{i\omega}+R_{-i\omega}=\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\int_\gamma\frac{e^{pt}\cdot\sqrt{p}}{p^2+\omega^2}\,dp\to 0\text{ cînd raza cercului }\gamma,\ \rho\to 0.$$

Avem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\sqrt{p}\,e^{pt}}{p^2+\omega^2}\,dp=\frac{1}{2\pi}\int_{\rho}^{R}\frac{e^{-rt}\sqrt{r}}{r^2+w^2}\,dr\xrightarrow[R\to\infty]{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{r}\,e^{-rt}}{r^2+\omega^2}\,dr.$$

Analog

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{\sqrt{p}\,e^{pt}}{p^2+\omega^2}\,dp\xrightarrow[R\to\infty]{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{r}\,e^{-rt}}{r^2+\omega^2}\,dr.$$

În rezultat

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{r}\,e^{-rt}}{r^2+\omega^2}\,dr.$$

10. Să se calculeze integralele

$$I_1=\int_0^{\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt;\quad I_2=\int_0^{\infty}\frac{J_0(t)-\cos t}{t}\,dt,$$

unde

$$J_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

R. Dacă $F(p)=\mathcal{L}\,f(t)$, atunci

$$\int_0^{\infty}F(p)\,dp=\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}f(t)\,e^{-pt}\,dt\right]dp=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f(t)\,e^{-pt}\,dt\,dp.$$

Inversînd ordinea de integrare, ceea ce este posibil, rezultă

$$\int_0^{\infty}F(p)\,dp=\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt,\text{ deoarece }\int_0^{\infty}e^{-pt}\,dp=\frac{1}{t}.$$

Avem

$$\mathcal{L}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)=\mathcal{L}\,e^{-at}-\mathcal{L}\,e^{-bt}=\frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b},$$

deci

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b}\right)dp=\ln\frac{p+a}{p+b}\Bigg|_0^{\infty}=\ln\frac{b}{a}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Știm că

$$\mathcal{L}\, t^n = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

deci

$$\mathcal{L}\, J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{p^{2n+1}} = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{p^{2n}} =$$

$$= \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

sau

$$\mathcal{L}\, J_0(t) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Rezultă

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{J_0(t) - \cos t}{t}\, dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{p}{1+p^2} \right) dp = \ln \frac{p + \sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}} \Bigg|_0^{\infty} = \ln 2.$$

11. Să se dezvolte în serie funcția $f(t)$ pentru care

$$F(p) = \mathcal{L}\, f(t) = \frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{ap}{2}.$$

R. Funcția $f(t)$ este reprezentată în tabelă (v. pag. 253) la poziția 92 și este o funcție periodică de perioadă $2a$. Scriem

$$\Phi(p) = \frac{1}{p}\, e^{pt} \frac{\operatorname{sh} \frac{ap}{2}}{\operatorname{ch} \frac{ap}{2}}.$$

Această funcție are punctele

$$p = 0,\ p = \frac{(2k+1)\pi i}{a},\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots.$$

poli simpli.

Avem deci

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{ap}{2} = \sum \operatorname{Rez}\, \Phi(p) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{p_k t} \operatorname{sh} \frac{p_k a}{2}}{\frac{a}{2} \cdot p_k \operatorname{sh} \frac{p_k a}{2}} = \frac{2}{a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{p_k t}}{p_k}.$$

Rezultă deci

$$f(t) = \frac{2}{\pi i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(2k+1)i\frac{t}{a}}}{2k+1},\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,$$

dezvoltarea în serie Fourier sub formă complexă a funcției $f(t)$. Trecînd la dezvoltarea în serie Fourier cu termeni reali avem

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h}\sin\frac{h\pi t}{a},\quad (h=1,3,5,7,\ldots).$$

12. Să se calculeze coeficienții dezvoltării în serie Fourier a funcției $|\sin\omega t|$ utilizînd calculul operațional.

R. Aplicînd transformarea Carson-Laplace avem

$$L\,|\sin\omega t|=\frac{p\omega}{p^2+\omega^2}\coth\frac{p\pi}{2\omega}.$$

Funcția

$$\Phi(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}e^{pt}\coth\frac{p\pi}{2\omega}=\frac{\omega e^{pt}}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{\operatorname{ch}\frac{p\pi}{2\omega}}{\operatorname{sh}\frac{p\pi}{2\omega}},$$

are polii simpli $p=\pm i\omega$, $p_k=2ki\omega$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ Toți acești poli sînt pe axa imaginară la stînga dreptei de abscisă c. Apoi $\frac{G(p)}{p}\to0$ cînd $|p|\to\infty$ și $t>0$ unde $G(p)=L\,|\sin\omega t|$, deci

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\omega e^{pt}}{p^2+\omega^2}\coth\frac{p\pi}{2\omega}=\sum\operatorname{Rez}\Phi(p).$$

Avem

$$\operatorname*{Rez}_{p=i\omega}\Phi(p)=\frac{\omega}{p+i\omega}e^{pt}\left.\frac{1+e^{-p\frac{\pi}{\omega}}}{1-e^{-p\frac{\pi}{\omega}}}\right|_{p=i\omega}=\frac{\omega}{2i\omega}e^{i\omega t}\frac{1+e^{-i\pi}}{1-e^{-i\pi}}=0,$$

$$\operatorname*{Rez}_{p=-i\omega}\Phi(p)=0,$$

$$\operatorname*{Rez}_{p=2ki\omega}\Phi(p)=\left.\frac{\omega e^{pt}\operatorname{ch}p\frac{\pi}{2\omega}}{p_k(p^2+\omega^2)\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{ch}p\frac{\pi}{2\omega}}\right|_{p=2ki\omega}=\frac{e^{2ki\omega t}}{ki\omega t(1-4k^2)},$$

$$\operatorname*{Rez}_{p=0}\Phi(p)=\left.\frac{\omega e^{pt}\left(1+e^{-p\frac{\pi}{\omega}}\right)}{(p^2+\omega^2)\frac{d}{dp}\left(1-e^{-p\frac{\pi}{\omega}}\right)}\right|_{p=0}=\frac{2}{\pi}.$$

Deci

$$f(t)=\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi\omega}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2k\omega t}{k\,(1-4k^2)}.$$

13. Să se determine soluția ecuației diferențiale

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+6\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+9x=9e^{3t}$$

care satisface condițiile inițiale $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

R. Aplicînd operatorul $\mathcal{L}$ ambilor membri ai ecuației și ținînd seama de condițiile inițiale, avem

$$\mathcal{L}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+6\,\mathcal{L}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+9\,\mathcal{L}\,x=9\,\mathcal{L}\,e^{3t}$$

sau

$$p^2X(p)+6\,pX(p)+9\,X(p)=9\,\frac{1}{p-3},$$

unde $X(p)=\mathcal{L}x(t)$.

Rezultă

$$X(p)=\frac{9}{(p-3)\,(p+3)^2}.$$

Numitorul acestei funcții are rădăcini multiple, deci aplicînd teorema de dezvoltare în acest caz, obținem

$$x(t)=9\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(p-3)\,(p+3)^2}=9\left[\frac{e^{pt}}{(p+3)^2}\bigg|_{p=3}+\left(\frac{e^{pt}}{p-3}\right)'_{p=-3}\right]=$$

$$=\frac{e^{3t}-(1+6t)e^{-3t}}{4}.$$

14. Să se determine soluția ecuației diferențiale

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sin t,$$

care satisface condițiile inițiale $x(0)=0$, $x'(0)=0$, $x''(0)=0$.

R. Vom rezolva ecuația cu ajutorul transformării Carson-Laplace

$$\mathrm{L}x(t)=p\int_0^{\infty}x(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

Ecuația operațională corespunzătoare este

$$p^3X(p)+pX(p)=\frac{p}{p^2+1},$$

de unde rezultă

$$X(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2}.$$

După teorema lui Borel

$$L^{-1}\frac{1}{(p^2+1)^2}=L^{-1}\frac{\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}}{p}=(1-\cos t)*\sin t.$$

Avem

$$(1-\cos t)*\sin t=\int_0^t(1-\cos\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t\sin(t-\tau)\,d\tau-$$

$$-\int_0^t\cos\tau\sin(t-\tau)\,d\tau=1-\cos t-\frac{t}{2}\sin t.$$

Deci

$$x(t)=1-\cos t-\frac{t}{2}\sin t.$$

15. Să se determine soluția ecuației

$$\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=0$$

care satisface condițiile $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

R. Notăm $\mathcal{L}\,y(x)=Y(p)$. Avem

$$\mathcal{L}\frac{d^2y}{dx^2}=p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-1,$$

$$\mathcal{L}\frac{dy}{dx}=-[pY(p)]'+y(0)=-pY'(p)-Y(p).$$

Ecuația operațională corespunzătoare ecuației date este

$$pY'(p)-(p^2-2)\,Y(p)=-1$$

sau

$$Y'(p)-\left(p-\frac{2}{p}\right)Y(p)=-\frac{1}{p}$$

ca soluția

$$Y(p)=e^{\int\left(p-\frac{2}{p}\right)dp}\left[K-\int e^{-\int\left(p-\frac{2}{p}\right)dp}\cdot\frac{1}{p}\,dp\right]=$$

$$=\frac{e^{\frac{p^2}{2}}}{p^2}\left[k+e^{-\frac{p^2}{2}}\right]=\frac{Ke^{\frac{p^2}{2}}}{p^2}+\frac{1}{p^2}.$$

Pentru $|p|\to\infty$ trebuie să avem

$$\lim_{|p|\to\infty}Y(p)=\lim_{x\to 0}y(x),$$

deci dacă impunem condiția $y(0)=0$, rezultă că $Y(p)$ trebuie să fie nul pentru $|p|\to\infty$, ceea ce implică $K=0$, deci

$$Y(p)=\frac{1}{p^2}.$$

Soluția ecuației date este

$$y(x)=x.$$

16. Să se determine soluția ecuației

$$xy''+2y'=x-1$$

care satisface condiția $y(0)=0$.

R. Vom aplica operatorul lui Laplace ambilor membri ai ecuației. Ținînd seama de faptul că $y(0)=0$, avem

$$\mathcal{L}\,y'=pY(p),\ \mathcal{L}\,xy''=-2pY(p)-p^2Y'(p),\ \text{cu}\ Y(p)=\mathcal{L}\,y(x).$$

Ecuația devine

$$p^2Y'(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2},$$

de unde rezultă

$$Y(p)=\frac{1}{3p^3}-\frac{1}{2p^2},$$

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}Y(p)=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p^3}-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p^2}=\frac{x^2}{6}-\frac{x}{2}=\frac{x(x-3)}{6}.$$

17. Să se integreze sistemul

$$\left.\begin{aligned}3x'+2x+y'&=1\\ x'+4y'+3y&=0\end{aligned}\right\},\qquad x>0,$$

cu condițiile inițiale $x(0)=y(0)=0$.

R. Sistemul operațional corespunzător este

$$\left.\begin{aligned} 3\,pX(p)+2\,X(p)+pY(p)&=\frac{1}{p}\\ pX(p)+4\,pY(p)+3\,Y(p)&=0\end{aligned}\right\}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} (3p^2+2p)\,X(p)+p^2Y(p)&=1\\ pX(p)+(4\,p+3)\,Y(p)&=0.\end{aligned}\right\}$$

Soluția acestui sistem este

$$X(p)=\frac{4\,p+3}{p\,(11\,p^2+17\,p+6)}=\frac{4}{11}\cdot\frac{p+\frac{3}{4}}{p\left(p+\frac{6}{11}\right)(p+1)},$$

$$Y(p)=\frac{-p}{p\,(11\,p^2+17\,p+6)}\,\frac{-1}{11\left(p+\frac{6}{11}\right)(p+1)}.$$

Rezultă

$$x(t)=\frac{4}{11}\,\mathcal{L}^{-1}\frac{p+\frac{3}{4}}{p\left(p+\frac{6}{11}\right)(p+1)}=\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\,e^{-\frac{6}{11}t}-\frac{1}{5}\,e^{-t},$$

$$y(t)=-\frac{1}{11}\,\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{\left(p+\frac{6}{11}\right)(p+1)}=\frac{1}{5}\left(e^{-t}-e^{-\frac{6}{11}t}\right).$$

18. Să se determine soluția ecuației integrale

$$x(t)+2\int_0^t x(u)\,du=3\,e^t+2\,t.$$

R. Avem

$\mathcal{L}\,x(t)=X(p)$, $\mathcal{L}\,e^t=\frac{1}{p-1}$, $\mathcal{L}\,t=\frac{1}{p^2}$, și după teorema de integrare a originalului

$$\mathcal{L}\int_0^t x(u)\,du=\frac{1}{p}\,\mathcal{L}\,x(t)=\frac{X(p)}{p}.$$

Ecuația operațională corespunzătoare ecuației integrale este

$$X(p)+2\frac{X(p)}{p}=\frac{3}{p-1}+\frac{2}{p^2}.$$

și deci

$$X(p)=\frac{3p}{(p-1)(p+2)}+\frac{2}{p(p+2)}.$$

Rezultă că

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}X(p)=1+e^{t}+e^{-2t}.$$

19. Să se rezolve ecuația integrală

$$x(t)+2\int_0^t x(u)\,du+3\int_0^t\int_0^\lambda x(\mu)\,d\mu d\lambda=t.$$

R. Avem

$$\mathcal{L}\,x(t)=X(p),\quad \mathcal{L}\int_0^t x(u)\,du=\frac{X(p)}{p},\quad \mathcal{L}\int_0^t\int_0^\lambda x(\mu)\,d\mu\,d\lambda=\frac{X(p)}{p^2}.$$

Deci ecuația operațională corespunzătoare este

$$X(p)+2\frac{X(p)}{p}+3\frac{X(p)}{p^2}=\frac{1}{p^2},$$

de unde rezultă

$$X(p)=\frac{1}{p^2+2p+3}.$$

Soluția ecuației integrale va fi

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p^2+2p+3}=\frac{e^{-t}}{2\sqrt{2}}\sin 2\sqrt{2}\,t.$$

20. Să se rezolve ecuația integrală de tip Volterra

$$x(t)=a\sin bt+c\int_0^t \sin b(t-u)\cdot x(u)\,du,\quad 0<c<b.$$

R. Ecuația se poate scrie sub forma

$$x(t)-c\int_0^t x(u)\sin b(t-u)\,du=a\sin bt.$$

Avem

$$\mathcal{L}\, a \sin bt = \frac{ab}{p^2+b^2},$$ iar după teorema lui Borel

$$\mathcal{L}\int_0^t x(u)\sin b\,(t-u)\,du = \mathcal{L}\,[x(t) * \sin bt] = \frac{X(p)\cdot b}{p^2+b^2}.$$

Ecuația operațională va fi

$$X(p) - \frac{cb}{p^2+b^2}X(p) = \frac{ab}{p^2+b^2},$$

de unde rezultă

$$X(p) = \frac{ab}{p^2+b^2-cb}.$$

Notînd $b^2-bc=\omega^2$, deoarece $0<c<b$,

$$X(p) = \frac{ab}{p^2+w^2}.$$

Rezultă

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}X(p) = \frac{ab}{\omega}\sin\omega t = \frac{ab}{\sqrt{b^2-bc}}\sin\sqrt{b^2-bc}\,t.$$

21. Să se rezolve ecuația integrală de tip Volterra

$$\sin t = t + \int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau}(t-\tau)\,d\tau.$$

R. Avem formula lui Duhamel

$$pF(p)\,G(p) = \mathcal{L}[f(t)\,g(0) + \int_0^t f(\tau)\,g'(t-\tau)\,d\tau],$$

deci

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau}(t-\tau)\,d\tau\right] = pX(p)\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{X(p)}{p}.$$

Ecuația operațională va fi

$$\frac{1}{1+p^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{X(p)}{p},$$

de unde

$$X(p) = \frac{p}{1+p^2} - \frac{1}{p}.$$

Soluția ecuației date va fi

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}X(p) = \cos t - 1.$$

22. O tensiune electromotoare constantă E este aplicată la timpul $t=0$ unui circuit electric format dintr-o inductanţă L, o capacitate C şi o rezistenţă r, în serie (fig. V.22). La timpul $t=0$ sarcina la bornele condensatorului este nulă şi curentul în circuit egal. Să se dea expresia curentului în funcţie de timp.

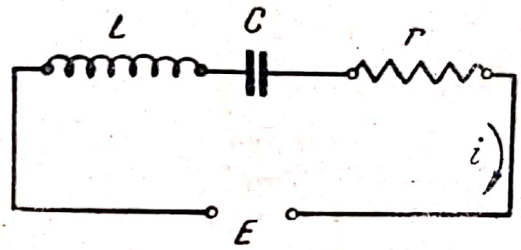


Fig. V.22

R. Ecuaţia diferenţială a sistemului este

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+ri+\frac{q}{C}=E \tag{1}$$

la care se adaugă

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=i, \tag{2}$$

unde i este curentul în circuit iar q sarcina instantanee a condensatorului. Notăm

$$I(p)=\mathcal{L}\,i(t),\quad Q(p)=\mathcal{L}q(t).$$

Cu condiţiile iniţiale

$$i(0)=0,\quad q(0)=0,$$

ecuaţiile (1) şi (2) devin

$$\left.\begin{aligned} Lp\,I+rI+\frac{Q}{C}&=E\\ pQ&=I \end{aligned}\right\}.$$

Înlocuind pe Q din ecuaţia a doua în prima, obţinem ecuaţia

$$LpI+rI+\frac{I}{pC}=E,$$

de unde

$$I=\frac{E}{L\left(p+\frac{r}{L}+\frac{1}{pLC}\right)}=\frac{E}{L}\cdot\frac{p}{p^2+2ap+\omega_0^2},$$

unde $a=\dfrac{r}{2L}$, $\omega_0^2=\dfrac{1}{LC}$.

Avem

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}I(p)=\mathcal{L}^{-1}\frac{E}{L}\cdot\frac{p}{p^2+2ap+\omega_0^2}=\frac{E}{L}\mathcal{L}^{-1}\frac{p}{p^2+2ap+\omega_0^2},$$

deci

$$i(t)=\begin{cases}\dfrac{E}{L}e^{-at}\sin\omega t, & \text{dacă } \omega^2>a^2,\\ \dfrac{E}{L}te^{-at}, & \text{dacă } \omega^2=a^2,\\ \dfrac{E}{L}\dfrac{1}{n-m}(e^{-nt}-e^{-mt}), & \text{dacă } \omega^2<a^2,\end{cases}$$

unde $(-m)$ și $(-n)$ sînt rădăcinile ecuației $p^2+2ap+\omega_0^2=0$ iar $\omega^2=\dfrac{1}{LC}-\dfrac{r^2}{4L^2}$.

23. Mișcarea unui electron supus unui cîmp electric $\vec{E}$ și unui cîmp magnetic $\vec{H}$ satisface ecuația diferențială vectorială

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=-\frac{|e|}{m}(\vec{E}+\mu_0\vec{v}\Delta\vec{H}),$$

unde $\vec{v}$ este viteza electronului, m masa sa, μ_0 coeficientul de permiabilitate magnetică în vid și $|e|$ valoarea absolută a sarcinii sale. Să se determine traiectoria electronului supus celor două cîmpuri.

R. Vom considera cazul particular pentru $\vec{E}$ și $\vec{H}$ uniforme și perpendiculare. Alegem un triedru de referință trirectangular $Oxyz$ cu Oz paralel la $\vec{E}$ și Oy paralel cu $\vec{H}$ (fig. V.23, *a*). Avem

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\mu_0\frac{|e|}{m}\cdot\frac{dz}{dt},\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=0,\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=\frac{|e|}{m}E-\mu_0\frac{|e|}{m}H\frac{dx}{dt}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Presupunem că la timpul $t=0$ electronul se află în origine fără viteză inițială. Notăm $X(p)=\mathcal{L}x(t)$, $Y(p)=\mathcal{L}y(t)$, $Z(p)=\mathcal{L}z(t)$, $\omega=\mu_0\dfrac{|e|}{m}H$, $\alpha=\dfrac{|e|}{m}E$.

Ecuaţiile operaţionale corespunzătoare ecuaţiilor (1) sînt

$$\left.\begin{aligned} &p^2X-\omega pZ=0\\ &Y=0\\ &p^2Z-\frac{\alpha}{p}+p\omega X=0 \end{aligned}\right\}$$

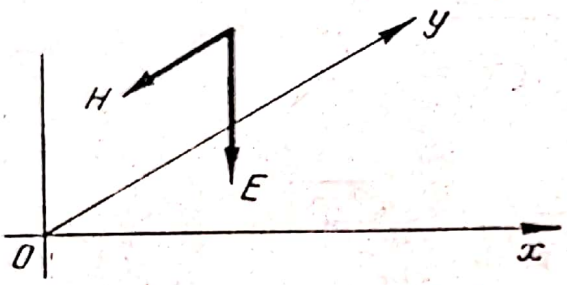


Fig. V.23 , *a*

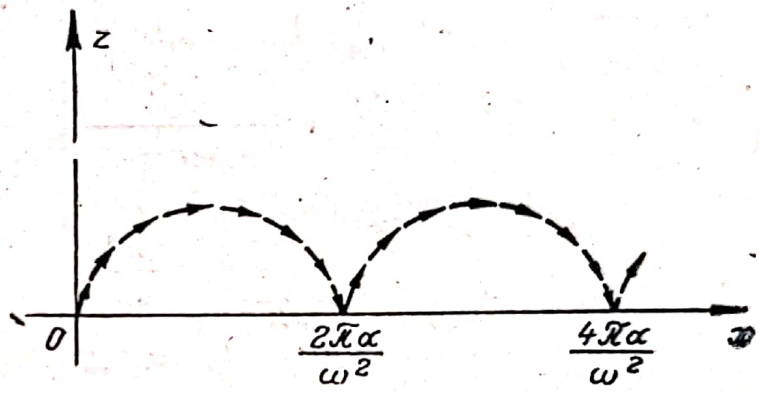


Fig. V.23 , *b*

de unde rezultă

$$X(p)=\frac{\alpha\omega}{p^2(p^2+\omega^2)},\quad Y=0,\quad Z=\frac{\alpha}{p(p^2+\omega^2)}.$$

Originalele acestor funcţii sînt

$$x(t)=\frac{\alpha}{\omega^2}(\omega t-\sin\omega t),$$

$$y(t)=0,$$

$$z(t)=\frac{\alpha}{\omega^2}(1-\cos\omega t).$$

Traiectoria electronului este cicloida din planul xOz (fig. V. 23, *b*).

24. O particulă de masă m se deplasează fără frecare de-a lungul unei axe. Ea este atrasă spre un punct numit origine cu o forţă proporţională cu distanţa de la această masă la origine şi este supusă unei forţe $f(t)$. Să se determine mişcarea particulei (trasînd eventual curba x în funcţie de t, unde x este distanţa de la particulă la origine) în diferite cazuri, presupunînd că la timpul $t=0$ particula este în repaus, adică $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

R. În cazul general ecuaţia diferenţială de mişcare a particulei este

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=f(t). \qquad (1)$$

Ecuația operațională este

$$mp^2X(p)+kX(p)=\mathcal{L}f(t). \tag{2}$$

1° Dacă $f(t)=\begin{cases}0, \text{ pentru } t<0,\\ F_0, \text{ pentru } t>0.\end{cases}$

ecuația (2) devine

$$(mp^2+k)\,X(p)=\frac{F_0}{p},$$

de unde

$$X(p)=\frac{F_0}{p(mp^2+k)}=\frac{F_0}{k}\cdot\frac{\frac{k}{m}}{p^2+\frac{k}{m}},$$

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\cdot\mathcal{L}^{-1}\frac{\frac{k}{m}}{p\left(p^2+\frac{k}{m}\right)}=\frac{F_0}{k}\left(1-\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right),$$

iar curba este reprezentată în fig. V.24, *a*.

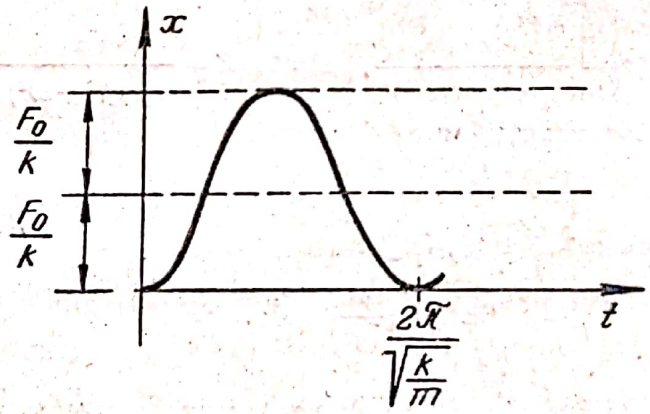


Fig. V.24, *a*

2° $f(t)=\begin{cases}0, \text{ pentru } t<0,\\ F_0\sin\omega t, \text{ pentru } t>0.\end{cases}$

Ecuația (2) se scrie

$$(mp^2+k)\,X(p)=F_0\frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

deci

$$X(p)=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)\left(p^2+\frac{k}{m}\right)}.$$

Soluția ecuației (1) va fi în acest caz

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\frac{F_0}{m}\cdot\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)\left(p^2+\frac{k}{m}\right)}=\frac{F_0\,\omega}{m}\cdot\frac{\omega\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t-\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\omega t}{\omega\sqrt{\frac{k}{m}}\left(\omega^2-\frac{k}{m}\right)}=$$

$$=\frac{F_0\,\omega}{m}\cdot\frac{\omega}{\frac{k}{m}-\omega^2}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}-\frac{\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\right].$$

Dacă se dă în problemă $\omega=\frac{k}{m}$, pulsația forței impuse este egală cu cea a siste-

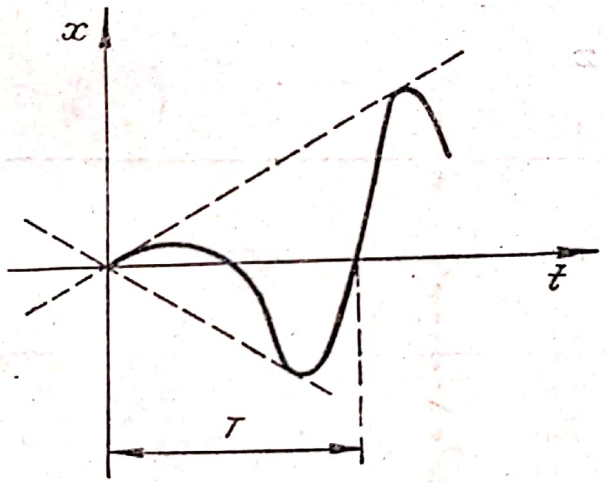


Fig. V.24, *b*

mului și sîntem în cazul rezonanței. Atunci

$$X(p)=\frac{F_0}{m}\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$$

și

$$x(t)=\frac{F_0}{2m\omega^2}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t).$$

În acest caz curba este cea din fig. V.24, *b*.

3° Dacă

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<0,\\ F_0, & \text{pentru } 0<t<a,\\ 0, & \text{pentru } t>a,\end{cases}$$

ecuația operațională este

$$(mp^2+k)X(p)=\frac{F_0(1-e^{-pa})}{p},$$

deci

$$X(p)=\frac{F_0}{m}\frac{1-e^{-pa}}{p(p^2+\omega^2)}=\frac{F_0}{m}\left[\frac{1}{p(p^2+\omega_0^2)}-\frac{e^{-pa}}{p(p^2+\omega_0^2)}\right],$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p(p^2+\omega_0^2)}=\frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0^2},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{e^{-pa}}{p(p^2+\omega_0^2)}=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<a,\\ \dfrac{1-\cos\omega_0(t-a)}{\omega_0^2}, & \text{pentru } t>a.\end{cases}$$

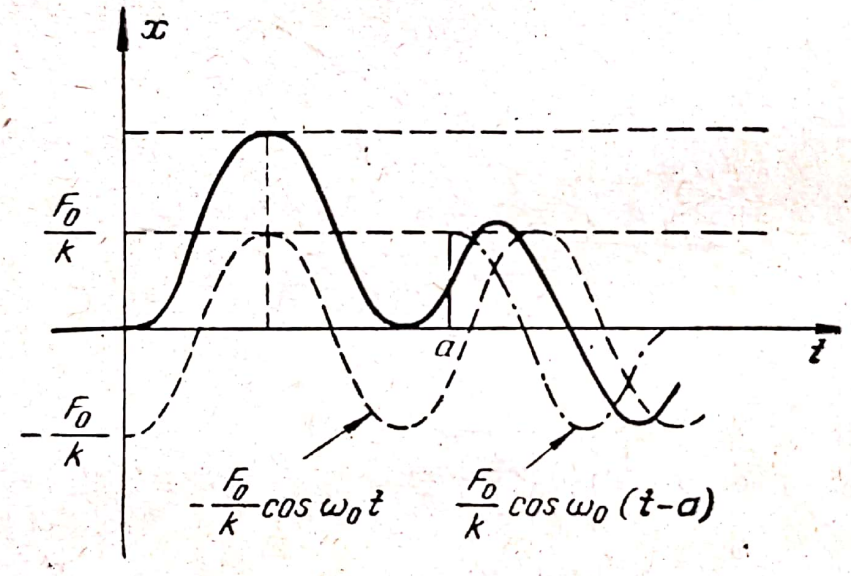


Fig. V.24, c

Rezultă

$$x(t)=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<0,\\ \dfrac{F_0}{k}\left(1-\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right), & \text{pentru } 0<t<a,\\ \dfrac{F_0}{k}[\cos\omega_0(t-a)-\cos\omega_0 t], & \text{pentru } t>a.\end{cases}$$

Curba se obține imediat, utilizînd mai ales rezultatele de la 1° (fig. V.24, *c*).

Scanned with OKEN Scanner

4°

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<a,\\ F_0, & \text{pentru } a<t<b,\\ 0, & \text{pentru } t>b.\end{cases}$$

Ecuația operațională (2) se scrie

$$(mp^2+k)\,X(p)=F_0\,\frac{e^{-pa}-e^{-pb}}{p}$$

$$X(p)=\frac{F_0}{m}\left[\frac{e^{-pa}-e^{-pb}}{p\,(p^2+\omega_0^2)}\right] \text{ cu } \omega_0^2=\frac{k}{m}.$$

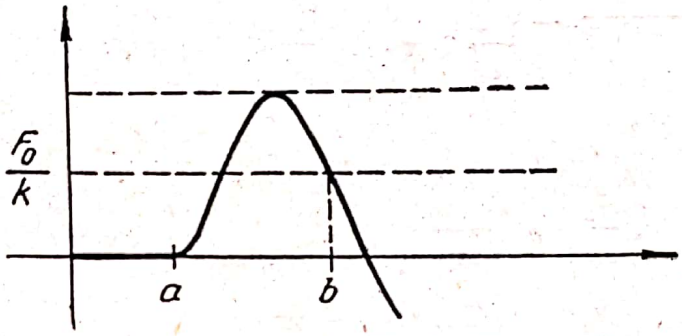


Fig. V.24, *d*

Cu ajutorul rezultatului de la punctul 3°, obținem imediat

$$x(t)=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<a\\ \frac{F_0}{k}\,[1-\cos\omega_0\,(t-a)], & \text{pentru } a<t<b\\ \frac{F_0}{k}\,[\cos\omega_0\,(t-b)-\cos\omega_0\,(t-a)], & \text{pentru } t>b.\end{cases}$$

Variația acestei funcții este reprezentată în fig. V.24, *d*.

5°

$$f(t)=\begin{cases}0, \text{ pentru } t<0,\\ \frac{F_0}{a}\,t, \text{ pentru } 0<t<a,\\ F_0, \text{ pentru } a<t;\end{cases}$$

$$\mathcal{L}f(t)=\frac{F_0}{a}\cdot\frac{1-e^{-pa}}{p^2}.$$

Avem deci

$$mp^2X(p)+kX(p)=\frac{F_0}{a}\frac{1-e^{-ap}}{p^2},$$

de unde

$$X(p)=\frac{F_0}{am}\frac{1-e^{-ap}}{p^2(p^2+\omega_0^2)},\quad \omega_0^2=\frac{k}{m};$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p^2(p^2+\omega_0^2)}=\frac{1}{\omega_0^2}t-\frac{1}{\omega_0^3}\sin\omega_0 t.$$

Aplicînd teorema întîrzierii, obținem

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{e^{-ap}}{p(p^2+\omega_0^2)}=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<a,\\ \dfrac{1}{\omega_0^2}(t-a)-\dfrac{1}{\omega_0^3}\sin\omega_0(t-a), & \text{pentru } t>a.\end{cases}$$

Rezultă

$$x(t)=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<0,\\ \dfrac{F_0}{ak}\left[t-\dfrac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right], & \text{pentru } 0<t<a,\\ \dfrac{F_0}{ak}\left[a+\dfrac{\sin\omega_0(t-a)-\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right], & \text{pentru } a>t.\end{cases}$$

6° Dacă

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<0,\\ F_0\sin\omega t, & \text{pentru } 0<t<\dfrac{\pi}{\omega},\\ 0, & \text{pentru } \dfrac{\pi}{\omega}<t;\end{cases}$$

$$\mathcal{L}f(t)=F_0\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\left(1+e^{-p\frac{\pi}{\omega}}\right).$$

Ecuația (2) se scrie

$$(mp^2+k)X(p)=F_0\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\left(1+e^{-p\frac{\pi}{\omega}}\right),$$

de unde

$$X(p)=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{\omega\left(1+e^{-p\frac{\pi}{\omega}}\right)}{(p^2+\omega^2)(p^2+\omega_0^2)},\quad \text{cu } \omega_0^2=\frac{k}{m}.$$

a) Presupunem $\omega\neq\omega_0$.

În acest caz

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)(p^2+\omega_0^2)}=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<0,\\ \dfrac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\cdot\left[\dfrac{\sin\omega t}{\omega}-\dfrac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right], & \text{pentru } t>0,\end{cases}$$

Din teorema întîrzierii rezultă

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{\omega e^{-p\frac{\pi}{\omega}}}{(p^2+\omega^2)(p^2+\omega_0^2)}=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<0,\\ \dfrac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\left[\dfrac{\sin\omega t}{\omega}-\dfrac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right], & \text{pentru } t>0.\end{cases}$$

Soluția ecuației (1) este

$$x(t)=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<0,\\ \dfrac{F_0}{m}\dfrac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\left[\dfrac{\sin\omega t}{\omega}-\dfrac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right] & \text{pentru } 0<t<\dfrac{\pi}{\omega},\\ \dfrac{F_0}{m}\dfrac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\left[\dfrac{2}{\omega_0}\sin\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega_0 t-\dfrac{\omega_0}{\omega}\dfrac{\pi}{2}\right)\right], & \text{pentru } \dfrac{\pi}{\omega}<t.\end{cases}$$

b) Dacă $\omega=\omega_0$ (rezonanță),

$$X(p)=\frac{F}{m}\cdot\frac{\omega_0\left(1+e^{-p\frac{\pi}{\omega_0}}\right)}{(p^2+\omega_0^2)^2}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{\omega_0}{(p^2+\omega_0^2)^2}=\frac{1}{2\omega_0^2}(\sin\omega_0 t-\omega_0 t\cos\omega_0 t, \qquad \text{pentru } t>0,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{\omega_0 e^{-p\frac{\pi}{\omega_0}}}{(p^2+\omega_0^2)^2}=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<\dfrac{\pi}{\omega_0},\\ \dfrac{1}{2\omega_0^2}[(\omega_0 t-\pi)\cos\omega_0 t-\sin\omega_0 t], & \text{pentru } t>\dfrac{\pi}{\omega_0}.\end{cases}$$

Rezultă

$$x(t)=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<0,\\ \dfrac{F_0}{2k}(\sin\omega_0 t-w_0 t\cos\omega_0 t), & \text{pentru } 0<t<\dfrac{\pi}{\omega_0},\\ -\dfrac{F_0}{2k}\pi\cos\omega_0 t, & \text{pentru } t>\dfrac{\pi}{\omega_0},\end{cases}$$

25. Se consideră pendulele cuplate din fig. V.25. Ecuațiile lui Newton sînt

$$m\ddot{x}_1 = \frac{-mg}{l} x_1 + k(x_2 - x_1),$$

$$m\ddot{x}_2 = -\frac{mg}{l} x_2 + k(x_1 - x_2).$$

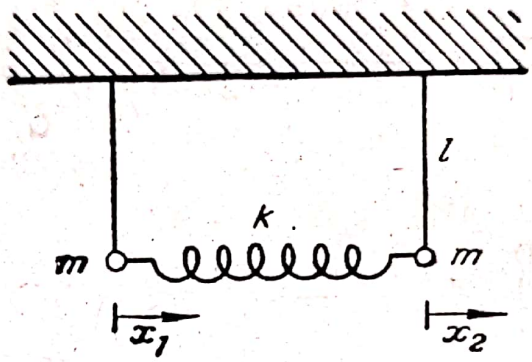


Fig. V.25

Să se determine x_1 și x_2 dacă avem condițiile inițiale $x_1 = x_2 = 0$, $\dot{x}_1 = v$, $\dot{x}_2 = 0$ la $t = 0$.

R. Fie $\mathcal{L}x_i(t) = F_i(p)$. Ecuațiile transformate sînt

$$m(p^2F_1 - v) = -\frac{mg}{l} F_1 + k(F_2 - F_1),$$

$$mp^2F_2 = \frac{mg}{l} F_2 + k(F_1 - F_2).$$

De aici rezultă

$$F_1(p) = \frac{v\left(p^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)}{\left(p^2 + \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}\right)\left(p^2 + \frac{g}{l}\right)} = \frac{v}{2}\left(\frac{1}{p^2 + \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}} + \frac{1}{p^2 + \frac{g}{l}}\right),$$

$$F_2(p) = \frac{kv}{m\left(p^2 + \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}\right)\left(p^2 + \frac{g}{l}\right)}.$$

Avem

$$x_1(t)=\mathcal{L}^{-1}F_1(p)=\frac{v}{2}\left(\frac{\sin\sqrt{\frac{g}{l}+2\frac{k}{m}}\,t}{\sqrt{\frac{g}{l}+2\frac{k}{m}}}+\frac{\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}{\sqrt{\frac{g}{l}}}\right)$$

și

$$x_2(t)=\mathcal{L}^{-1}F_2(p)=\frac{v}{2}\left(-\frac{\sin\sqrt{\frac{g}{l}+2\frac{k}{m}}\,t}{\sqrt{\frac{g}{l}+2\frac{k}{m}}}+\frac{\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}{\sqrt{\frac{g}{l}}}\right).$$

26. Să se studieze comportarea unui galvanometru cu cadru mobil (fig. V.26) ale cărui ecuații diferențiale sînt

$$K\frac{d^2\alpha}{dt^2}+A\frac{d\alpha}{dt}+B\alpha=\Phi_0 i,$$

$$Ri+\Phi_0\frac{d\alpha}{dt}=e(t)$$

în condițiile

1° $\alpha(0)=0$, $\alpha'(0)=0$, $e(t)=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<0,\\ E_0, & \text{pentru } t>0.\end{cases}$

2° $\alpha(0)=0$, $\alpha'(0)=\omega_0$, $e(t)=0$.

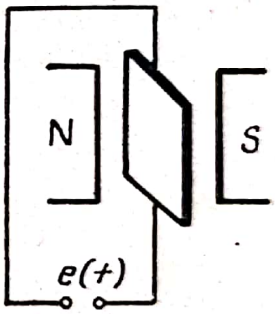


Fig. V.26

R. 1° Notăm $\mathcal{L}\alpha(t)=\Theta(p)$ și $\mathcal{L}i=I(p)$.

Ținînd seama de condițiile inițiale, avem

$$\mathcal{L}\frac{d^2\alpha}{dt^2}=p^2\Theta(p),\quad \mathcal{L}\frac{d\alpha}{dt}=p\Theta(p)\ \text{și}\ \mathcal{L}e(t)=\frac{E_0}{p},\ \text{pentru } t>0.$$

Ecuațiile operaționale sînt

$$\left.\begin{aligned}Kp^2\Theta+Ap\Theta+B\Theta&=\Phi_0 I\\ RI+p\Phi_0\Theta&=\frac{E_0}{p}\end{aligned}\right\}$$

Notînd $D=A+\frac{\Phi_0^2}{R}$, obținem

$$\Theta(p)=\Phi_0\frac{E_0}{R}\cdot\frac{1}{p(Kp^2+pD+B)}.$$

Avem următoarele cazuri de considerat:

a) $D^2-4BK>0$ (regim neperiodic).

În aceste condiții trinomul Kp^2+pD+B se anulează pentru două valori reale și distincte $-m$ și $-n$, deci

$$\Theta(p)=\Phi_0\frac{E_0}{RK}\cdot\frac{1}{p(p+m)(p+n)}\cdot$$

Aplicînd transformarea inversă și ținînd seama de faptul că $\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p-\lambda}=e^{\lambda t}$, rezultă

$$\alpha(t)=\frac{\Phi_0E_0}{RKmn}\left[1+\frac{me^{-nt}-ne^{-mt}}{n-m}\right]$$

sau

$$\alpha(t)=\frac{\Phi_0E_0}{RB}\left[1-\frac{e^{-\frac{D}{2k}t}}{\sqrt{D^2-4BK}}\left(D\,\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{D^2-4BK}}{2K}t+\sqrt{D^2-4BK}\,\mathrm{ch}\,\frac{\sqrt{D^2-4BK}}{2K}t\right)\right].$$

b) $D^2-4BK=0$ (regim critic).

În acest caz avem

$$\Theta(p)=\frac{\Phi_0E_0}{RK}\,\frac{1}{p\left(p+\frac{D}{2K}\right)^2},$$

iar

$$\alpha(t)=\Phi_0\frac{4E_0K}{RD^2}\left[1-e^{-\frac{DT}{2K}}\left(1+\frac{Dt}{2K}\right)\right].$$

Înlocuind $\frac{4K}{D^2}=\frac{1}{B}$, deoarece $4BK=D^2$, rezultă

$$\alpha(t)=\frac{\Phi_0E_0}{RB}\left[1-e^{-\frac{D}{2K}t}\left(1+\frac{D}{2K}t\right)\right].$$

c) $D^2-4BK<0$ (regim periodic).

În acest caz punînd $\mathrm{tg}\,\Phi=\frac{\sqrt{4BK-D^2}}{D}$, rezultă

$$\alpha(t)=\frac{\Phi_0E_0}{RB}\left[1-\frac{2\sqrt{KB}}{\sqrt{4BK-D^2}}e^{-\frac{D}{2K}t}\sin\left(\frac{\sqrt{4BK-D^2}}{2K}t+\Phi\right)\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

2° Cu aceleași notații ca la punctul 1° avem

$$\mathcal{L}\frac{d^2\alpha}{dt^2}=(p^2\Theta-\omega_0)\,\mathcal{L}\frac{d\alpha}{dt}=p\Theta,$$

iar ecuațiile operaționale sînt

$$\left.\begin{aligned}K(p^2\Theta-\omega_0)+Ap\Theta+B\Theta&=\Phi_0 I\\ RI+p\Phi_0\Theta&=0\end{aligned}\right\}$$

de unde

$$\Theta=\frac{\omega_0}{p^2+\frac{D}{K}p+\frac{B}{K}}\quad\text{cu}\quad D=A+\frac{\Phi_0^2}{R}.$$

a) Dacă $D^2-4\,BK>0$, trinomul $p^2+\frac{D}{K}p+\frac{B}{K}$ se anulează pentru două valori reale și distincte $-m$ și $-n$ și deci

$$\Theta=\frac{\omega_0}{(p+m)(p+n)}.$$

Aplicînd transformarea inversă, avem

$$\alpha(t)=\mathcal{L}^{-1}\Theta=\frac{\omega_0}{n-m}(e^{-mt}-e^{-nt})$$

sau

$$\alpha(t)=\frac{2K\omega_0}{\sqrt{D^2-4\,BK}}\,e^{-\frac{D}{2K}t}\,\operatorname{sh}\frac{\sqrt{D^2-4\,BK}}{2K}\,t.$$

b) Dacă $D^2-4\,BK=0$, avem

$$\Theta=\frac{\omega_0}{\left(p+\frac{D}{2K}\right)^2},$$

de unde rezultă

$$\alpha(t)=\omega_0\,te^{-\frac{D}{2K}t}.$$

c) Dacă $D^2-4\,BK<0$, obținem

$$\alpha(t)=\frac{2K\omega_0\,e^{-\frac{D}{2K}t}}{\sqrt{4\,BK-D^2}}\sin\frac{\sqrt{4\,BK-D^2}}{2K}\,t.$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VI

FUNCȚII ȘI ECUAȚII SPECIALE

Definiția 1. *Funcția* $\Gamma(z)$ *sau funcția euleriană de speța a doua poate fi definită pentru toate valorile reale sau complexe ale lui* z *prin relația*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right], \tag{1}$$

γ *fiind constanta lui Euler:*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = 0{,}57721566490\ \ldots$$

Definiția 2. *Funcția* $\Gamma(z)$ *se mai poate defini ca fiind*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n!\, n^z}$$

pentru orice z *finit.*

Definiția 3. *Putem defini funcția* $\Gamma(z)$ *prin următoarea integrală definită:*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt, \quad \text{cu } \operatorname{Re}(z) > 0. \tag{2}$$

Vom da cîteva proprietăți ale funcției $\Gamma(z)$.

1° Pentru orice z finit există relația

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z).$$

2° Oricare ar fi numărul natural n,

$$\Gamma(n+1)=n!$$

3° Pentru funcția $\Gamma(z)$ avem ecuația complementelor

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Definiție. *Funcția lui Euler de prima speță $B(p, q)$, de variabilele complexe p și q, este definită de relația*

$$B(p, q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt, \quad \mathrm{Re}(p)>0, \quad \mathrm{Re}(q)>0. \tag{3}$$

Avem următoarele relații:

$$B(p, q)=B(q, p), \tag{4}$$

$$B(p, q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \tag{5}$$

$$pB(p, q+1)=qB(p+1, q). \tag{6}$$

Funcțiile lui Bessel de speța întîi și a doua de ordinul ν sînt soluții particulare ale ecuației diferențiale

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0, \tag{7}$$

unde ν este un parametru real sau complex. Variabila x ia valori reale sau complexe.

Definiție. *Funcția $J_\nu(x)$ se numește funcția lui Bessel de prima speță și de ordinul ν și*

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2\nu}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}. \tag{8}$$

Soluția generală a ecuației lui Bessel pentru $\nu\neq n$ întreg este de forma

$$y=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x) \quad (C_1, C_2=\text{const}) \tag{9}$$

unde $J_\nu(x)$ se obține din $J_{-\nu}(x)$ prin înlocuirea lui ν cu $-\nu$.

Dacă $\nu=n$ întreg, ecuația Bessel admite în afara unui factor constant o singură soluție de forma (7).

Scanned with OKEN Scanner

Definiție. *Funcția* $Y_\nu(x)$ *definită prin egalitățile*

$$Y_\nu(x)=\frac{1}{\sin\pi\nu}[J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)],\quad \nu\neq n,\ (n=\text{întreg}),$$
$$Y_\nu(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}-(-1)^\nu\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right],\quad \nu=n,\ (n=\text{întreg}), \tag{10}$$

se numește funcția lui Bessel de speța a doua și de ordin ν.

Integrala generală a ecuației lui Bessel se poate scrie, oricare ar fi ν, sub forma

$$y=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x),\quad (C_1,\ C_2=\text{const}). \tag{11}$$

Definiție. *Funcțiile* $H_\nu^{(1)}(x)$ *și* $H_\nu^{(2)}(x)$ *definite prin relațiile*

$$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iY_\nu(x),$$
$$H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iY_\nu(x), \tag{12}$$

se numesc funcțiile lui Bessel de speța a treia sau funcțiile lui Hankel.

Avem următoarele relații de recurență între funcțiile lui Bessel de aceeași speță și de ordine care diferă prin cîte o unitate. Fie $y_\nu(x)$ o soluție oarecare a ecuației Bessel (7). Avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu y_\nu(x)]=x^\nu y_{\nu-1}(x),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu}y_\nu(x)]=-x^{-\nu}y_{\nu+1}(x), \tag{13}$$

sau relații echivalente cu acestea

$$y_{\nu-1}(x)+y_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}y_\nu(x),\quad y_{\nu-1}(x)-y_{\nu+1}(x)=2y'_\nu(x). \tag{13'}$$

Funcțiile $J_n(x)$ admit și următoarea reprezentare

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ix\sin\theta}e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta. \tag{14}$$

Definiție. *Se numește funcția lui Bessel de prima speță, modificată, funcția*

$$I_\nu(x)=i^{-\nu}\cdot J_\nu(ix),\quad i=\sqrt{-1}.$$

Definiţie. *Numim funcţia lui Bessel de speţa a doua, modificată, funcţia*

$$K_\nu(x)=\frac{1}{2}\pi\frac{I_\nu(x)-I_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}.$$

Definiţie. *Polinoamele lui Legendre $P_n(x)$, pentru valori reale sau complexe ale variabilei x, se definesc cu ajutorul formulei*

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n.$$

Folosind formula binomului

$$(x^2-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k!\,(n-k)!}x^{2(n-k)}$$

rezultă

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k\cdot(2n-2k)!}{2^n k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}x^{n-2k}.$$

Polinoamele lui Legendre formează un sistem ortogonal de funcţii în intervalul $(-1, 1)$ *cu ponderea* $\rho(x)=1$*.

Funcţia generatoare a polinoamelor Legendre este

$$w(x, t)=(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}},$$

unde valoarea rădăcinii pentru $t=0$ este luată egală cu unitatea.

Avem următoarele relaţii de recurenţă:

$$(2n+1)xP_n(x)=(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x),$$
$$P_{n+1}(x)-2xP'_n(x)+P'_{n-1}(x)-P_n(x)=0,$$
$$nP_n(x)-xP'_n(x)+P'_{n-1}(x)=0,$$
$$(n+1)P_n(x)+xP'_n(x)-P'_{n+1}(x)=0,$$
$$(2n+1)P_n(x)=P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x).$$

* Un sistem de funcţii $\{f_n(x)\}$ definite pe un interval (α, β) formează în acest interval un sistem ortogonal cu ponderea $\rho(x)$ dacă

$$\int_\alpha^\beta \rho(x)f_n(x)f_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & \text{pentru } m\neq n,\\ A, & \text{pentru } m=n.\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 1. *Fie $f(x)$ o funcție reală oarecare, definită în intervalul $(-1, 1)$ și satisfăcînd condițiile:*

1° $f(x)$ este o funcție netedă pe porțiuni în intervalul deschis $(-1, 1)$;

2° integrala $\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx$ are o valoare finită,

atunci $f(x)$ se poate dezvolta în serie de polinoame Legendre

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \qquad -1<x<1,$$

coeficienții c_n fiind dați de relațiile

$$c_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Definiție. *Polinoamele lui Hermite $H_n(x)$ pot fi definite cu ajutorul relației*

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Avem

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k n!}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k}.$$

Funcția generatoare a polinoamelor Hermite este

$$w(x,\ t)=e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n, \quad |t|<\infty.$$

Relații de recurență:

$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0,$$
$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x),$$
$$H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0.$$

Polinoamele lui Hermite sînt ortogonale în intervalul $(-\infty, +\infty)$ cu ponderea $\rho(x)=e^{-x^2}$.

Teorema 2. *Fie $f(x)$ o funcție reală oarecare, definită în intervalul $(-\infty, +\infty)$ și care satisface condițiile:*

1° *$f(x)$ este netedă pe porțiuni în orice interval finit $(-a, a)$;*

2° *integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2} f^2(x)\,dx$ are o valoare finită.*

În aceste condiții $f(x)$ se poate dezvolta în serie de polinoame Hermite

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x),$$

cu coeficienții

$$c_n=\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-x^2}H_n(x)dx.$$

Atît în cazul teoremei 1, cît și a teoremei 2, în punctele de discontinuitate valoarea sumei este

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

Polinoamele Laguerre $L_n^{\alpha}(x)$, pentru orice valori reale ale lui $\alpha>-1$, se definesc prin formula

$$L_n^{\alpha}(x)=e^x\frac{x^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha}), \qquad n=0, 1, 2, \ldots$$

Expresia generală pentru polinomul de grad n se obține aplicînd regula lui Leibniz care conduce la o relație de forma

$$L_n^{\alpha}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\cdot\frac{(-x)^k}{k!(n-k)!}.$$

Polinoamele lui Laguerre sînt ortogonale în intervalul $(0, \infty)$ cu ponderea $\rho(x)=x^{\alpha}e^{-x}$.

Aceste polinoame se pot reprezenta ca coeficienți ai dezvoltării în seria funcției generatoare

$$w(x, t)=(1-t)^{-\alpha-1}e^{-\frac{tx}{1-t}}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{\alpha}(x)t^n, \quad |t|<1.$$

Relații de recurență:

$$(n+1)\,L_{n+1}^{\alpha}(x)+(x-\alpha-2n-1)\,L_n^{\alpha}(x)+(n+\alpha)\,L_{n-1}^{\alpha}(x)=0,$$

$$\frac{dL_n^{\alpha}(x)}{dx}-\frac{dL_{n-1}^{\alpha}(x)}{dx}+L_{n-1}^{\alpha}(x)=0,\quad n=1,2,\ldots,$$

$$(x-n-1)\frac{dL_n^{\alpha}(x)}{dx}+(n+1)\frac{dL_{n+1}^{\alpha}(x)}{dx}+(2n+2+\alpha-x)\,L_n^{\alpha}(x)-$$

$$-(n+1)\,L_{n+1}^{\alpha}(x)=0,\quad n=0,1,2,\ldots,$$

$$x\frac{dL_n^{\alpha}(x)}{dx}=nL_n^{\alpha}(x)-(n+\alpha)\,L_{n-1}^{\alpha}(x),\quad n=1,2,\ldots,$$

$$L_n^{\alpha+1}(x)-L_{n-1}^{\alpha+1}(x)=L_n^{\alpha}(x),\quad n=1,2,\ldots$$

Definiție. *Polinoamele lui Cebîșev* $T_n(x)$ *sînt polinoame ortogonale cu ponderea* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *pe intervalul* $(-1,+1)$.

Avem

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k C_n^{2k}\,x^{n-2k}(1-x^2)^k.$$

Toate zerourile lui $T_n(x)$ *sînt reale și cuprinse între* -1 *și* $+1$. *Zeroul* x_i *de rang* i *este dat de formula*

$$x_i=\cos(2i-1)\frac{\pi}{2n},\quad (i=1,2,3,\ldots,n).$$

Funcția generatoare a polinoamelor lui Cebîșev este $\frac{1-\xi x}{1-2\xi x+\xi^2}$.

Avem

$$\tau(\xi,x)=\frac{1-\xi x}{1-2\xi x+\xi^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n T_n(x),\quad |\xi|<1.$$

Între polinoamele lui Cebîșev există relația de recurență

$$T_{n+1}(x)-2nT_n(x)+T_{n-1}(x)=0;\qquad n=1,2,3,\ldots$$

PROBLEME

1. Să se calculeze integrala

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{(a+bx^n)^p}\,dx,\quad a>0,\ b>0,\ np>m+1>0.$$

R. Avem

$$I=\int_0^\infty \frac{x^m}{(a+bx^n)^p}\,dx=a^{-p}\int_0^\infty \frac{x^m}{\left(1+\frac{b}{a}x^n\right)^p}\,dx.$$

Facem substituția $\frac{b}{a}x^n=u$:

$$I=\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int_0^\infty u^{\frac{m+1}{n}-1}(1+u)^{-p}\,du=\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}B\left(\frac{m+1}{n},\ p-\frac{m+1}{n}\right)=$$

$$=\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(p-\frac{m+1}{n}\right)}{\Gamma(p)}.$$

2. Să se demonstreze relația lui Euler

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\,dt=\frac{\Gamma(z)}{\lambda^z}\cos\alpha z,\ \left(\lambda>0,\ t>0,\ -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

R. Înlocuind pe $\cos(\lambda t\sin\alpha)$ cu relația

$$\cos(\lambda t\sin\alpha)=\frac{e^{i\lambda t\sin\alpha}+e^{-i\lambda t\sin\alpha}}{2},$$

obținem

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^\infty t^{z-1}e^{-\lambda t(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\,dt+\int_0^\infty t^{z-1}e^{-\lambda t(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\,dt\right].$$

Făcînd în prima integrală substituția $t=\frac{u(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{\lambda}$, obținem

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-\lambda t(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\,dt=\int_0^\infty \frac{u^{z-1}e^{-u}(\cos\alpha z+i\sin\alpha z)}{\lambda^z}\,du=$$

$$=\frac{\cos\alpha z+i\sin\alpha z}{\lambda^z}\Gamma(z).$$

În integrala a doua, făcînd substituția $t=\frac{v(\cos\alpha-i\sin\alpha)}{\lambda}$, obținem

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-\lambda t(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\,dt=\frac{\cos\alpha z-i\sin\alpha z}{\lambda^z}\Gamma(z).$$

Înlocuind în (1) obținem relația din enunț.

3. Să se calculeze

$$I=\int_0^\pi \frac{\sin^n x}{(1+a\cos x)^{n+1}}\,dx,\quad n>0,\quad 0<a<1.$$

R. Făcînd substituția

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{tg}\frac{t}{2},$$

obținem

$$I=2^n\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^{\frac{n+1}{2}}\int_0^\pi \frac{\operatorname{tg}^n\frac{t}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right)}{(1+a)^{n+1}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right)^{n+1}}\,dt=$$

$$=2^n\frac{1}{(1-a^2)^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^\pi \operatorname{tg}^n\frac{t}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right)^{-n}dt.$$

În ultima integrală se face substituția $\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} = u$ și se obține

$$I = \frac{2^n}{(1-a^2)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{\infty} u^{\frac{n-1}{2}} (1+u)^{-(n+1)} du = \frac{2^n}{(1-a^2)^{\frac{n+1}{2}}} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) =$$

$$= \frac{2^n}{(1-a^2)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(n+1)}.$$

4. Să se arate că

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 \ln 2.$$

R. Se pornește de la relația

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Avem

$$\frac{\Gamma(p+q) - \Gamma(p)}{q} = \frac{\Gamma(q) - B(p, q)}{B(p, q)} \cdot \frac{1}{q} \Gamma(p) = [\Gamma(q) - B(p, q)] \frac{\Gamma(p)}{B(p, q)} \cdot \frac{1}{q} =$$

$$= [\Gamma(q) - B(p, q)] \frac{\Gamma(p+q)}{q\Gamma(q)} = [\Gamma(q) - B(p, q)] \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q+1)},$$

deci

$$\Gamma'(p) = \lim_{q \to 0} \frac{\Gamma(p+q) - \Gamma(p)}{q} = \lim_{q \to 0} [\Gamma(q) - B(p, q)] = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(1)}. \qquad (1)$$

Se știe că funcția Γ este derivabilă, deci limita din stînga egalității există și, prin urmare, există și limita din dreapta.

Dacă în relația de definiție a funcției $B(p, q)$,

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt,$$

se face substituția $t = e^{-u}$, rezultă expresia

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} e^{-pu} (1-e^{-u})^{q-1} du.$$

Din (1) rezultă ținînd seama de faptul că $\Gamma(1)=1$,

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}=\lim_{q\to 0}\int_0^\infty [e^{-u}u^{q-1}-e^{-pu}(1-e^{-u})^{q-1}]\,du=$$

$$=\int_0^\infty \lim_{q\to 0}[e^{-u}u^{q-1}-e^{-pu}(1-e^{-u})^{q-1}]\,du=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-u}}{u}-\frac{e^{-pu}}{1-e^{-u}}\right)du.$$

Ținînd seama de relația (2), avem

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}-\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\int_0^\infty\left[\left(\frac{e^{-u}}{u}-\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\right)-\left(\frac{e^{-u}}{u}-\frac{e^{-\frac{u}{2}}}{1-e^{-u}}\right)\right]du=$$

$$=-\int_0^\infty\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\,du+\int_0^\infty\frac{e^{-\frac{u}{2}}}{1-e^{-u}}\,du.$$

Făcînd substituția $e^{-\frac{u}{2}}=v$, obținem

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}-\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=2\int_0^1\frac{dv}{1+v}=2\ln 2.$$

5. Să se stabilească formula lui Gauss

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz),\ (n\text{ natural})$$

și să se arate că

$$B(p,p)\cdot B\left(p+\frac{1}{2},\,p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2^{4p-1}}\cdot\frac{1}{p}.$$

R. Avem

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\int_0^\infty\left[e^{-t}-\frac{1}{(1+t)^z}\right]\frac{dt}{t}. \qquad (1)$$

Notînd $\Gamma'(1)=-\gamma$ (γ este constanta lui Euler) avem

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=\Gamma'(1)=-\gamma=\int_0^\infty\left(e^{-t}-\frac{1}{1+t}\right)\frac{dt}{t}. \tag{2}$$

Scăzînd din (1) formula (2), obținem

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}+\gamma=\int_0^\infty\left[\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^z}\right]\frac{dt}{t}=\int_0^\infty\frac{1}{1+t}\left[1-\frac{1}{(1+t)^{z-1}}\right]\frac{dt}{t}.$$

În ultima integrală facem substituția $x=\frac{1}{1+t}$:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\int_0^1\frac{1-x^{z-1}}{1-x}\,dx-\gamma.$$

Punînd acum $x=u^n$, obținem

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}+\gamma=n\int_0^1\frac{u^{n-1}-u^{nu-1}}{1-u^n}\,du,$$

de unde înlocuind pe z cu $z+\frac{k}{n}$, $(k=0, 1, \ldots, n-1)$, rezultă

$$\frac{\Gamma'\left(z+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)}+\gamma=n\int_0^1\frac{u^{n-1}-u^{nz+k-1}}{1-u^n}\,du.$$

Însumînd ultima relație pentru $k=0, 1, \ldots, n-1$, avem

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma'\left(z+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)}+n\gamma=n\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1\frac{u^{n-1}-u^{nz+k-1}}{1-u^n}\,du=n\int_0^1\left[\frac{nu^{n-1}}{1-u^n}-\frac{u^{nz-1}}{1-u}\right]du.$$

Deoarece

$$\frac{\Gamma'(nz)}{\Gamma(nz)}+\gamma=\int_0^1\frac{1-u^{nz-1}}{1-u}\,du,$$

vom avea

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\left(z+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)} - n\frac{\Gamma'(nz)}{\Gamma(nz)} = n\int_0^1 \left(\frac{nu^{n-1}}{1-u^n} - \frac{1}{1-u}\right) du = -n \ln \frac{1-u^n}{1-u}\Big|_0^1 = n \ln n.$$

Dar

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\left(z+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)} - n\frac{\Gamma'(nz)}{\Gamma(nz)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln \left[\frac{\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(nz)}\right].$$

Avem prin integrare

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = Cn^{-nz}, \tag{3}$$

unde C este o constantă de integrare. Pentru a determina această constantă facem în (3) $z=1$:

$$\Gamma(1)\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(1+\frac{n-1}{n}\right) = \frac{C}{n^n}.$$

Ridicînd ultima relație la pătrat, avem

$$\prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{n}\right) = \frac{C^2}{n^{2n}},$$

dar

$$\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{k}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi k}{n}},$$

rezultă

$$\frac{C^2}{n^{2n}} = \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Pentru a determina valoarea produsului $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{\pi k}{n}$, considerăm identitatea

$$\frac{z^n-1}{z-1} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(z-\cos\frac{\pi\,2k}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Pentru $z=1$ găsim

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

de unde, luînd modulul

$$n=\prod_{k=0}^{n-1}\left|1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right|=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n},$$

deci

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

și

$$C=n^{n-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Rezultă din (3)

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{nz-\frac{1}{2}}}\Gamma(nz). \tag{4}$$

Avem

$$B(p,p)\cdot B\left(p+\frac{1}{2},\,p+\frac{1}{2}\right)=\frac{[\Gamma(p)]^2}{\Gamma(2p)}\cdot\frac{\left[\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(2p+1)}=\frac{\left[\Gamma(p)\cdot\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{2p\,[\Gamma(2p)]^2}.$$

Dacă facem în relația (4) $n=2$ și $z=p$, obținem

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma(2p)}{2^{2p-\frac{1}{2}}},$$

deci

$$B(p,p)\cdot B\left(p+\frac{1}{2},\,p+\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi[\Gamma(2p)]^2}{2p\cdot 2^{4p-1}[\Gamma(2p)]^2}=\frac{\pi}{p\cdot 2^{4p-1}}.$$

6. Să se demonstreze că între funcțiile lui Bessel de prima speță există relațiile

$$J_\nu(x)\,J_{-\nu+1}(x)+J_{-\nu}(x)J_{\nu-1}(x)=\frac{2\sin\pi\nu}{\pi x},$$

$$J_\nu(x)J_{-\nu-1}(x)+J_{-\nu}(x)J_{\nu+1}(x)=-\frac{2\sin\pi\nu}{\pi x}.$$

R. Wronskianul funcțiilor $J_\nu(x)$, $J_{-\nu}(x)$ este

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = -\frac{2\sin\pi\nu}{\pi x}$$

sau

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = \begin{vmatrix} J_\nu & J_{-\nu} \\ J'_\nu & J'_{-\nu} \end{vmatrix} = J_\nu J'_{-\nu} - J_{-\nu} J'_\nu = -\frac{2\sin\pi\nu}{\pi x}.$$

Relațiile de recurență între funcțiile lui Bessel ne dau

$$\begin{aligned} J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) &= 2J'_\nu(x), \\ J_{-\nu-1}(x) - J_{-\nu+1}(x) &= 2J'_{-\nu}(x) \end{aligned} \tag{1}$$

și

$$\begin{aligned} J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \\ J_{-\nu+1}(x) + J_{-\nu-1}(x) &= -\frac{2\nu}{x} J_{-\nu}(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Înlocuind în expresia wronskianului pe $J'_\nu(x)$, $J'_{-\nu}(x)$ prin relațiile (1) obținem

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = \frac{1}{2} J_\nu(x)[J_{-\nu-1}(x) - J_{-\nu+1}(x)] - \frac{1}{2} J_{-\nu}(x)[J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)] =$$

$$= -\frac{1}{2}[J_\nu(x) J_{-\nu+1}(x) + J_{-\nu}(x) J_{\nu-1}(x)] + \frac{1}{2}[J_\nu(x) J_{-\nu-1}(x) + J_{-\nu}(x) J_{\nu+1}(x)]. \tag{3}$$

În ultima paranteză înlocuim $J_{-\nu-1}(x)$ și $J_{\nu+1}(x)$ prin relațiile (2) și obținem

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = -[J_\nu(x) J_{-\nu+1}(x) + J_{-\nu}(x) J_{\nu-1}(x)] = -\frac{2\sin\pi\nu}{\pi x},$$

deci

$$J_\nu(x) J_{-\nu+1}(x) + J_{-\nu}(x) J_{\nu-1}(x) = \frac{2\sin\pi\nu}{\pi x}.$$

Pentru a obține relația a doua din enunț în expresia (3) a wronskianului, înlocuim în prima paranteză pe $J_{-\nu+1}(x)$ și $J_{\nu-1}(x)$ cu expresiile din (2) și obținem

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = J_\nu(x) J_{-\nu-1}(x) + J_{-\nu}(x) J_{\nu+1}(x) = -\frac{2\sin\pi\nu}{\pi x}.$$

7. Să se demonstreze relațiile

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2}\pi i e^{i\frac{\pi\nu}{2}} H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\pi i e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} H_{-\nu}^{(1)}(x).$$

R. Avem pentru funcțiile lui Hankel expresiile

$$H_\nu^{(1)}(x)=i\,\frac{J_\nu(x)e^{-i\pi\nu}-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu},\qquad H_{-\nu}^{(1)}(x)=e^{i\pi\nu}H_\nu^{(1)}(x),\tag{1}$$

iar pentru funcțiile lui Bessel modificate

$$I_\nu(x)=e^{-i\nu\frac{\pi}{2}}J_\nu(ix),\qquad K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\pi\nu},\tag{2}$$

deci ținînd seama de relațiile (1) și (2) rezultă

$$K_\nu(x)=\frac{1}{2}\pi ie^{i\frac{\pi\nu}{2}}H_\nu^{(1)}(x)=\frac{1}{2}\pi ie^{i\frac{\pi\nu}{2}}\cdot i\,\frac{J_\nu(ix)e^{-i\pi\nu}-J_{-\nu}(ix)}{\sin\pi\nu}=$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{i\frac{\pi\nu}{2}}\,\frac{J_{-\nu}(ix)-J_\nu(ix)e^{-i\pi\nu}}{\sin\pi\nu}=\frac{\pi}{2}e^{i\frac{\pi\nu}{2}}\,\frac{e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}I_{-\nu}(x)-e^{i\frac{\pi\nu}{2}}I_\nu(x)e^{-i\pi\nu}}{\sin\pi\nu}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\pi\nu}$$

și deci, prima egalitate este demonstrată.

Pentru a demonstra ultima egalitate, dacă ținem seama de relația a doua din (1), obținem

$$\frac{1}{2}\pi ie^{-i\frac{\pi\nu}{2}}H_\nu^{(1)}(x)=\frac{1}{2}\pi ie^{-i\frac{\pi\nu}{2}}e^{i\pi\nu}H_\nu^{(1)}(x)=\frac{1}{2}\pi ie^{i\frac{\pi\nu}{2}}H_\nu^{(1)}(x).$$

8. Să se calculeze integralele lui Fresnel

$$I_1(\nu)=\int_0^\nu\cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt,\quad I_2(\nu)=\int_0^\nu\sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt.$$

R. Cu transformarea $\frac{\pi t^2}{2}=z$ integralele se scriu

$$I_1(\nu)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi\nu^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi\nu^2}{2}}J_{-\frac{1}{2}}(z)dz,$$

$$I_2(\nu)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi\nu^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi\nu^2}{2}}J_{\frac{1}{2}}(z)dz.$$

Pentru a calcula ultimele integrale vom utiliza una din formulele de recurență pentru funcțiile Bessel de prima speță și anume

$$2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z).$$

Înlocuind în această relație pe ν cu $\nu+1$ și integrînd cei doi membri, obținem

$$2\,J_{\nu+1}(z) = \int_0^z J_\nu(z)\,dz - \int_0^z J_{\nu+2}(z)dz.$$

Deducem

$$2\,J_{\nu+3}(z) = \int_0^z J_{\nu+2}(z)\,dz - \int_0^z J_{\nu+4}(z)dz,$$

$$2\,J_{\nu+5}(z) = \int_0^z J_{\nu+4}(z)\,dz - \int_0^z J_{\nu+6}(z)\,dz,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Adunînd aceste relații, obținem

$$\int_0^z J_\nu(z)\,dz = 2\,[J_{\nu+1}(z) + J_{\nu+3}(z) + \cdots].$$

Seria din membrul doi este convergentă. Pe baza acestui calcul putem scrie

$$I_1(\nu) = J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi\nu^2}{2}\right) + J_{\frac{5}{2}}\left(\frac{\pi\nu^2}{2}\right) + J_{\frac{9}{2}}\left(\frac{\pi\nu^2}{2}\right) + \cdots,$$

$$I_2(\nu) = J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi\nu^2}{2}\right) + J_{\frac{7}{2}}\left(\frac{\pi\nu^2}{2}\right) + J_{\frac{11}{2}}\left(\frac{\pi\nu^2}{2}\right) + \cdots.$$

Aceste două serii sînt convergente și foarte comode pentru calculul celor două integrale.

9. Să se dezvolte în serie Fourier în raport cu θ funcțiile $e^{ix}\sin\theta$, $\cos(x\sin\theta)$, $\sin(x\sin\theta)$.

R. Vom dezvolta în serii de puteri ale lui t funcția

$$e^{\frac{xt}{2}-\frac{x}{2t}} = e^{\frac{xt}{2}}\,e^{-\frac{x}{2t}}.$$

Avem

$$e^{\frac{xt}{2}-\frac{x}{2t}} = \left[1 + \frac{xt}{2} + \frac{\left(\frac{xt}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{xt}{2}\right)^3}{3!} + \cdots\right]\cdot\left[1 - \frac{x}{2t} + \frac{\left(\frac{x}{2t}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{x}{2t}\right)^3}{3!} + \cdots\right] =$$

$$= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \cdots + c_1 t^{-1} + c_{-2} t^{-2} + c_{-3} t^{-3} + \cdots$$

Fiecare dintre coeficienții c_n este o serie infinită și anume

$$c_n=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{(n+1)!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2!(n+2)!}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+6}}{3!(n+3)!}+\cdots=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}.$$

Rezultă că c_n sînt funcții Bessel de prima speță

$$c_n=J_n(x)$$

și

$$e^{\frac{xt}{2}-\frac{x}{2t}}=J_0(x)+tJ_1(x)+t^2J_2(x)+t^3J_3(x)+\cdots+t^{-1}J_{-1}(x)+t^{-2}J_{-2}(x)+\cdots=$$
$$=J_0(x)+J_1(x)\,(t-t^{-1})+J_2(x)\,(t^2+t^{-2})+J_3(x)\,(t^3-t^{-3})+J_4(x)\,(t^4+t^{-4})+\cdots$$

Fie acum $t=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$. Atunci

$$t^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta,$$
$$t^{-2}=\cos 2\theta-i\sin 2\theta;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Avem

$$e^{\frac{xt}{2}-\frac{x}{2t}}=e^{\frac{x}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}=e^{ix\sin\theta},$$

deci

$$e^{ix\sin\theta}=J_0(x)+2[J_2(x)\cos 2\theta+J_4(x)\cos 4\theta+\cdots]+$$
$$+2i[J_1(x)\sin\theta+J_3(x)\sin 3\theta+\cdots],$$

sau

$$e^{ix\sin\theta}=J_0(x)+2\sum_{k=1}^{\infty}[J_{2k}(x)\cos 2k\theta+iJ_{2k-1}(x)\sin(2k-1)\theta]. \qquad (1)$$

Pentru a dezvolta celelalte funcții, vom observa că

$$e^{ix\sin\theta}=\cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta),$$

deci

$$\cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta)=J_0(x)+2\sum_{k=1}^{\infty}[J_{2k}(x)\cos 2k\theta+iJ_{2k-1}(x)\sin(2k-1)\theta].$$

Egalînd părțile reale și cele imaginare, obținem

$$\cos(x\sin\theta)=J_0(x)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(x)\cos 2k\theta,$$

$$\sin(x\sin\theta)=2\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k+1}(x)\sin(2k+1)\theta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în (1) înlocuim pe θ cu $\frac{\pi}{2}-\theta$, obținem

$$e^{ix\cos\theta}=J_0(x)+2\sum_{k=1}^{\infty}i^k\cos k\theta,$$

de unde rezultă

$$\cos(x\cos\theta)=J_0(x)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kJ_{2k}(x)\cos 2k\theta$$

și

$$\sin(x\cos\theta)=2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kJ_{2k+1}(x)\cos(2k+1)\theta.$$

Observație. Obținem același rezultat dacă se scrie dezvoltarea în serie Fourier a funcției $f(\theta)=e^{ix\sin\theta}$ sub forma complexă și dacă mai departe se procedează ca mai înainte.

10. Să se demonstreze relația

$$J_n(x+y)=\sum_{p=0}^{n}J_p(x)J_{n-p}(y)+\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p[J_p(x)J_{p+n}(y)+J_p(y)J_{p+n}(x)].$$

R. Avem (problema 9)

$$e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=J_0(z)+tJ_1(z)+t^2J_2(z)+\cdots+t^nJ_n(z)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{t}J_{-1}(z)+\frac{1}{t^2}J_{-2}(z)+\cdots+\frac{1}{t^n}J_{-n}(z)+\cdots$$

Dacă în această formulă punem $z=x+y$, obținem

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\,e^{\frac{y}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}t^nJ_n(x+y)$$

sau

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty}t^pJ_p(x)\cdot\sum_{q=-\infty}^{+\infty}t^qJ_q(y)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}t^nJ_n(x+y).$$

Efectuînd înmulțirea dezvoltărilor în serie și egalînd coeficienții lui t^n, obținem

$$J_n(x+y)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}J_p(x)\,J_{n-p}(y).$$

Avînd în vedere relaţia

$$J_{-n}=(-1)^n J_n,$$

putem să introducem în această dezvoltare numai indici pozitivi. Pentru $n=0$, avem

$$J_0(x+y)=J_0(x)\,J_0(y)-2\,J_1(x)\,J_1(y)+\cdots+2\,(-1)^n J_n(x)\,J_n(y)+\cdots,$$

pentru $n=1$, avem

$$J_1(x+y)=J_0(x)\,J_1(y)+J_1(x)\,J_0(y)-[J_2(x)\,J_1(y)+J_2(y)\,J_1(x)]+\cdots+$$
$$+(-1)^n[J_n(x)\,J_{n+1}(y)+J_n(y)\,J_{n+1}(x)]+\cdots$$

Formula generală este

$$J_n(x+y)=\sum_{p=0}^{n} J_p(x)\,J_{n-p}(y)+\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p[J_p(x)\,J_{p+n}(y)+J_p(y)\,J_{p+n}(x)].$$

11. Să se determine soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$x^2y''+(1-2\nu)xy'+\nu^2(x^{2\nu}+1-\nu^2)y=0.$$

R. Facem schimbarea de variabilă

$$x=t^\alpha$$

urmînd ca α să fie determinat convenabil, astfel încît ecuaţia să se reducă la o ecuaţie Bessel. Avem

$$y'=\frac{dy}{dx}\,\frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\alpha}\,t^{1-\alpha}\frac{dy}{dt},$$

$$y''=\frac{d^2y}{dt^2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\alpha}\,t^{1-\alpha}\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\alpha^2}\left[t^{2-2\alpha}\,\frac{d^2y}{dt^2}+(1-\alpha)\,t^{1-2\alpha}\frac{dy}{dt}\right].$$

Ecuaţia devine

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+(1-2\alpha\nu)\,t\frac{dy}{dt}+\alpha^2\nu^2(t^{2\alpha\nu}+1-\nu^2)\,y=0.$$

Vom lua $\alpha=\frac{1}{\nu}$ pentru a avea în ultima paranteză t^2. Ecuaţia se scrie

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}-t\frac{dy}{dt}+(t^2+1-\nu^2)\,y=0 \qquad (1)$$

În această ecuaţie vom face schimbarea de funcţie

$$y=t^\beta z(t),$$

iar β va fi determinat din condiția ca coeficientul lui $t\frac{dz}{dt}$ să fie 1. Avem

$$\frac{dy}{dt}=\beta t^{\beta-1}z+t^{\beta}\frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=t^{\beta}\frac{d^2z}{dt^2}+2\beta t^{\beta-1}\frac{dz}{dt}+\beta(\beta-1)t^{\beta-2}z.$$

Înlocuind în ecuația (1) și simplificînd cu t^{β}, obținem ecuația

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2}+(2\beta-1)t\frac{dz}{dt}+z(\beta^2-2\beta+1+t^2-\nu^2)=0.$$

Din condiția $2\beta-1=1$ rezultă $\beta=1$, iar ecuația este

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2}+t\frac{dz}{dt}+(t^2-\nu^2)z=0.$$

Această ultimă ecuație este forma canonică a ecuației de tip Bessel, deci soluția ei este

$$z(t)=C_1J_{\nu}(t)+C_2Y_{\nu}(t), \qquad (C_1, C_2=\text{const}).$$

Soluția generală a ecuației date este

$$y(x)=x^{\nu}[C_1J_{\nu}(x^{\nu})+C_2Y_{\nu}(x^{\nu})].$$

12. Să se rezolve ecuația

$$y''-xy'=0.$$

R. Vom face schimbarea de variabilă $x=t^{\alpha}$ și schimbarea de funcție $y=t^{\beta}z(t)$. Avem

$$y'=\frac{\beta}{\alpha}t^{\beta-\alpha}z+\frac{1}{\alpha}t^{\beta-\alpha+1}\frac{dz}{dt},$$

$$y''=\frac{1}{\alpha^2}t^{\beta-2\alpha+2}\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{2\beta-\alpha+1}{\alpha^2}t^{\beta-2\alpha+1}\frac{dz}{dt}+\frac{\beta(\beta-\alpha)}{\alpha^2}t^{\beta-2\alpha}z.$$

Ecuația devine după împărțirea cu $t^{\beta-2\alpha}$

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2}+(2\beta-\alpha+1)t\frac{dz}{dt}+[-t^{3\alpha}\alpha^2+\beta(\beta-\alpha)]z=0.$$

Luînd $\alpha=\frac{2}{3}$, din condiția $2\beta-\alpha+1=1$ rezultă $\beta=\frac{1}{3}$, iar ecuația se scrie

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2}+t\frac{dz}{dt}+\left[\left(i\frac{2}{3}t\right)^2-\frac{1}{9}\right]z=0.$$

Această ultimă ecuație prin schimbarea de variabilă $u=i\frac{2}{3}t$ se reduce la forma canonică a ecuației Bessel, deci soluția ei este

$$z(t)=C_1J_{\frac{1}{3}}\left(i\frac{2}{3}t\right)+C_2Y_{\frac{1}{3}}\left(i\frac{2}{3}t\right),$$

iar soluția ecuației date va fi

$$y(x)=\sqrt{x}\left[C_1J_{\frac{1}{3}}\left(i\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+C_2Y_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}ix^{\frac{3}{2}}\right)\right].$$

13. Să se determine soluția ecuației diferențiale

$$xy''-2py'-cxy=0.$$

R. Facem schimbarea de funcție

$$y(x)=x^\alpha z(x).$$

Avem

$$y'=\frac{dy}{dx}=\alpha x^{\alpha-1}z(x)+x^\alpha\frac{dz}{dx},$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}z(x)+2\alpha x^{\alpha-1}\frac{dz}{dx}+x^\alpha\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Ecuația devine

$$x^2z''+(2\alpha-2p)xz'+(\alpha^2-\alpha-2p\alpha-cx^2)z=0.$$

Vom lua $2\alpha-2p=1$ pentru ca xz' să figureze în ecuația cu coeficientul 1, deci $\alpha=p+\frac{1}{2}$ și ecuația se scrie

$$x^2z''+xz'+\left[(i\sqrt{c}x)^2-\left(p+\frac{1}{2}\right)^2\right]z=0.$$

Dacă în ultima ecuație se face schimbarea de variabilă $i\sqrt{c}x=t$, se obține ecuația

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2}+t\frac{dz}{dt}+\left[t^2-\left(p+\frac{1}{2}\right)^2\right]z=0.$$

Ecuația a fost adusă la forma canonică a ecuației Bessel cu $\nu^2=\left(p+\frac{1}{2}\right)^2$ iar soluția ei este

$$y=x^{p+\frac{1}{2}}\left[C_1J_{p+\frac{1}{2}}(i\sqrt{c}x)+C_2Y_{p+\frac{1}{2}}(i\sqrt{c}x)\right].$$

14. Să se rezolve ecuația

$$x^2y''+(x+2\,x^2\operatorname{ctg} x)y'+(x\operatorname{ctg} x-\nu^2)y=0.$$

R. Facem schimbarea de funcție $y=\dfrac{1}{\sin x}z(x)$,

$$y'=-\frac{\cos x}{\sin x}z+\frac{1}{\sin x}z'(x),$$

$$y''=\frac{1}{\sin x}z''-2\frac{\cos x}{\sin x}z'+\frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}z.$$

Ecuația devine prin înmulțire cu $\sin x$

$$x^2z''+xz'+(x^2-\nu^2)z=0$$

și are soluția

$$z(x)=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x), \qquad (C_1,\ C_2=\text{const}).$$

Rezultă

$$y(x)=\frac{1}{\sin x}[C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x)].$$

15. Să se determine soluția ecuației Bessel

$$x^2y''+[x-2\,x^2f(x)]y'+[x^2(1+f^2-f')-xf-\nu^2]y=0.$$

R. Facem schimbarea de funcție

$$y(x)=e^{\int f(x)dx}\cdot z(x).$$

Avem

$$y'=fe^{\int f dx}z+e^{\int f dx}z',$$

$$y''=f'e^{\int f dx}z+f^2e^{\int f dx}z+2\,fe^{\int f dx}z'+e^{\int f dx}z'',$$

iar ecuația devine

$$x^2z''+xz'+z(x^2-\nu^2)=0$$

cu soluția

$$z=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x).$$

Soluția ecuației date este

$$y(x)=e^{\int f dx}[C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x)].$$

Scanned with OKEN Scanner

16. Să se calculeze imaginea funcţiei $\Gamma(z+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^z\,dx$, $\mathrm{Re}(z)>-1$ şi să se deducă de aici imaginea funcţiei $\ln t$.

R. În relaţia care ne dă funcţia $\Gamma(z+1)$ să facem schimbarea $x=pt$:

$$\Gamma(z+1)=p\int_0^\infty e^{-pt}p^z t^z\,dt$$

sau

$$\frac{1}{p^{z+1}}=\int_0^\infty e^{-pt}\,\frac{t^z}{\Gamma(z+1)}\,dt,$$

deci

$$\mathcal{L}\,\frac{t^z}{\Gamma(z+1)}=\frac{1}{p^{z+1}}.$$

Derivînd această relaţie în raport cu z, obţinem

$$\frac{1}{p^{z-1}}\,\frac{d\,\Gamma(z+1)}{dz}+\frac{1}{p^{z+1}}\ln\frac{1}{p}\cdot\Gamma(z+1)=\mathcal{L}(t^z\ln t),$$

adică

$$\frac{\Gamma(z+1)}{p^{z+1}}\left[\frac{\frac{d\,\Gamma(z+1)}{dz}}{\Gamma(z+1)}+\ln\frac{1}{p}\right]=\mathcal{L}(t^z\ln t). \tag{1}$$

Se ştie că

$$\Gamma(z+1)=\lim_{k\to\infty}\frac{k!\,k^{z+1}}{(z+1)(z+2)\cdots(z+k+1)},$$

deci

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}\cdot\frac{d\,\Gamma(z+1)}{dz}=\lim_{k\to\infty}\left[\ln k-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}-\cdots-\frac{1}{z+k+1}\right],$$

iar pentru $z=0$ avem

$$\left[\frac{\frac{d\,\Gamma(z+1)}{dz}}{\Gamma(z+1)}\right]_{z=0}=\lim_{k\to\infty}\left[\ln k-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{k+1}\right]=-\gamma. \tag{2}$$

Introducînd (2) în (1) în care facem $z=0$, obţinem

$$\mathcal{L}\ln t=-\frac{\ln p+\gamma}{p}.$$

17. Să se calculeze imaginiile funcțiilor Bessel de ordin întreg.

R. Vom porni de la definiția clasică a funcției Bessel de prima speță

$$J_n(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-t\sin\theta)\,d\theta$$

sau

$$J_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n\theta-t\sin\theta)}d\theta.$$

Avem

$$F(p)=\mathcal{L}J_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n\theta-t\sin\theta)}d\theta\right]e^{-pt}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{e^{i(n\theta-t\sin\theta)-pt}}{p+i\sin\theta}\right]_0^{\infty}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{in\theta}}{p+i\sin\theta}d\theta.$$

Cu transformarea $e^{i\theta}=z$ avem

$$F(p)=\frac{1}{\pi i}\int_{|z|=1}\frac{z^n\,dz}{z^2+2pz-1}.$$

Funcția de integrat are în interiorul cercului $|z|=1$ polul simplu

$$z_1=-p+\sqrt{p^2+1},$$

iar reziduul relativ la acest pol este

$$R_{z_1}=\left[\frac{z^n}{z+p+\sqrt{p^2+1}}\right]_{z=-p+\sqrt{p^2+1}}=\frac{(-p+\sqrt{p^2+1})^n}{2\sqrt{p^2+1}}.$$

Rezultă

$$F(p)=2R_{z_1},$$

de unde

$$\mathcal{L}J_n(t)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}(-p+\sqrt{p^2+1})^n.$$

18. Să se demonstreze relația

$$\mathcal{L}\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t\tau})\cdot h(\tau)\cdot d\tau=\frac{1}{p^{n+1}}F\left(\frac{1}{p}\right),$$

unde $F(p)=\mathcal{L}h(t)$.

R. În formula de transformare Laplace să schimbăm pe p în $\frac{1}{p}$ și să împărțim apoi cu p^{n+1}. Avem

$$\frac{1}{p^{n+1}} F\left(\frac{1}{p}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\tau}{p}}}{p^{n+1}} h(\tau)\, d\tau.$$

Să arătăm acum următoarea corespondență:

$$\frac{\alpha^n}{p^{n+1}} e^{-\frac{\alpha}{p}} = \mathcal{L}(\alpha t)^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{\alpha t}), \tag{1}$$

unde α este un parametru.

Dacă se dezvoltă în serie cei doi membri ai ultimei relații, trebuie să se verifice relațiile

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\alpha^{k+n}}{p^{k+n+1}} \cdot \frac{1}{k!} = \mathcal{L} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!} \alpha^{k+n} t^{k+n}.$$

Aceste relații sînt verificate deoarece

$$\mathcal{L} \frac{t^{k+n}}{(k+n)!} = \frac{1}{p^{k+n+1}}.$$

După (1) se poate scrie relația de demonstrat.

Dacă facem $n=0$, obținem

$$\frac{1}{p} F\left(\frac{1}{p}\right) = \mathcal{L} \int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\tau})\, h(\tau)\, d\tau.$$

19. Să se demonstreze relația

$$L_{n+1}(t) - (2n+1-t) L_n(t) + n^2 L_{n-1}(t) = 0,$$

unde $L(t)$ sînt polinoamele lui Laguerre.

R. Aceste polinoame sînt definite prin formula

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}).$$

Dacă aplicăm relației $\mathcal{L}\, t^n = \frac{n!}{p^{n+1}}$ teorema deplasării $F(p+\lambda) = \mathcal{L}[e^{-\lambda t} f(t)]$ cu $\lambda = 1$, obținem

$$f(t) = t^n e^{-t} = \mathcal{L}^{-1} \frac{n!}{(p+1)^{n+1}}.$$

Cum $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$, din teorema $p^n F(p)=\mathcal{L} f^{(n)}(t)$ deducem

$$\mathcal{L}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})=\frac{n!\,p^n}{(p+1)^{n+1}}.$$

Aplicînd iarăși teorema deplasării cu $\lambda=-1$, avem

$$L_n(t)=e^t\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})=\mathcal{L}^{-1} n!\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n.$$

Avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)\frac{x^n}{n!}=\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n x^n=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{p+\frac{1-x}{x}},$$

x fiind o variabilă oarecare.

Se știe că

$$\mathcal{L} e^{-\alpha t}=\frac{1}{p+\alpha},$$

deci luînd $\alpha=\frac{x}{1-x}$, rezultă

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{1-x}e^{-t\frac{x}{1-x}}.$$

Rezultă că polinoamele Laguerre sînt coeficienții lui $\frac{x^n}{n!}$ din dezvoltarea în serie a funcției $\frac{1}{1-x}e^{-t\frac{x}{1-x}}$, numită funcția generatoare a polinoamelor lui Laguerre.

Scriem

$$L_{n+1}(t)+n^2 L_{n-1}(t)=$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[(2n+1)n!\frac{1}{p}\left(p-\frac{1}{p}\right)^n-\frac{p-n-1}{p(p-1)}\cdot n!\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n\right].$$

Aplicînd teorema derivării imaginii rezultă

$$\mathcal{L}[tL_n(t)]=-n!\frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n\right]=n!\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n\cdot\frac{p-n-1}{p(p-1)},$$

de unde rezultă relația cerută.

20. Să se studieze oscilațiile unui fir greu de lungime l și fără rigiditate (fig. VI.20) suspendat la un capăt A, limitîndu-ne la funcțiile sinusoidale de timp.

R. Fie μ masa firului pe unitatea de lungime şi P şi P' două puncte infinit vecine. Forţa care solicită segmentul MM' este proiecţia pe axa Oy a creşterii tensiunii T a firului, cînd se trece de la P la P'. Pe unitatea de lungime avem forţa

$$f=\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

La înălţimea x, $T=x\mu g$, deci

$$f=g\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial y}{\partial x}\right)=g\mu\left[\frac{\partial y}{dx}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right].$$

Forţa de inerţie este pe unitatea de lungime $\mu\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, deci ecuaţia de mişcare va fi

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial y}{\partial x}+x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

iar dacă ne limităm la funcţiile sinusoidale de timp, $y=\varphi(x)e^{i\omega t}$, avem

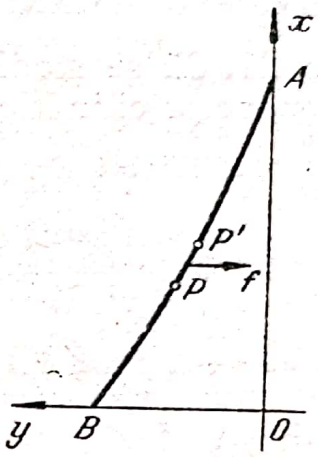


Fig. VI.20

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{\omega^2}{g}\frac{\varphi}{x}=0$$

sau

$$x^2\varphi''+x\varphi'+x\frac{\omega^2}{g}\varphi=0. \qquad (1)$$

Cu schimbarea de variabilă $x=z^2$ ecuaţia (1) devine

$$z^2\frac{d^2\varphi}{dz^2}+z\frac{d\varphi}{dz}+\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\right)^2 z^2\varphi=0,$$

cu soluţia

$$\varphi(z)=AJ_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}z\right)+BY_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}z\right),$$

iar soluţia ecuaţiei (1) este

$$\varphi(x)=AJ_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right)+BY_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right).$$

Ţinînd seama de faptul că pentru $x=0$ soluţia trebuie să aibă valori finite, avem

$$y=Ae^{i\omega t}J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right).$$

Pentru $x=l$, avem $y=0$, deci una din rădăcinile funcţiei $J_0(\alpha)=0$ este $2\omega\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie α_p una din rădăcini. Avem

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\,\alpha_p,$$

fapt care pune în evidență o infinitate de moduri de oscilații posibile.

21. Să se studieze efectul pelicular al curenților care străbat un conductor cilindric de rotație infinit.

R. Fie un fir cilindric infinit, de secțiune circulară, străbătut de un curent electric (fig. VI.21).

Dacă vom considera un cilindru de grosime dx și de rază x, intensitatea curentului care străbate acest cilindru este

$$dI_x = 2\pi\sigma x\,dx,$$

unde σ este densitatea de curent într-un punct situat la distanța x de axa firului.

Cîmpul magnetic creat de curent într-un punct situat la distanța r de axă ($r > x$) este

$$dH = \frac{dI_x}{2\pi r} = \frac{\sigma x\,dx}{r}$$

iar cîmpul magnetic creat de toți curenții pentru care $x < r$ va fi

$$H = \frac{1}{r}\int_0^r \sigma x\,dx. \tag{1}$$

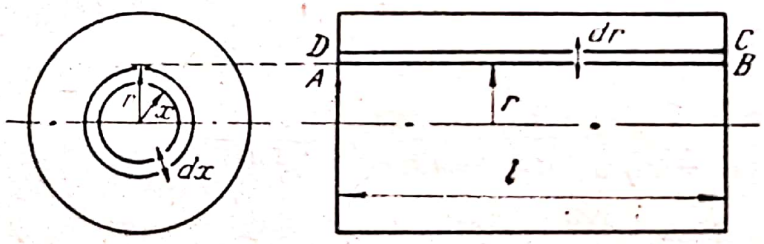


Fig. VI.21

Dacă se parcurge circuitul $ABCD$, tensiunea electromotoare dE este egală cu tensiunea electromotoare indusă de cîmpul H, deci

$$dE = \rho l\,d\sigma = \mu\frac{dH}{dt}\,l\,dr,$$

ρ fiind rezistivitatea materialului din care este construit firul.

Derivînd (1) în raport cu r și apoi în raport cu t, obținem ecuația

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r\,\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

sau

$$\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial\sigma}{\partial r}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial t}=0.$$

În ipoteza că circuitul este sinusoidal de pulsație ω, ecuația precedentă devine

$$\frac{d^2\sigma}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\sigma}{dr}-\frac{i\omega\mu\sigma}{\rho}=0.$$

Aceasta este o ecuație de tip Bessel; o mai putem scrie

$$r^2\frac{d^2\sigma}{dr^2}+r\frac{d\sigma}{dr}-ik^2\sigma=0,\qquad k^2=\frac{\omega\mu}{\rho}.$$

Soluția generală a ecuației este

$$\sigma=C_1J_0\left(kri^{\frac{3}{2}}\right)+C_2K_0\left(kri^{\frac{3}{2}}\right).$$

Pentru $\rho=0$, densitatea σ are o valoare finită, deci $C_2=0$. Rezultă

$$\sigma=C_1J_0\left(kri^{\frac{3}{2}}\right)=C_1M_0(kr)e^{i\theta_0(kr)},$$

unde $M_0(z)e^{i\theta_0(z)}=\text{ber}(z)+i\,\text{bei}(z)$.

Dacă raza firului este a și σ_0 densitatea de suprafață, putem scrie

$$\sigma=\sigma_0\frac{M_0(kr)}{M_0(ka)}e^{i[\theta_0(kr)-\theta_0(ka)]}.$$

Luînd ca origine a fazelor unghiul fazelor la suprafața firului

$$\sigma=\sigma_0\frac{M_0(kr)}{M_0(ka)}e^{i\theta_0(kr)},$$

raportul

$$\sigma_0\frac{M_0(kr)}{M_0(ka)}$$

este valoarea amplitudinii curentului la distanța r de axă. În cazul în care kr este mare, unghiul de fază poate depăși cu mult 2π. Deci, în interiorul firului pot exista domenii în care curenții sînt în opoziție.

22. Să se dezvolte în serie de polinoame Legendre funcțiile:

$$1^\circ\quad f_1(x)=\begin{cases}0, & \text{pentru } -1\leqslant x<\alpha,\\ 1, & \text{pentru } \alpha<x\leqslant 1;\end{cases}\qquad 2^\circ\quad f_2(x)=\sqrt{\frac{1-x}{2}}.$$

R. 1° În baza teoremei 1 funcția astfel definită se dezvoltă în seria

$$f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \tag{1}$$

cu coeficienții c_n dați de relațiile

$$c_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{\alpha}^{1} P_n(x)\,dx.$$

Cu ajutorul formulei de recurență

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)$$

și observînd că $P_n(1)=1$, găsim

$$c_n=-\frac{1}{2}[P_{n+1}(\alpha)-P_{n-1}(\alpha)],\quad c_0=\frac{1}{2}(1-\alpha),\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

de unde rezultă dezvoltarea

$$f_1(x)=\frac{1}{2}(1-\alpha)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[P_{n+1}(\alpha)-P_{n-1}(\alpha)]P(x),\qquad -1<x<1. \tag{2}$$

Notînd cu $S_m(x)$ suma primilor $m+1$ termeni ai seriei (2), să arătăm că în punctul de discontinuitate $x=\alpha$ este satisfăcută relația

$$\lim_{m\to\infty} S_m(\alpha)=\frac{1}{2}[f(\alpha+0)+f(\alpha-0)].$$

Avem

$$S_m(\alpha)=\frac{1}{2}(1-\alpha)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}[P_{n+1}(\alpha)\,P_n(\alpha)-P_n(\alpha)P_{n-1}(\alpha)]=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}P_{m+1}(\alpha)P_m(\alpha).$$

Deoarece $P_n(\alpha)\to 0$ cînd $n\to\infty$, avem

$$\lim_{m\to\infty} S_m(\alpha)=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}[f(\alpha+0)+f(\alpha-0)].$$

2° Funcția $f_2(x)$ satisface condițiile teoremei 1, deci ea se dezvoltă în seria (1). Pentru a calcula coeficienții c_n vom proceda astfel: înmulțim seria

$$(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n$$

cu $f(x)$ și integrăm termen cu termen în intervalul $(-1, 1)$, deoarece seria este uniform convergentă în intervalul $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Obținem

$$\frac{1}{2t}\left[1+t+\frac{(1-t)^2}{2\sqrt{t}}\ln\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}\right]=\sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}\,P_n(x)\,dx, \quad |t|<1.$$

Dezvoltînd primul membru al acestei egalități în serie după puterile lui t, obținem

$$\frac{4}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(4n^2-1)(2n+3)}=\sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}\,P_n(x)\,dx,$$

de unde

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}P_0(x)\,dx=\frac{4}{3},$$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}\,P_n(x)\,dx=-\frac{4}{(4n^2-1)(2n+3)}.$$

Din relațiile

$$c_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x)\,P_n(x)\,dx, \quad n=1, 2, \ldots$$

rezultă dezvoltarea

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}}=\frac{2}{3}P_0(x)-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}, \quad -1<x<1.$$

23. Să se dezvolte în serie de polinoame Hermite funcțiile

1° $\quad f(x)=e^x, \qquad -\infty<x<+\infty;$

2° $\quad g(x)=\begin{cases}1, & |x|<a,\\ 0, & |x|>a.\end{cases}$

R. 1° Condițiile teoremei 2 sînt satisfăcute. Avem

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x),$$

unde

$$c_n = \frac{1}{2^n \cdot n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+x} H_n(x)\, dx.$$

Din relațiile

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x), \qquad n=1, 2, \ldots,$$
$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) - 2nH_n(x) = 0, \qquad n=0, 1, 2, \ldots,$$

rezultă

$$H_n(x)\, e^{-x^2} = -\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2} H_{n-1}(x)\right], \qquad n=1, 2, \ldots$$

Integrînd prin părți, obținem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+x} H_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+x} H_{n-1}(x)\, dx = \cdots = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+x}\, dx = \sqrt{\pi} \cdot e^{\frac{1}{4}},$$

de unde rezultă

$$f(x) = e^x = e^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{2^n\, n!}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

2° Funcția $g(x)$ este pară, deci dezvoltarea ei în serie va avea forma

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} H_{2n}(x),$$

unde

$$c_{2n} = \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-x^2} H_{2n}(x)\, dx = \frac{2e^{-a^2}}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} H_{2n-1}(x), \qquad n=1, 2, \ldots$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx = \Phi(a),$$

$\Phi(z)$ fiind funcția de repartiție

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}, \qquad |z| < \infty.$$

Rezultă

$$g(x) = \Phi(a) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{2n-1}(x)}{2^{2n} \cdot (2n)!} H_{2n}(x), \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Scanned with OKEN Scanner

24. Să se demonstreze relaţiile

$$L_n^{-\frac{1}{2}}(x)=\frac{(-1)^n}{2^{2n}\,n!}H_{2n}(\sqrt{x}),$$

$$L_n^{\frac{1}{2}}(x)=\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}\,n!}\,\frac{H_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

R. Polinoamele lui Laguerre $L_n^{\alpha}(x)$ se pot reprezenta în mod simplu cu ajutorul integralelor definite, care conţin variabila x ca parametru. Pentru a obţine această reprezentare, vom presupune că x este un număr real pozitiv şi vom utiliza relaţia

$$x^{n+\alpha}e^{-x}=\int_0^{\infty}(\sqrt{xt})^{n+\alpha}\,J_{n+\alpha}(2\sqrt{tx})\,e^{-t}\mathrm{d}t, \tag{1}$$

unde $J_\nu(x)$ este funcţia Bessel de ordin ν.

Derivînd relaţia (1) în raport cu x şi ţinînd seama de relaţia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u^{\frac{\nu}{2}}J_\nu(2\sqrt{u})\right]=u^{\frac{\nu-1}{2}}J_{\nu-1}(2\sqrt{u}),$$

obţinem

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^{m+\alpha}e^{-x})=\int_0^{\infty}(\sqrt{tx})^{n-m+\alpha}J_{m-n+\alpha}(2\sqrt{tx})\cdot t^m e^{-t}\mathrm{d}t,\quad m=0,\,1,\,2,\,\ldots$$

În ultima relaţie punînd $m=n$ şi ţinînd seama de definiţia polinoamelor lui Laguerre, obţinem

$$L_n^{\alpha}(x)=\frac{e^x x^{-\frac{\alpha}{2}}}{n!}\int_0^{\infty}t^{n+\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(2\sqrt{tx})\,e^{-t}\mathrm{d}t,\quad \alpha>-1,\quad n=0,\,1,\,2,\,\ldots \tag{2}$$

Relaţia (2) a fost demonstrată în ipoteza că x este un număr real pozitiv. Aplicînd principiul prelungirii analitice, ea poate fi extinsă la orice valoare complexă a lui x.

Făcînd în (2) $\alpha=\pm\frac{1}{2}$ şi ţinînd seama de relaţiile cunoscute pentru $J_{\frac{1}{2}}(x)$ şi $J_{-\frac{1}{2}}(x)$, obţinem

$$L_n^{-\frac{1}{2}}(x)=\frac{e^x}{n!\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{n-\frac{1}{2}}\cos(2\sqrt{tx})\,\mathrm{d}t=\frac{e^x}{n!}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-u^2}u^{2n}\cos(2\sqrt{x}\,u)\,\mathrm{d}u, \tag{3}$$

$$L_n^{\frac{1}{2}}(x)=\frac{e^x}{n!\sqrt{\pi x}}\int_0^\infty e^{-t}t^n\sin(2\sqrt{xt})\,dt=\frac{e^x}{n!\sqrt{x}}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2n+1}\sin(2\sqrt{x}u)\,du. \quad (4)$$

Vom folosi acum integrala cunoscută

$$e^{-x^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(2xt)\,dt,$$

unde x este un număr real sau complex. Derivînd de $2n$ ori această relație și ținînd seama de definiția polinoamelor lui Hermite, găsim

$$H_{2n}(x)=\frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2n}\cos(2tx)\,dt, \quad n=0,1,2\ldots \quad (5)$$

Derivarea sub semnul integrală este permisă deoarece integrala este uniform convergentă în cercul $|x|\leqslant a$ de rază arbitrară a.

În mod analog se obține reprezentarea integrală pentru polinoamele lui Hermite cu indice impar

$$H_{2n+1}(x)=\frac{2^{2n+2}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2n+1}\sin(2xt)\,dt, \quad n=0,1,2,\ldots \quad (6)$$

Ținînd seama în (3) și (4) de relațiile (5) și (6), obținem

$$L_n^{-\frac{1}{2}}(x)=\frac{(-1)^n}{2^{2n}\cdot n!}H_{2n}(\sqrt{x}),$$

$$L_n^{-\frac{1}{2}}(x)=\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}\cdot n!}\frac{H_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

25. Fie o rețea cu șase dipoli alimentați de curenți în fază, la distanța $\frac{\lambda}{2}\left(n=4,\ \delta=0,\ d=\frac{\lambda}{2}\right)$. Să se determine rapoartele $\frac{I_1}{I_0}$, $\frac{I_2}{I_0}$ în așa fel, încît raportul lobului principal față de lobii secundarii să fie egal cu 10.

R. Avem de rezolvat ecuația

$$T_5\left(\frac{1}{\alpha}\right)=10.$$

Să considerăm în general ecuația

$$T_n(x)=c, \quad (c=\text{const}).$$

Dacă $|c|<1$, ecuația are n rădăcini reale. Punînd $\cos\alpha=x$, $\cos\gamma=c$, avem $\alpha=\frac{\gamma+2k\pi}{n}$; notînd prin $x_0=\cos\left(\frac{\gamma}{n}\right)$, avem

$$x=x_0\cos\frac{2k\pi}{n}-\sqrt{1-x_0^2}\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Dacă $|c|>1$, nu există decît o rădăcină reală pozitivă

$$x=\frac{1}{2}\left[(c+\sqrt{c^2-1})^{\frac{1}{n}}+(c-\sqrt{c^2-1})^{\frac{1}{n}}\right].$$

În cazul problemei avem $c=10$, $n=5$, deci

$$\frac{1}{\alpha}=1{,}195$$

și

$$P_5\left(\cos\frac{\Phi}{\alpha}\right)=2a_0\cos 5\frac{\Phi}{2}+2a_1\cos 3\frac{\Phi}{2}+2a_2\cos\frac{\Phi}{2}=$$

$$=2a_0T_5\left(\cos\frac{\Phi}{2}\right)+2a_1T_3\left(\cos\frac{\Phi}{2}\right)+2a_2T_1\left(\cos\frac{\Phi}{2}\right)=32a_0\cos^5\frac{\Phi}{2}-$$

$$-(40a_0-8a_1)\cos^3\frac{\Phi}{2}+(10a_0-6a_1+2a_2)\cos\frac{\Phi}{2}.$$

Identificînd cu

$$\frac{T_5\left(\frac{1}{\alpha}\cos\frac{\Phi}{2}\right)}{T_5\left(\frac{1}{\alpha}\right)}=2{,}907\cos^5\frac{\Phi}{2}-2{,}95\cos^3\frac{\Phi}{2}+0{,}597\cos\frac{\Phi}{2},$$

obținem

$$a_0=0{,}0908;\quad a_1=0{,}0857;\quad a_2=0{,}101.$$

Deci

$$\frac{I_1}{I_0} = 0{,}944, \quad \frac{I_2}{I_0} = 1{,}113.$$

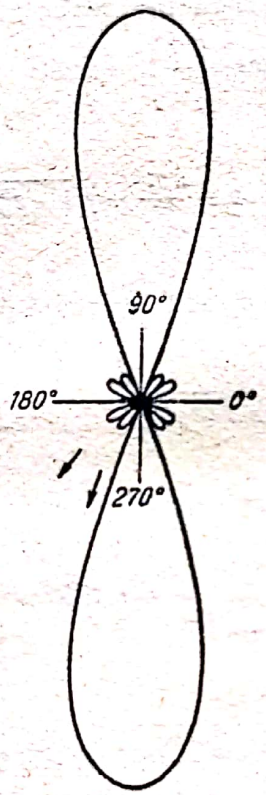


Fig. VI.25

Forma diagramei de radiație este dată în fig. VI.25, fiind trasată avînd ca variabilă unghiul β determinat de relațiile

$$\cos\frac{\Phi}{2} = \cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}\cos\beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\beta\right).$$

CAPITOLUL VII

ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL AL DOILEA

O ecuație cu *derivate parțiale de ordinul al doilea cu două variabile independente* este de forma

$$F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=0, \tag{1}$$

unde F este o funcție definită și continuă într-un domeniu din spațiul cu 8 dimensiuni. Se numește *soluție* sau *integrală* a ecuației (1) o funcție $z=z(x, y)$ de clasa C^2 într-un domeniu din planul (x, y) care înlocuită, împreună cu derivatele sale pînă la ordinul al doilea inclusiv, în (1) să o reducă la o identitate.

Se numește *soluție* (sau *integrală*) *generală* a ecuației (1) o soluție a sa care depinde de două funcții arbitrare de o singură variabilă de o clasă determinată.

Folosind notațiile lui Monge

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y},\ r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

ecuația (1) se poate scrie sub forma

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)=0. \tag{1}$$

Să presupunem că ecuația (1′) poate fi rezolvată în raport cu una din derivatele de ordinul al doilea, de exemplu în raport cu r:

$$r=f(x,\ y,\ u,\ p,\ q,\ s,\ t) \tag{2}$$

cu $f(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)=0$.

Definiție. *A rezolva problema Cauchy pentru ecuația* (2) *înseamnă a găsi o soluție a ei care să verifice următoarele condiții:*

$$z(0,\ y)=\varphi(y),$$

$$\left.\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}\right|_{x=0}=\psi(y). \tag{3}$$

unde $\varphi(y)$ *și* $\psi(y)$ *sînt două funcții date (definite și de o clasă convenabilă într-un domeniu care cuprinde originea).*

Teorema 1 (de unicitate a problemei Cauchy). *Ecuația* (2) *admite o singură soluție analitică care să verifice condițiile* (3) *dacă* f, φ *și* ψ *sînt funcții analitice de variabilele lor.*

Teorema 2. (Cauchy-Kovalevskaia, de existență). *Fiind dată ecuația cu derivate parțiale* (2), *unde funcția* f *este analitică în vecinătatea punctului* $(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0,\ s_0,\ t_0)$ *și două funcții de* y, $\varphi(y)$ *și* $\psi(y)$, *analitice în vecinătatea lui* y_0, *care sînt astfel încît*

$$\varphi(y_0)=z_0,\quad \varphi'(y_0)=q_0,\quad \varphi''(y_0)=t_0,$$
$$\psi(y_0)=p_0,\quad \psi'(y_0)=s_0,$$

ecuația (2) *admite o integrală* $z=z(x,\ y)$ *analitică în vecinătatea punctului* $(x_0,\ y_0)$ *și astfel încît pentru* $x=x_0$

$$z(x_0,\ y)=\varphi(y),\quad \left.\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}\right|_{x=x_0}=\psi(y). \tag{4}$$

Fiind dată ecuația (1′), soluția problemei Cauchy (4) poate fi interpretată în spațiul $(x,\ y,\ z)$ ca o suprafață $z=z(x,\ y)$, care pentru $x=x_0$ devine $z(x_0,\ y)=\varphi(y)$. Ecuațiile

$$x=x_0,\quad z(x_0,\ y)=\varphi(y)$$

reprezintă o curbă (Γ) aflată în planul $x=x_0$, integrala trecînd prin această curbă. Deoarece planul tangent la suprafața $z=z(x,\ y)$ are de-a lungul acestei curbe parametrii directori p, q, -1, vom avea

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=x_0}=q(x_0,\ y)=\varphi'(y),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=x_0}=p(x_0,\ y)=\psi(y);$$

prin urmare, parametrul p depinde de funcția $\psi(y)$; există deci o infinitate de suprafețe integrale ale ecuației date, care trec prin curba (Γ) depinzînd de o funcție arbitrară $\psi(y)$.

Scanned with OKEN Scanner

Planul de parametrii directori $p(x_0, y)=\psi(y)$ și $q(x_0, y)=\varphi'(y)$ variind continuu de-a lungul lui (Γ) în funcție de parametrul y, definește o *suprafață desfășurabilă* care trece prin (Γ). Teorema de existență 2 poate fi interpretată astfel:

Teorema 2'. *Există o suprafață integrală olomorfă unică a ecuației* (1) *care este tangentă la suprafața desfășurabilă analitică, definită de*

$$p(x_0, y)=\psi(y), \quad q(x_0, y)=\varphi'(y) \tag{5}$$

de-a lungul curbei (Γ) *de ecuații*

$$x=x_0, \quad z=\varphi(y), \tag{6}$$

dacă ecuația cu derivate parțiale (1) *a fost rezolvată în raport cu* r.

Mai general, problema lui Cauchy se poate enunța astfel:

Definiție. *Dîndu-se ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea*

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0, \tag{7}$$

unde F *este o funcție definită într-un anumit domeniu, o curbă strîmbă* (Γ) *și o suprafață desfășurabilă* (Δ) *definită de o familie de plane tangente la* (Γ), *să se determine o soluție* $z=z(x, y)$ *a ecuației* (7) *care să treacă prin* (Γ) *și să fie tangentă la* (Δ) *de-a lungul acestei curbe.*

Definiție. *Se numesc curbe caracteristice pentru ecuația* (1') *curbele aflate pe suprafețele integrale ale acestei ecuații, ale căror proiecții în planul* (x, y) *verifică ecuația caracteristicilor și*

$$\frac{\partial F}{\partial r}y'^2-\frac{\partial F}{\partial s}y'+\frac{\partial F}{\partial t}=0.$$

De-a lungul caracteristicilor, problema Cauchy nu se poate rezolva prin teorema de existență.

Problema Cauchy scoate în evidență un element geometric esențial în studiul ecuațiilor de ordinul al doilea, *elementul de contact.*

Definiție. *Se numește element de contact figura formată dintr-un punct* $P(x, y, z)$ *și un element plan de parametri directori* $p, q, -1$ *cu centrul în* P.

Curba (Γ) împreună cu planele tangente de parametri directori $p, q, -1$ formează *o bandă de elemente de contact*, curba (Γ) fiind *suportul* acestei benzi.

O ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea se numește *cvasiliniară*, dacă este liniară în raport cu derivatele de ordinul al doilea.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul a două variabile independente, forma generală a ecuațiilor cvasiliniare va fi

$$A(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+D\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0, \tag{8}$$

unde coeficienții A, B și C sînt funcții reale, continue, derivabile și nu toate nule în același timp în domeniul considerat.

Definiție. *Se numește caracteristică a ecuației* (8) *o bandă de elemente de contact pentru care problema lui Cauchy este nedeterminată sau imposibilă.*

Curba (Γ), suportul unei caracteristici, se numește *curbă caracteristică.*

Pe orice suprafață integrală, cele două familii de curbe caracteristice se obțin prin integrarea ecuației diferențiale (ecuație caracteristică)

$$A(x, y)\mathrm{d}y^2-2B(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+C(x, y)\mathrm{d}x^2=0. \tag{9}$$

Soluțiile acestei ecuații (9) vor fi *proiecțiile* curbelor caracteristice de pe suprafața integrală pe planul (x, y).

Se face următoarea clasificare:

1° $B^2-AC>0$, cele două familii de caracteristici sînt reale și distincte; ecuația este de *tip hiperbolic.*

2° $B^2-AC=0$, avem o singură familie de caracteristici reale; ecuația este de *tip parabolic.*

3° $B^2-AC<0$, cele două familii de caracteristici sînt complex conjugate; ecuația este de *tip eliptic.*

O proprietate importantă a fiecărei ecuații cvasiliniare este aceea că ea se poate reduce la o formă simplă, numită *forma ei canonică.*

Definiție. *Direcțiile*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mu_1(x, y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mu_2(x, y) \tag{10}$$

determinate din ecuația (9) *se numesc direcții caracteristice ale ecuației* (8).

Aceste direcții determină tipul ecuației.

Prin integrarea ecuațiilor (10), se obțin două familii de curbe în planul (x, y)

$$\varphi_1(x, y)=C_1, \quad \varphi_2(x, y)=C_2, \quad (C_1, C_2=\text{const}),$$

curbe care sînt proiecțiile pe planul (x, y) ale curbelor caracteristice ·

Dacă $B^2-AC>0$, cu schimbarea de variabile

$$\xi=\varphi_1(x, y), \quad \eta=\varphi_2(x, y),$$

ecuaţia (8) se aduce la *prima formă canonică*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}+G_1\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)=0. \tag{12}$$

Dacă se efectuează acum transformarea

$$\xi=x+y, \quad \eta=x-y,$$

din ecuaţia (12) se obţine ecuaţia

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+G_1'\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

care este a *doua formă canonică* pentru ecuaţia cvasiliniară de tip hiperbolic.

Dacă $B^2-AC=0$, $\varphi_1(x, y)=\varphi_2(x, y)=\varphi(x, y)$. Cu schimbarea de variabile

$$\xi=\varphi(x, y), \quad \eta=x$$

ajungem la forma canonică a ecuaţiei (8)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}+G_2\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)=0. \tag{13}$$

Dacă $B^2-AC<0$, funcţiile $\varphi_1(x, y)$ şi $\varphi_2(x, y)$ sînt complex conjugate. Notînd cu $\alpha(x, y)$ partea reală şi cu $\beta(x, y)$ partea imaginară a funcţiei $\varphi_1(x, y)$, avem

$$\varphi_1(x, y)=\alpha(x, y)+i\beta(x, y); \quad \varphi_2(x, y)=\alpha(x, y)-i\beta(x, y).$$

Cu schimbarea de variabile

$$\xi=\alpha(x, y), \quad \eta=\beta(x, y)$$

se ajunge la forma canonică a ecuaţiei (8)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}+G_3\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)=0. \tag{14}$$

În cazul ecuaţiilor liniare şi omogene în raport cu derivatele de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{15}$$

Scanned with OKEN Scanner

(A, B, C sînt constante) ecuația diferențială a proiecțiilor curbelor caracteristice pe planul (x, y) este

$$A\,dy^2-2\,B\,dx\,dy+C\,dx^2=0. \tag{16}$$

Direcțiile caracteristice

$$dy-\mu_1\,dx=0, \qquad dy-\mu_2\,dx=0$$

ne dau

$$y-\mu_1 x=C_1, \quad y-\mu_2 x=C_2, \qquad (C_1,\ C_2=\text{const}).$$

Dacă ecuația este de *tip hiperbolic*, cu schimbarea de variabile

$$\xi=y-\mu_1 x, \qquad \eta=y-\mu_2 x,$$

ea devine

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}=0 \tag{17}$$

cu soluția generală

$$z=\varphi(\xi)+\psi(\eta),$$

unde $\varphi(\xi)$ și $\psi(\eta)$ sînt funcții arbitrare.

Revenind la vechile variabile, soluția generală a ecuației (15) este

$$z=\varphi(y-\mu_1 x)+\psi(y-\mu_2 x).$$

Dacă ecuația este de *tip parabolic*, avem $\mu_1=\mu_2=\frac{B}{A}$ și ecuația diferențială (16) se reduce la

$$A\,dy-B\,dx=0$$

cu integrala generală

$$Ay-Bx=C, \qquad (C=\text{const}).$$

Schimbarea de variabile

$$\xi=Ay-Bx, \qquad \eta=x$$

aduce ecuația (15) la forma canonică

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=0. \tag{18}$$

Soluția generală a ecuației (18) este

$$z=\eta f(\xi)+g(\xi),$$

unde $f(\xi)$ și $g(\xi)$ sînt două funcții arbitrare.

Soluția generală a ecuației (16) este

$$z=xf(Ay-Bx)+g(Ay-Bx).$$

În cazul ecuației de *tip eliptic* forma sa canonică este ecuația Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=0. \tag{19}$$

Ecuația omogenă a coardei vibrante sau ecuația undelor plane este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \qquad a^2=\frac{\rho}{T_0} \tag{20}$$

unde ρ este *masa specifică liniară* a coardei, iar T_0 *tensiunea* la care este supusă coarda în poziția de repaus.

Soluția ecuației (20) care îndeplinește condițiile inițiale

$$u(x, 0)=f(x), \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}=g(x); \qquad x\in[0, l],$$

unde $f(x)$ și $g(x)$ sînt două funcții date, este dată de formula lui d'Alembert

$$u(x, t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\tau)\,d\tau. \tag{21}$$

Această formulă se prelungește pentru toate valorile reale ale variabilelor x și t.

Soluție lui Bernoulli și Fourier pentru ecuația vibrațiilor libere ale coardei (20) cu condițiile la limită

$$u(0, t)=0, \qquad u(l, t)=0, \qquad t\geqslant 0$$

și condițiile inițiale

$$u(x, 0)=f(x), \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}=g(x), \qquad x\in[0, l]$$

este

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

cu coeficienții

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx, \quad B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

Soluția *ecuației căldurii*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad a^2=\frac{k}{c\rho}$$

(k fiind *coeficientul de conductibilitate termică*, c este *căldura specifică* iar ρ *densitatea*) care satisface condiția inițială

$$u(x,\ 0)=f(x); \qquad x\in R,$$

$f(x)$ fiind dată, continuă, mărginită și absolut integrabilă pe $R=(-\infty,\ +\infty)$, este dată de relația

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2t}}\,d\tau; \quad t>0.$$

Această formulă se generalizează ușor pentru R^2 sau R^3. Astfel soluția ecuației căldurii în spațiul cu trei dimensiuni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

cu condiția inițială

$$u(x,\ y,\ z,\ 0)=f(x,\ y,\ z)$$

este

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta,\zeta)e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

în ipoteza că $f(x,\ y,\ z)$ este continuă, mărginită și absolut integrabilă pe R^3.

Fie Ω un domeniu oarecare din planul $(x,\ y)$ și notăm cu (Γ) frontiera acestui domeniu.

Definiție. *O funcție continuă în domeniul închis $\Omega+\Gamma$ care admite derivate parțiale până la ordinul al doilea inclusiv în Ω și satisface ecuația lui Laplace în Ω se numește funcție armonică.*

Problema Dirichlet cere determinarea unei funcții $u(P)$ armonice în Ω, continuă în $\overline{\Omega}=\Omega+\Gamma$ și care pe (Γ) ia valori continue date

$$u\,|_\Gamma=f(x,\ y).$$

Problema Neumann cere determinarea unei funcții $u(P)$ armonice în Ω, de clasă C^1 în $\overline{\Omega}$, care pe (Γ) este astfel încît

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f(x, y),$$

$f(x, y)$ fiind o funcție continuă dată, iar n este normală exterioară la (Γ).

Soluția problemei lui Dirichlet pentru interiorul unui cerc cu centrul în origine și de rază a este dată de *formula lui Poisson*

$$u(r, \varphi) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)\,d\theta}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \varphi) + r^2}$$

unde $u(a, \varphi) = f(\varphi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$.

PROBLEME

1. Să se aducă la cele trei forme canonice ecuația

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0$$

în cazul în care coeficienții a, b, c, d, e, f sînt constanți.

R. 1° Dacă $b^2 - ac > 0$, ecuația este de tip hiperbolic.

Ecuația caracteristică corespunzătoare este

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0,$$

de unde găsim

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \tag{1}$$

Integralele generale ale ecuațiilor diferențiale (1) sînt

$$(b + \sqrt{b^2 - ac})x - ay = C_1, \qquad (b - \sqrt{b^2 - ac})x - ay = C_2.$$

Vom face transformarea

$$\xi = (b + \sqrt{b^2 - ac})x - ay, \qquad \eta = (b - \sqrt{b^2 - ac})x - ay$$

Exprimăm derivatele parțiale ale lui u cu variabilele noi:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(b+\sqrt{b^2-ac})\frac{\partial u}{\partial \xi}+(b-\sqrt{b^2-ac})\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-a\frac{\partial u}{\partial \xi}-a\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(b+\sqrt{b^2-ac})^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2ac\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+(b-\sqrt{b^2-ac})^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-a(b+\sqrt{b^2-ac})\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}-a(b-\sqrt{b^2-ac})\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

După înlocuirea acestor expresii în ecuația dată obținem forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+\alpha\frac{\partial u}{\partial \xi}+\beta\frac{\partial u}{\partial \eta}+\gamma u=0,$$

cu

$$\alpha=\frac{bd+d\sqrt{b^2-ac}}{4a(ac-b^2)},\quad \beta=\frac{bd-d\sqrt{b^2-ac}}{4a(ac-b^2)},\quad \gamma=\frac{f}{4a(ac-b^2)}.$$

2° Dacă $b^2-ac<0$, ecuația este de tip eliptic. În acest caz transformarea este dată de

$$\xi=x\sqrt{ac-b^2},\quad \eta=bx-ay,\quad ac-b^2>0.$$

Avem

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{ac-b^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-a\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(ac-b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2b\sqrt{ac-b^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-a\sqrt{ac-b^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}-ab\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

Scanned with OKEN Scanner

iar forma canonică este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial \xi}+\beta\frac{\partial u}{\partial \eta}+\gamma u=0,$$

cu

$$\alpha=\frac{d}{a(ac-b^2)},\quad \beta=\frac{bd-ac}{a(ac-b^2)},\quad \gamma=\frac{f}{a(ac-b^2)}.$$

3° Dacă $b^2-ac=0$, $c\neq 0$, ecuaţia este de tip parabolic.

Ecuaţia caracteristică corespunzătoare ne dă

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}.$$

Integrala generală a acestei ecuaţii este

$$bx-ay=C.$$

Facem transformarea

$$\xi=bx-ay,\quad \eta=y.$$

Avem

$$\frac{\partial u}{\partial x}=b\frac{\partial u}{\partial \xi},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-a\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}.$$

Forma canonică a ecuaţiei este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial \xi}+\beta\frac{\partial u}{\partial \eta}+\gamma u=0,$$

cu

$$\alpha=\frac{bd-ac}{c},\quad \beta=\frac{a}{c},\quad \gamma=\frac{f}{c}.$$

2. Să se determine soluţia ecuaţiei

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-7\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

care satisface condiţiile

$$u(x,y)\Big|_{x=0}=y^3,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=y.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Ecuația este liniară și omogenă în raport cu derivatele de ordinul al doilea, cu coeficienți constanți. Avem $B^2-AC=\frac{25}{4}>0$, deci ecuația este de tip hiperbolic. Ecuația caracteristică corespunzătoare

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+7\frac{dy}{dx}+3=0$$

ne dă

$$\frac{dy}{dx}=-3,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}.$$

Soluțiile generale ale acestor ecuații diferențiale sînt

$$3x+y=c_1,\quad 2y+x=c_2,\quad (c_1,\ c_2=\text{const}).$$

Cu schimbarea de variabile

$$\xi=3x+y,\quad \eta=2y+x$$

ecuația devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=0,$$

cu soluția

$$u(\xi,\ \eta)=f(\xi)+g(\eta).$$

Soluția generală a ecuației date este

$$u(x,\ y)=f(3x+y)+g(x+2y).$$

Ținînd seama de condițiile inițiale ale problemei lui Cauchy, găsim că funcțiile f și g trebuie să verifice următoarele identități:

$$\left.\begin{aligned} f(y)+g(2y)&=y^3\\ 3f'(y)+g'(2y)&=y\end{aligned}\right\}$$

Integrînd a doua identitate în raport cu y obținem

$$\left.\begin{aligned} f(y)+g(2y)&=y^3\\ 3f(y)+\frac{1}{2}g(2y)&=\frac{y^2}{2}+C\end{aligned}\right\}\quad (C=\text{const}).$$

De aici rezultă

$$f(y)=\frac{1}{5}y^2-\frac{1}{5}y^3+K,\quad (K=\text{const}).$$

$$g(2y)=\frac{6}{5}y^3-\frac{1}{5}y^2-K.$$

Deci

$$f(3x+y)=\frac{1}{5}(3x+y)^2-\frac{1}{5}(3x+y)^3+K,$$

$$g(x+2y)=\frac{3}{20}(x+2y)^3-\frac{1}{20}(x+2y)^2-K.$$

Soluția problemei lui Cauchy este

$$u(x,y)=\frac{1}{5}\left[(3x+y)^2-(3x+y)^3+\frac{3}{4}(x+2y)^3-\frac{1}{4}(x+2y)^2\right].$$

3. Să se aducă la forma canonică și să se determine soluția generală a ecuației

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-2\cos x\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}-(3+\sin^2x)\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{(y+\sin x)^2+8}{16}u=0.$$

R. $B-AC=4>0$, deci ecuația este de tip hiperbolic. Ecuația caracteristică corespunzătoare

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\cos x\frac{dy}{dx}-(3+\sin^2x)=0$$

ne dă

$$\frac{dy}{dx}=-\cos x\pm 2.$$

Aceste ecuații diferențiale au soluțiile generale

$$2x+\sin x+y=C_1,\quad 2x-\sin x-y=C_2.$$

Facem schimbarea de variabile

$$\xi=2x+\sin x+y,\quad \eta=2x-\sin x-y. \tag{1}$$

Avem

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(2+\cos x)\frac{\partial u}{\partial \xi}+(2-\cos x)\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=(2+\cos x)^2\frac{\partial^2u}{\partial \xi^2}+2(4-\cos^2x)\frac{\partial^2u}{\partial \xi\,\partial \eta}+(2-\cos x)\frac{\partial^2u}{\partial \eta^2}-$$
$$-\sin x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\sin x\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2u}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{\partial^2u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}=(2+\cos x)\frac{\partial^2u}{\partial \xi^2}-2\cos x\frac{\partial^2u}{\partial \xi\,\partial \eta}-(2-\cos x)\frac{\partial^2u}{\partial \eta^2},$$

iar forma canonică a ecuației date este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\xi-\eta}{32}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\xi-\eta}{32}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{(\xi-\eta)^2+32}{64}u=0. \tag{2}$$

În ecuația (2) facem transformarea

$$u(\xi, \eta)=e^{-\frac{1}{64}(\xi-\eta)^2} v(\xi, \eta).$$

Ecuația (2) devine

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}=0$$

cu soluția generală

$$v(\xi, \eta)=f(\xi)+g(\eta).$$

Soluția generală a ecuației (2) este

$$u(\xi, \eta)=e^{-\frac{1}{64}(\xi-\eta)^2}[f(\xi)+g(\eta)],$$

de unde rezultă soluția generală a ecuației date

$$u(x, y)=e^{-\frac{1}{16}(y+\sin x)^2}[f(2x+\sin x+y)+g(2x-\sin x-y)].$$

4. Să se determine soluția ecuației

$$(l^2-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<l,$$

care satisface condițiile

$$u(x, y)\Big|_{y=0}=\arcsin\frac{x}{l}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=1.$$

R. Avem $B^2-AC=l^2-x^2>0$. Ecuația este de tip hiperbolic.
Din ecuația caracteristică corespunzătoare

$$(l^2-x^2)\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0$$

obținem

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{\sqrt{l^2-x^2}}.$$

Integrînd aceste ecuații ,obținem

$$\arcsin\frac{x}{l}+y=C_1, \quad \arcsin\frac{x}{l}-y=C_2.$$

Cu schimbarea de variabile

$$\xi=\arcsin\frac{x}{l}+y,\quad \eta=\arcsin\frac{x}{l}-y$$

ecuaţia se reduce la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

cu soluţia generală

$$u(\xi,\ \eta)=f(\xi)+g(\eta).$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$u(x,\ y)=f\left(\arcsin\frac{x}{l}+y\right)+g\left(\arcsin\frac{x}{l}-y\right).$$

Vom determina funcţiile f şi g utilizînd condiţiile iniţiale:

$$f\left(\arcsin\frac{x}{l}\right)+g\left(\arcsin\frac{x}{l}\right)=\arcsin\frac{x}{l},$$

$$f'\left(\arcsin\frac{x}{l}\right)-g'\left(\arcsin\frac{x}{l}\right)=1.$$

Notînd $\arcsin\frac{x}{l}=v$, acest sistem se scrie

$$\left.\begin{aligned} f(v)+g(v)&=v\\ f'(v)-g'(v)&=1\end{aligned}\right\}$$

sau integrînd ecuaţia a doua

$$\left.\begin{aligned} f(v)+g(v)&=v\\ f(v)-g(v)&=v-v_0\end{aligned}\right\}\quad (v_0=\text{const}).$$

De aici rezultă

$$f(v)=v-\frac{v_0}{2},\quad g(v)=\frac{v_0}{2}.$$

Deci soluţia ecuaţiei date este

$$u(x,\ y)=\arcsin\frac{x}{l}+y.$$

5. Să se determine soluţia ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\sin^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\sin x\,\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

care satisface condiţiile

$$u(x,\ y)\Big|_{y=\sin x}=x^4,\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\sin x}=x.$$

R. Ecuația dată de tip hiperbolic, $B^2-AC=1$.
Ecuația caracteristică corespunzătoare este

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\cos x \frac{dy}{dx} - \sin^2 x = 0.$$

Rezultă ecuațiile diferențiale

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \pm 1.$$

Integrînd aceste ecuații, obținem

$$\left.\begin{aligned} x+\sin x-y&=C_1\\ x-\sin x+y&=C_2\end{aligned}\right\} \quad (C_1,\ C_2=\text{const}).$$

Cu schimbarea de variabile

$$\xi = x+\sin x-y, \quad \eta = x-\sin x+y$$

obținem forma canonică a ecuației date

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0,$$

cu soluția generală

$$u(\xi,\ \eta) = f(\xi)+g(\eta).$$

Deci soluția generală a ecuației date este

$$u(x,\ y) = f(x+\sin x-y)+g(x-\sin x+y).$$

Pentru determinarea funcțiilor f și g ne folosim de condițiile inițiale:

$$\begin{aligned} f(x)+g(x)&=x^4,\\ -f'(x)+g'(x)&=x.\end{aligned}$$

Integrînd ultima egalitate, obținem sistemul

$$\left.\begin{aligned} f(x)+g(x)&=x^4\\ -f(x)+g(x)&=\frac{x^2}{2}+C\end{aligned}\right\} \quad (C=\text{const}),$$

de unde rezultă

$$f(x)=\frac{x^4}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{C}{2} \text{ și } g(x)=\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{C}{2}.$$

Soluția problemei este

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2}(x+\sin x-y)^2-\frac{1}{4}(x+\sin x-y)^2+\frac{1}{2}(x-\sin x+y)^4+\frac{1}{4}(x-\sin x+y)^2$$

6. Să se găsească soluția generală a ecuației lui Euler

$$\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

R. Ecuația se mai scrie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1}$$

și este de tip hiperbolic.

Vom face schimbarea de funcție $u(x,\ y)=\dfrac{v(x,\ y)}{x}$. Avem

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{x^2}v,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{2}{x^2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{2}{x^3}v,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Înlocuind aceste expresii în ecuația dată, se obține ecuația

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0. \tag{2}$$

Ecuația caracteristică corespunzătoare este

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0$$

iar integralele generale ale acestor ecuații diferențiale sînt

$$x+y=C_1,\quad x-y=C_2,\qquad (C_1,\ C_2=\text{const}).$$

Cu transformarea

$$x+y=\xi,\qquad x-y=\eta$$

ecuația (2) devine

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

și are soluția generală

$$v=f(\xi)+g(\eta).$$

Rezultă

$$v(x,\ y)=f(x+y)+g(x-y)$$

și

$$u(x,\ y)=\frac{f(x+y)+g(x-y)}{x}.$$

7. Să se determine soluția ecuației

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{1}{a}\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

care satisface condițiile

$$u(x,\ t)\Big|_{t=0}=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=F(x). \tag{2}$$

R. Făcînd în ecuația dată schimbarea de funcție

$$u(x,t)=\frac{v(x,\ t)}{h-x},$$

obținem ecuația coardei vibrante

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Soluția acestei ecuații care satisface condițiile

$$v(x,\ t)\Big|_{t=0}=(h-x)\,f(x),\quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=(h-x)F(x)$$

[condiții obținute din (2)] este dată de formula lui d'Alembert și anume

$$v(x,\ t)=\frac{(h-x+at)f(x-at)+(h-x-at)\,f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}(h-\tau)F(\tau)\,d\tau.$$

Soluția $u(x,\ t)$ a problemei lui Cauchy se poate scrie

$$u(x,\ t)=\frac{(h-x+at)\,f(x-at)+(h-x-at)\,f(x+at)}{2\,(h-x)}+\frac{1}{2\,a}\int_{x-at}^{x+at}\frac{h-\tau}{h-x}F(\tau)\,d\tau.$$

8. Se consideră o bară elastică de lungime a, fixată la extremitatea $x=0$ și supusă acțiunii unei forțe $F(t)$ pe unitatea de suprafață la extremitatea $x=a$ (fig. VII.8, a).

Ecuația diferențială cu derivate parțiale care dă deplasarea longitudinală $z(x,\ t)$ a unei molecule a barei este

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\delta}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

unde μ este modulul de elasticitate, iar δ masa specifică a barei.

Presupunem că avem satisfăcute condiţiile

$$z(x, 0)=0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \quad z(0, t)=0, \quad \mu \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=a}=F(t)$$

cu $0<x<a$, $t>0$.

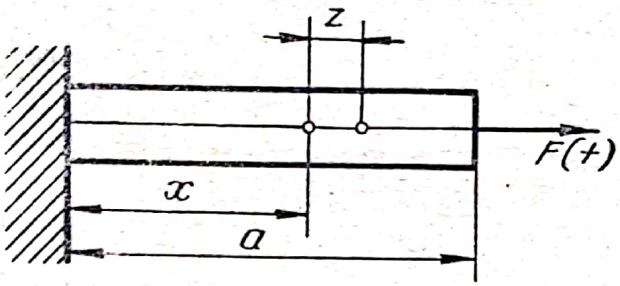


Fig. VII. *a*,

Să se calculeze deplasarea longitudinală $z(a, t)$ în extremitatea $x=a$ în următoarele cazuri:

1° $F(t)=F_0$, (tracţiune),
2° $F(t)=-F_0$, (compresiune).

R. Notînd $Lz(x, t)=Z(x, p)$ şi ţinînd seama de condiţiile iniţiale rezultă

$$L\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=p^2 Z(x, p), \quad L\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2},$$

deoarece $Z(x, p)=p\int_0^\infty z(x, t)e^{-pt}dp$,

$$L\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{d^2 Z}{dx^2}.$$

Ecuaţia operaţională corespunzătoare ecuaţiei date este ecuaţia diferenţială

$$\frac{d^2 Z}{dx^2}-p^2\frac{\delta}{\mu}Z=0$$

cu soluţia generală

$$Z(x, p)=Ae^{-p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}x}+Be^{p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}x}.$$

Punînd condiţia $z(0, t)=0$ sau $Z(0, p)=0$ rezultă

$$A+B=0,$$

apoi pentru $x=a$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_0}{\mu} \text{ și } \mathrm{L}\,\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial Z}{\partial x},$$

deci

$$\frac{F_0}{\mu}=-p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}Ae^{-p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}a}+p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}Be^{p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}a}=2p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}B\operatorname{ch}p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}a.$$

Rezultă

$$B=\frac{F_0}{2p\mu\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\operatorname{ch}p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}a}=-A$$

și

$$Z(x,\ p)=\frac{F_0}{2p\mu\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\operatorname{ch}p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}a}\left(e^{p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}x}-e^{-p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}x}\right)=\frac{F_0\operatorname{th}p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}a}{p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}}.$$

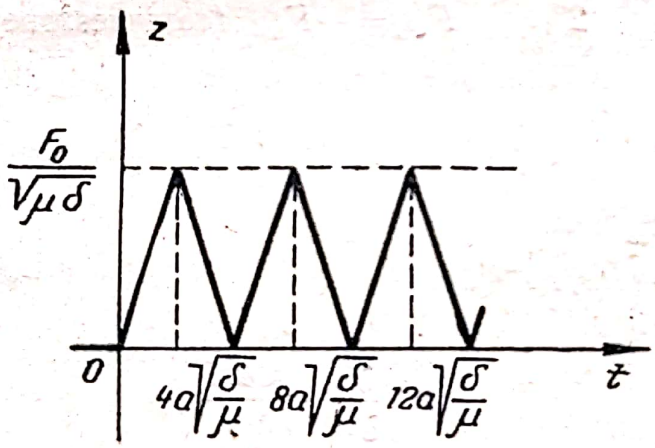


Fig. VII.8, b

Transformata inversă a acestei funcții este

$$z(x,\ t)=\mathrm{L}^{-1}Z(x,\ p)=\frac{F_0}{u\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}}I_T(c,\ t)=\frac{F_0}{\sqrt{\mu\delta}}I_T(c,\ t),$$

unde I_T reprezintă funcția impuls triunghiulară (fig. VII.8, *b*).

În cazul 2°, $F=-F_0$ se regăsește rezultatul anterior cu $-F_0$. Figura este simetrică în raport cu axa Ot.

9. O coardă omogenă de lungime l, fixată la extremităţile $x=0$ şi $x=l$ vibrează sub acţiunea unei forţe perturbatoare exterioare $\rho F(x, t)$, repartizată în mod continuu de-a lungul întregii coarde. Să se determine devierea coardei de la poziţia de echilibru, ţinînd seama de oscilaţiile ei libere, produse de devierea şi viteza iniţială.

R. Ecuaţia oscilaţiilor întreţinute este de forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t). \tag{1}$$

Pentru a integra ecuaţia dată, vom folosi proprietatea ecuaţiilor neomogene, de a se putea integra dacă ştim să integrăm ecuaţia omogenă corespunzătoare şi dacă cunoaştem o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

Integrala acestei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea neomogene o vom determina sub forma sumei

$$u = u_0 + u_1,$$

unde u_0 este integrala ecuaţiei omogene $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, care satisface condiţiile

$$u_0|_{x=0} = 0, \quad u_0|_{x=l} = 0, \quad u_0\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u_0}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x), \tag{2}$$

iar u_1 este integrala ecuaţiei omogene supusă condiţiilor

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_1|_{x=l} = 0, \quad u_1\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

Pentru a determina soluţia ecuaţiei omogene utilizăm metoda separării variabilelor. Căutăm o soluţie de forma

$$u_0(x, t) = T(t)S(x) \tag{4}$$

şi astfel ca să avem satisfăcute condiţiile la limită

$$S(0) = 0, \quad S(l) = 0. \tag{5}$$

Înlocuind funcţia (4) în ecuaţia omogenă a coardei vibrante, găsim

$$ST'' = a^2 S''T$$

sau împărţind cu ST

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{S''}{S} = -\lambda, \qquad (\lambda = \text{const}).$$

Obţinem următoarele două ecuaţii diferenţiale

$$T'' + \lambda T = 0, \tag{6}$$

$$S'' + \frac{\lambda}{a^2} S = 0. \tag{7}$$

Ecuațiile (6) și (7) sînt de ordinul al doilea, liniare și cu coeficienți constanți. Soluțiile lor se exprimă cu funcții exponențiale dacă $\lambda<0$, cu un polinom de gradul întîi dacă $\lambda=0$ și cu funcții trigonometrice dacă $\lambda>0$. Vom examina fiecare caz în parte.

1° Fie $\lambda<0$. În acest caz soluția generală a ecuației (7) este

$$S(x)=C_1e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x}+C_2e^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x}, \qquad (C_1,\ C_2=\text{const}),$$

iar condițiile (5) conduc la următorul sistem liniar și omogen în C_1 și C_2:

$$\left.\begin{aligned} &C_1+C_2=0\\ &C_1e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}l}+Ce^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}l}=0 \end{aligned}\right\}.$$

Determinantul acestui sistem este diferit de zero, deci sînt posibile numai soluțiile banale $C_1=0$, $C_2=0$. În consecință pentru $\lambda<0$, ecuația nu admite nici o soluție nebanală care să satisfacă condițiile date.

2° Fie $\lambda=0$. Soluția generală a ecuației (7) este

$$S(x)=C_1x+C_2, \qquad (C_1,\ C_2=\text{const}).$$

Condițiile (5) ne dau

$$S(0)=C_2=0; \qquad S(l)=C_1l=0, \qquad \text{deci } C_1=0.$$

Astfel ajungem din nou la soluția banală.

3° Fie $\lambda>0$. În acest caz avem

$$S(x)=C\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x+C\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x.$$

Condițiile (5) conduc la următoarele egalități:

$$S(0)=C_1=0,$$

$$S(l)=C_2\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l=0.$$

Pentru a nu ajunge la soluția banală, acceptăm $C_2\neq0$, deci

$$\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{a}l=0,$$

de unde rezultă

$$\sqrt{\lambda}=\frac{na\pi}{l}, \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{8}$$

Soluția ecuației (7) corespunzătoare lui $\sqrt{\lambda}=\frac{n\pi a}{l}$ este

$$S_n(x)=C_n\sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad (C_n=\text{const}).$$

Ecuația (7) admite un șir infinit de soluții nebanale care satisfac condițiile (5). Pentru λ astfel determinat ecuația (6) se scrie

$$T''+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T=0$$

a cărei soluție generală $T_n(t)$ este

$$T_n(t)=E_n\cos\frac{n\pi a}{l}\,t+F\,\sin\frac{n\pi a}{l}\,t, \qquad (E_n,\ F_n=\text{const}).$$

Notăm

$$u_{0,\,n}(x,\,t)=S_n(x)T_n(t)=\left(A_n\,\cos\frac{n\pi a}{l}\,t+B\,\sin\frac{n\pi a}{l}\,t\right)\sin\frac{n\pi}{l}\,x.$$

Presupunem că există suma seriei

$$u_0(x,\,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\,\cos\frac{n\pi a}{l}\,t+B_n\,\sin\frac{n\pi a}{l}\,t\right)\sin\frac{n\pi}{l}\,x$$

și că $u_0\ (x,\ t)$ este soluția problemei lui Cauchy, deci sînt satisfăcute condițiile inițiale (2) ale problemei:

$$u_0(x,\,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\sin\frac{n\pi}{l}\,x=f(x),$$

$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}\,B_n\,\sin\frac{n\pi}{l}\,x=g(x).$$

Această relație reprezintă dezvoltarea funcțiilor $f(x)$ și $g(x)$ în serii Fourier, deci coeficienții acestor serii sînt

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(\tau)\,\sin\frac{n\pi\tau}{l}\,d\tau,$$

$$B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l g(\tau)\,\sin\frac{n\pi}{l}\,\tau d\tau.$$

Rezultă

$$u_0(x,\,t)=$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{l}\cos\frac{n\pi a}{l}\,t\cdot\int_0^l f(\tau)\,\sin\frac{n\pi}{l}\,\tau d\tau+\frac{1}{an\pi}\sin\frac{n\pi a}{l}\,t\cdot\int_0^l g(\tau)\,\sin\frac{n\pi}{l}\,\tau\,d\tau\right]\cdot\sin\frac{n\pi}{l}\,x. \tag{9}$$

Ne-a mai rămas să determinăm o soluție particulară pentru ecuația neomogenă.

Fie $u_1(x, t)$ soluția particulară căutată; vom presupune că această soluție verifică ecuația neomogenă (1) și condițiile inițiale și la limite omogene (3).

Printr-o extensie a metodei variației constantelor vom căuta soluția particulară $u_1(x, t)$ de forma soluției ecuației omogene, și anume

$$u_1(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\, S_k(x), \tag{10}$$

unde $A_k(t)$ sînt funcții de t deocamdată nedeterminate, iar S_k sînt funcțiile proprii, ale problemei Sturm-Liouville (7).

Impunînd lui (7) condițiile $u_1(x, 0)=0$, $\left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0}=0$, rezultă imediat

$$A_k(0)=0, \qquad A_k'(0)=0. \tag{11}$$

Impunem lui (10) condiția să verifice ecuația (1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k''(t) S_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\, S_k''(x)+F(x, t)$$

și deoarece $S_k(x)$ verifică (7) pentru $\lambda=\lambda_k=\frac{k\pi a}{l}$, $(k=1, 2, \ldots)$ ultima relație se scrie

$$\sum_{k=1}^{\infty} [A_k''(t)+\lambda_k a^2 A_k(t)]\cdot S_k(x)=F(x, t).$$

De aici rezultă

$$A_k''(t)+a^2\lambda_k A_k(t)=F_k(t), \qquad \lambda_k\geqslant 0 \tag{12}$$

unde

$$F_k(t)=\int_0^l F(x,t) S_k(x)\, dx.$$

Ataşînd ecuației (12) condițiile Cauchy (11), obținem soluția acestei ecuații diferențiale ca fiind

$$A_k(t)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^t d\tau \int_0^l F(\xi, \tau) S_k(\xi) \sin\sqrt{\lambda_k}\,(t-\tau)\, d\tau=$$

$$=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t d\tau \int_0^l F(\xi, \tau) \sin\frac{n\pi}{l}\xi\cdot\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\, d\tau.$$

Rezultă

$$u_1(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi, \tau)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\,d\xi.$$

Adunînd (9) cu (13) obținem soluția problemei.

În (13) permutînd operația de insumare cu cele două operații de integrare vom putea scrie

$$u_1(x, t)=\int_0^t d\tau\int_0^l G(x, \xi, t-\tau)F(\xi, \tau)\,d\xi,$$

unde

$$G(x, \xi, t-\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\xi\cdot\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)$$

este funcția lui Green pentru prima problemă la limită pentru ecuația (1). Ea verifică pentru $t\neq\tau$ ecuația omogenă.

10. Să se aducă la forma canonică și să se determine soluția generală a ecuației

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

R. Avem $A=x^2$, $B=-xy$, $C=y^2$ și $B^2-AC=0$. Ecuația este de tip parabolic. Ecuația caracteristică corespunzătoare este

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2xy\frac{dy}{dx}+y^2=0.$$

Rezultă

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

cu soluția generală $xy=c$ ($c=$const).

Facem transformarea

$$xy=\xi,\quad x=\eta.$$

Avem

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+xy\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}.$$

Ecuația dată devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0. \tag{2}$$

Aceasta este forma canonică a ecuației date.
Scriem ecuația (2) sub forma

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0.$$

Rezultă

$$\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}=f(\xi). \tag{3}$$

Soluția generală a ecuației cu derivate parțiale de prim ordin (3) este

$$u=f(\xi)\ln\eta+g(\xi),$$

deci soluția generală a ecuației date este

$$u(x,\ y)=f(xy)\ln x+g(xy).$$

11. Se consideră un cilindru solid de lungime infinită a cărui temperatură inițială este zero și a cărui suprafață este menținută la temperatura $u=1$ începînd de la $t=0$ (fig. VII.11). Alegînd pentru simplificare raza cilindrului $r=1$ și pentru o alegere judicioasă a unității de timp, ecuația difuziunii termice este

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}, \tag{1}$$

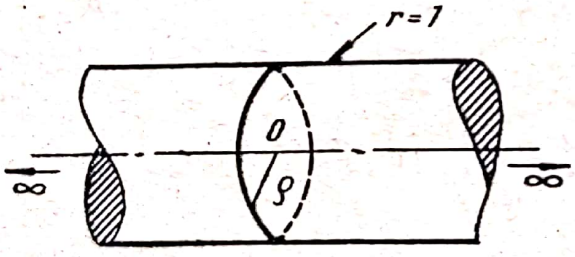


Fig. VII.11

unde $u(\rho,\ t)$ este funcție de temperatură, ρ fiind distanța de la un punct al cilindrului la axă.

Să se determine $u(\rho,\ t)$ care satisface condițiile la limită

$$u(\rho,\ 0)=0, \qquad 0\leqslant\rho<1, \tag{2}$$

$$u(1,\ t)=1, \qquad t>0. \tag{3}$$

În plus funcția $u(\rho,\ t)$ este finită pentru $\rho=0$.

R. Cu notația $U(\rho, p)=\mathcal{L}u(\rho, t)$, ecuația operațională corespunzătoare ecuației date este

$$pU=\frac{d^2U}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dU}{d\rho}$$

sau

$$\frac{d^2U}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dU}{d\rho}-pU=0.$$

Această ecuație este o ecuație Bessel, cu soluția

$$U=AJ_0(i\rho\sqrt{p})+BY_0(i\rho\sqrt{p}),$$

unde J_0 este funcția lui Bessel de prima speță și ordin zero iar Y_0 funcția de speța a doua și ordin zero.

În condițiile specificate plus faptul că $u(\rho, t)$ este finită pentru $\rho=0$, trebuie să luăm $B=0$ deoarece $Y_0(0)=-\infty$, deci

$$U=AJ_0(i\rho\sqrt{p}).$$

Reamintim că

$$J_0(iz)=1+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^4}{2^2\cdot 4^2}+\frac{z^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots$$

Pentru determinarea lui A utilizăm condiția (3):

$$\frac{1}{p}=AJ_0(i\sqrt{p}),$$

deci

$$U(\rho, p)=\frac{J_0(i\rho\sqrt{p})}{pJ_0(i\sqrt{p})}.$$

Avem

$$u(\rho, t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{pt}U(\rho, p)\,dp=\Sigma\,\mathrm{Rez}\,[e^{pt}U(\rho, p)]$$

situate la stînga dreptei de abscisă c.

Funcția $J_0(z)$ se anulează pentru următoarele valori:

$$\alpha_1=\pm 2{,}4048,\quad \alpha_2=\pm 5{,}5200,\quad \alpha_3=\pm 8{,}6597,\quad \ldots$$

Funcția $\dfrac{e^{pt}J_0(i\rho\sqrt{p})}{pJ_0(i\sqrt{p})}$ are polii simpli $p=0$ și $p=-\alpha_n^2$:

$$\operatorname*{Rez}_{p=0}\frac{e^{pt}J_0(i\rho\sqrt{p})}{pJ_0(i\sqrt{p})}=\frac{e^{pt}J_0(i\rho\sqrt{p})}{J_0(i\sqrt{p})}\bigg|_{p=0}=1,$$

$$\operatorname*{Rez}_{p=-\alpha_n^1}\frac{e^{pt}J_0(i\rho\sqrt{p})}{pJ_0(i\sqrt{p})}=\frac{e^{pt}J_0(i\rho\sqrt{p})}{J_0(i\sqrt{p})+i\dfrac{\sqrt{p}}{2}J_0'(i\sqrt{p})}\bigg|_{p=-\alpha_n^2}=$$

$$=2\frac{e^{-\alpha_n^2 t}J_0(\alpha_n\rho)}{\alpha_n J_0'(\alpha_n\rho)}=-2\frac{J_0(\alpha_n\rho)}{\alpha_n J_1(\alpha_n\rho)}e^{-\alpha_n^2 t},$$

deoarece $J_0'(z)=-J_1(z)$. Rezultă

$$u(\rho,\ t)=\mathcal{L}^{-1}U(\rho,\ p)=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_n\rho)}{\alpha_n J_1(\alpha_n\rho)}e^{-\alpha_n^2 t}. \tag{4}$$

Putem scrie formula (4) într-un sistem cu trei dimensiuni (L lungimea, M masa, T timpul), spre exemplu fie r distanța de la un punct al cilindrului la axă și τ timpul în secunde. Dacă raza cilindrului este r_0 și coeficientul de difuzare termică k, atunci ecuația (1) se scrie

$$\frac{\partial v}{\partial\tau}=k\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Notînd $\rho=\dfrac{r}{r_0}$, $t=\dfrac{k\tau}{r_0^2}$, $v(r_0,\ \tau)=V_0$ (temperatura arbitrară pe suprafață), rezultă

$$v(r,\ \tau)=V_0\left[1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\alpha_n\dfrac{r}{r_0}\right)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}e^{-\alpha_n^2\frac{k\tau}{r_0^2}}\right].$$

12. Se consideră un solid semiinfinit a cărui frontieră este formată dintr-un plan perpendicular pe Ox în O. Se presupune că la timpul $t<0$ solidul se află la temperatura $v=0$, apoi, brusc, la timpul $t=0$, se aplică un flux caloric $\Phi=\text{const}$ pe suprafața planului și se menține acest flux constant. Să se determine variația temperaturii $v(x,\ t)$ în lungul lui Ox (fig. VII.12).

R. Problema revine la determinarea soluției sistemului de ecuații cu derivate parțiale

$$\frac{\partial v}{\partial t}=K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$\Phi=-K\frac{\partial v}{\partial x},\qquad K=\frac{k}{c\delta}\ \text{(conductibilitatea)},$$

c este căldura specifică , δ densitatea, care satisfac condiţiile

$$v(x,\ 0)=0, \qquad -K\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}=\Phi_0, \qquad \lim_{x\to\infty} v(x,\ t)=0.$$

Aplicînd operatorul Carson-Laplace primei ecuaţii din (1) şi ţinînd seama de faptul că

$$\mathrm{L}\frac{\partial v}{\partial t}=pV(x,\ p)-pv(x,\ 0)=pV(x,\ p) \quad \text{cu} \quad V(x,\ p)=\mathrm{L}v(x,\ t)$$

$$\mathrm{L}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=p\int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{-pt}\mathrm{d}t,$$

obţinem ecuaţia operaţională

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}-\frac{p}{K}V=0$$

cu soluţia

$$V(x,\ p)=Ae^{\sqrt{\frac{p}{K}}x}+Be^{-\sqrt{\frac{p}{K}}x}.$$

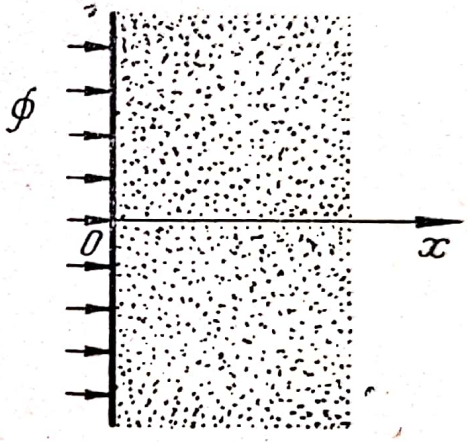


Fig. VII.12

Condiţia $\lim\limits_{x\to\infty} v(x,\ t)=0$ ne dă

$$\lim_{x\to\infty}\left(Ae^{+\sqrt{\frac{p}{K}}x}+Be^{-\sqrt{\frac{p}{K}}x}\right)=0,$$ de unde rezultă $A=0$, deci

$$V(x,\ p)=Be^{-\sqrt{\frac{p}{K}}x}.$$

Din relaţia $\Phi_0=-K\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}$ obţinem prin transformarea

$$\Phi_0=-K\mathrm{L}\frac{\partial v}{\partial x}=-K\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{L}v)=k\sqrt{\frac{p}{K}}Be^{-\sqrt{\frac{p}{K}}x}\Bigg|_{x=0}$$

sau

$$B=\frac{\Phi}{k}\cdot\sqrt{\frac{K}{p}}.$$

Rezultă

$$V(x,\ p)=\frac{\Phi}{k}\sqrt{\frac{K}{p}}e^{-\sqrt{\frac{p}{K}}x}$$

și

$$v(x,\ t)=\mathrm{L}^{-1}V(x,\ p)=\frac{\Phi_0}{k}\sqrt{K}\left(2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4t}}-\frac{x}{\sqrt{K}}\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{k\,t}}\right).$$

13. Să se determine distribuția temperaturii $T(x,\ t)$ într-un solid infinit dacă avem dat $T(x,\ 0)=f(x)$.

R. Avem de determinat soluția ecuației cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{K}\frac{\partial T}{\partial t}$$

cu condiția dată.

Pentru varietate, vom utiliza transformata Fourier a unei funcții de două variabile

$$T(x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(K,\ t)\,e^{iKx}\,\mathrm{d}K,$$

$$F(K,\ t)=\int_{-\infty}^{+\infty}T(x,\ t)\,e^{-iKx}\,\mathrm{d}x.$$

Avem ecuația

$$-K^2F(K,\ t)=\frac{1}{K}\frac{\partial F(K,\ t)}{\partial t}$$

cu soluția

$$F(K,\ t)=\Phi(K)\,e^{-K^2t}$$

Condiția inițială ne dă

$$F(K,\ 0)=\int_{-\infty}^{+\infty}T(x,\ 0)e^{-iKx}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iKx}\,\mathrm{d}x.$$

Deci

$$\Phi(K)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iKx}\,\mathrm{d}x$$

și

$$F(K,\ t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\,e^{-iKx}\,e^{-K^3}$$

Inversînd transformata Fourier, obținem

$$T(x,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{iKx}\,dK\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-iKx'}\,e^{-K^2t}\,f(x')\,dx'=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x')dx'\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{iK(x-x')}\,e^{-K^2t}\,dK=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{1}{4\pi Kt}}\,e^{-\frac{(x-x')^2}{4Kt}}\,f(x')dx'.$$

Funcția

$$G(x,\ t;\ x')=\sqrt{\frac{1}{4\pi Kt}}\,e^{-\frac{(x-x')^2}{4Kt}}$$

este funcția Green pentru problema dată.

Presupunem că $f(x)$ constă din sursa plană $\delta(x)$. Atunci

$$T(x,\ t)=\sqrt{\frac{1}{4K\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{4Kt}}=G(x,\ t;\ 0). \tag{1}$$

Aceasta este o dependență gaussiană de x cu o lățime crescînd ca și $\sqrt{t}$ (fig. VII.13, *a*).

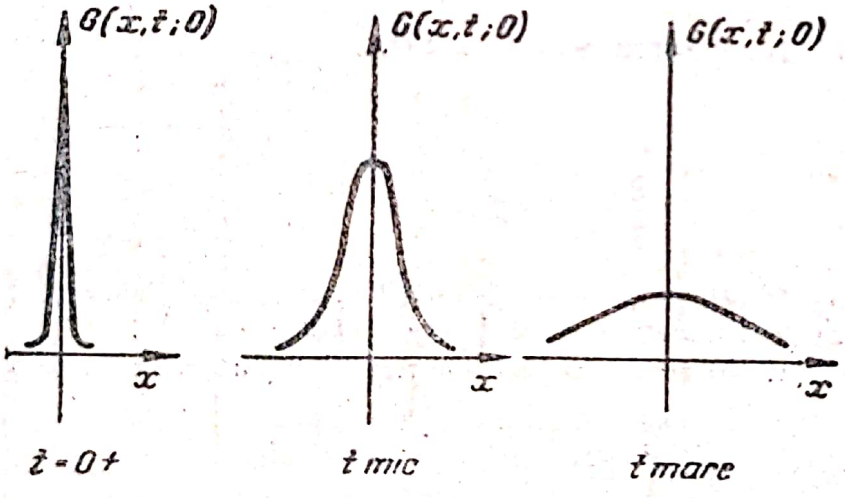


Fig. VII.13, *a*

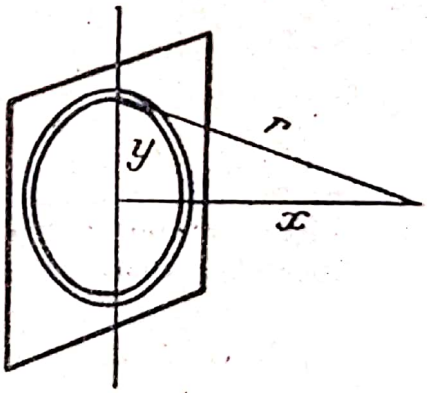


Fig. VII.13, *b*

Care este distribuția rezultată de la sursa punct $\delta(\bar{x})$ la timpul $t=0$?

Fie $f(x,\ t)$ reacția la o sursă plan $\delta(x)$ la $t=0$. Fie $g(r,\ t)$ reacția la o sursă punct $\delta(\bar{x})$ la $t=0$. Atunci din fig. VII. 13, *b* se vede că

$$f(x,\ t)=2\pi\int\limits_{0}^{\infty}yg(r,\ t)\,dy=2\pi\int\limits_{x}^{\infty}rg(r,\ t)\,dr.$$

Deci

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\pi x g(x, t),$$

$$g(r, t) = -\frac{1}{2\pi r}\left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}\right]_{x=r}.$$

Utilizînd (1) obținem imediat

$$g(r, t) = \left(\frac{1}{4\pi K t}\right)^{3/2} e^{-\frac{r^2}{4Kt}}.$$

14. Să se determine soluția ecuației lui Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

în semiplanul superior $(y>0)$, care satisface condițiile

$$\varphi \to 0 \text{ cu } y \to \infty; \tag{1}$$

$$\varphi = e^{-ax}, \ (a>0), \ \text{pentru } y=0, \ x>0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Ce^{bx}, \ (b>0), \ \text{pentru } y=0, \ x<0. \tag{3}$$

R. Fie

$$\varphi(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_{y=0} = g(x).$$

Din (2) și (3) avem $f(x)=e^{-ax}$ pentru $x>0$ și $g(x)=Ce^{bx}$ pentru $x<0$, rămînînd de determinat valorile lui $f(x)$ pentru $x<0$ și ale lui $g(x)$ pentru $x>0$.

Rezolvăm ecuația (1) cu ajutorul transformatei Fourier în raport cu x. Scriem

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} F(k, y)\, dk,$$

unde funcția $F(k, y)$ satisface ecuația

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - k^2 F = 0.$$

Atunci

$$F(k, y) = \Phi(k)\, e^{-|k| y} \text{ pentru } k \text{ real.}$$

Extindem funcţia $F(k, y)$ în planul complex k, înlocuind funcţia $|k|$ pentru k real $\sqrt{k^2+\lambda^2}$, introducînd tăieturile din fig. VII.14 şi rădăcina definită prin $\sqrt{k^2+\lambda^2} \to +k$ cu Re $k \to +\infty$. Apoi vom face $\lambda \to 0$. Atunci

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\, e^{-\sqrt{k^2+\lambda^2}\, y}\, \Phi(k)\, dk \qquad (2)$$

şi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\, \Phi(k)\, dk,$$

$$g(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{k^2+\lambda^2}\, e^{ikx}\, \Phi(k)\, dk.$$

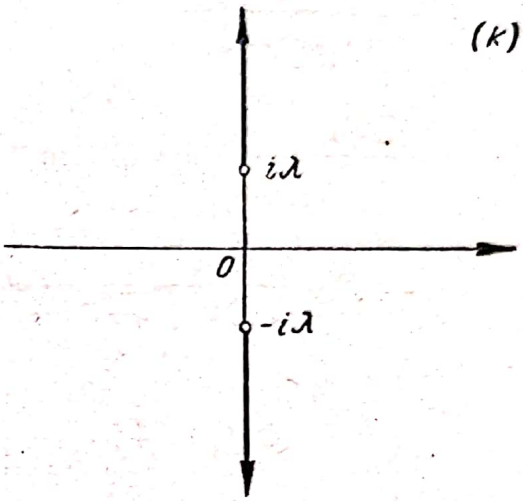


Fig. VII.14

Inversînd ultimele două transformări Fourier, avem

$$\Phi(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-ikx} f(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\, dx =$$

$$= \Phi_+(k) + \int_{0}^{\infty} e^{-ikx}\, e^{-ax}\, dx = \Phi_+(k) + \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{k-ia} \qquad (3)$$

şi similar

$$\Phi(k)\sqrt{k^2+\lambda^2} = \Psi_-(k) + \frac{C}{i} \cdot \frac{1}{k+ib} \qquad (4$$

unde $\Phi_+(k)$ este transformata Fourier a unei funcţii care tinde la zero pentru $x > 0$, iar $\Psi(k)$ este transformata Fourier a unei funcţii care tinde la zero pentru $x < 0$.

Egalînd (3) şi (4) obţinem

$$\sqrt{k^2+\lambda^2}\,\Phi_+(k) + \frac{1}{i} \frac{\sqrt{k^2+\lambda^2}}{k-ia} = \Psi_-(k) + \frac{C}{i} \cdot \frac{1}{k+ib}$$

sau

$$\underbrace{\sqrt{k+i\lambda}\,\Phi_+(k)}_{F_+(k)} - \underbrace{\frac{\Psi_-(k)}{\sqrt{k-i\lambda}}}_{F_-(k)} = \underbrace{\frac{C}{i} \cdot \frac{1}{k+ib} \frac{1}{\sqrt{k-i\lambda}} - \frac{1}{i} \frac{\sqrt{k+i\lambda}}{k-ia}}_{F(k)}.$$

Avem

$$\frac{1}{k+ib}\,\frac{1}{\sqrt{k-i\lambda}}=\frac{1}{k+ib}\left[\frac{1}{\sqrt{k-i\lambda}}-\frac{1}{\sqrt{-ib-i\lambda}}\right]+\frac{1}{\sqrt{-ib-i\lambda}}\cdot\frac{1}{k+ib}=$$

$$=\frac{1}{k+ib}\left[\frac{1}{\sqrt{k-i\lambda}}+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b+\lambda}}\right]+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b+\lambda}}\,\frac{1}{k+ib}$$

și

$$\frac{\sqrt{k+i\lambda}}{k-i\lambda}=\frac{1}{k-ia}\left[\sqrt{k+i\lambda}-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{a+\lambda}\right]+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{a+\lambda}\,\frac{1}{k-ia}.$$

Deci

$$F_+(k)=\frac{C}{i}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{b+\lambda}}\,\frac{1}{k+ib}-\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{k-ia}\left[\sqrt{k+i\lambda}-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{a+\lambda}\right].$$

Rezultă

$$\Phi(k)=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k+i\lambda}}\left[\frac{\sqrt{a+\lambda}}{k-ia}+\frac{C}{\sqrt{b+\lambda}}\,\frac{1}{k+ib}\right].$$

Putem trece acum la limită pentru $\lambda\to 0$:

$$\sqrt{k+i\lambda}\to\begin{cases}\sqrt{k}, & \text{pentru } k>0,\\ i\sqrt{-k}, & \text{pentru } k<0.\end{cases}$$

Atunci

$$\Phi(k)=\begin{cases}\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\,\dfrac{1}{\sqrt{k}}\left[\dfrac{\sqrt{a}}{k-ia}+\dfrac{C}{\sqrt{b}}\cdot\dfrac{1}{k-ib}\right], & \text{pentru } k>0\\[2ex] \dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{-k}}\left[\dfrac{\sqrt{a}}{k-ia}+\dfrac{C}{\sqrt{b}}\cdot\dfrac{1}{k+ib}\right], & \text{pentru } k<0.\end{cases}$$

Soluția problemei este dată de

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx}e^{-|k|y}\Phi(k)\,dk=$$

$$=2\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-i}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{\sqrt{a}}{k-ia}+\frac{C}{\sqrt{b}}\,\frac{1}{k+ib}\right)e^{ikx}e^{-ky}\,dk\right].$$

Să evaluăm integrala

$$I=\int_0^{\infty}\frac{e^{-ux}}{\sqrt{x}\,(x+a)}\,dx=e^{au}\int_a^{\infty}\frac{e^{-uy}}{y\sqrt{y-a}}\,dy.$$

Notăm

$$J=\int_a^\infty \frac{e^{-uy}}{y\sqrt{y-a}}\,dy.$$

Avem

$$\frac{\partial J}{\partial y}=-\int_a^\infty \frac{e^{-uy}}{\sqrt{y-a}}\,dy=-\sqrt{\pi}\,\frac{e^{-au}}{\sqrt{u}},$$

deci

$$J(u,a)=-\sqrt{\pi}\int_0^u \frac{e^{-at}}{\sqrt{t}}\,dt+C(a).$$

Dacă $u=0$,

$$J(u,a)=\int_a^\infty \frac{dy}{y\sqrt{y-a}}=2\int_0^\infty \frac{dz}{z^2+a}=\frac{\pi}{\sqrt{a}},\ (y-a=z^2).$$

Atunci $C(a)=\frac{\pi}{\sqrt{a}}$ şi

$$J(u,a)=\frac{\pi}{\sqrt{a}}-\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\int_0^{\sqrt{au}} e^{-z^2}\,dz=\frac{\pi}{\sqrt{a}}\,(1-\operatorname{erf}\sqrt{au})$$

şi

$$J(u,a)=\frac{\pi}{\sqrt{a}}\,e^{au}\,(1-\operatorname{erf}\sqrt{au}).$$

Deci

$$\varphi(x,y)=Re\left[e^{-az}\,(1-\operatorname{erf}\sqrt{-az})-i\,\frac{C}{b}\,e^{bz}\,(1-\operatorname{erf}\sqrt{bz})\right]$$

unde $z=x+iy$.

15. Să se rezolve problema lui Dirichlet pentru dreptunghiul definit de relaţiile $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $a, b>0$ ştiind că pe frontieră avem

$$u(0,y)=f_0(y),\quad u(a,y)=f_1(y),\quad u(x,0)=g_0(x),\quad u(x,b)=g_1(x),$$

funcţiile $f_0(y)$, $f_1(y)$, $g_0(x)$ şi $g_1(x)$ fiind date iar în vîrfurile dreptunghiului avem $f_0(0)=g_0(0)$, $f_1(0)=g_0(a)$, $f_0(b)=g_1(0)$ şi $f_1(b)=g_1(a)$.

R. Vom căuta o soluție a ecuației $\Delta u=0$ sub forma

$$u(x, y)=u_1(x, y)+u_2(x, y)$$

cu

$$\Delta u_1=0,\ \Delta u_2=0,$$

iar pe frontieră avem

$$\begin{aligned} &u_1(0, y)=f_0(y), && u_1(x, 0)=0,\\ &u_1(a, y)=f_1(y), && u_1(x, b)=0 \end{aligned} \tag{1}$$

și

$$\begin{aligned} &u_2(0, y)=0, && u_2(x, 0)=g_0(x),\\ &u_2(a, y)=0, && u_2(x, b)=g_1(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Am ajuns la două probleme de tip Dirichlet însă cu condiții pe frontieră mai simple.

Pentru a determina soluția ecuației $\Delta u_1=0$ care satisface condițiile (1), vom utiliza metoda lui Fourier și anume vom determina soluțiile de forma

$$u_1(x, y)=S(x)\ R(y)$$

și astfel ca să avem satisfăcute condițiile

$$R(0)=0,\ R(b)=0. \tag{3}$$

Înlocuind această funcție în ecuația $\Delta u_1=0$, obținem

$$S''(x)\ R(y)+S(x)\ R''(y)=0,$$

de unde rezultă

$$\frac{S''(x)}{S(x)}=-\frac{R''(y)}{R(y)}=k, \qquad (k=\text{const}).$$

Obținem următoarele ecuații diferențiale:

$$S''-kS=0, \tag{4}$$

$$R''+kR=0. \tag{5}$$

Fie $k<0$. În acest caz soluția generală a ecuației (5) este

$$R(y)=C_1e^{\sqrt{-k}\,y}+C_2e^{-\sqrt{-k}\,y}, \qquad (C_1, C_2=\text{const}),$$

iar condițiile (3) conduc la următorul sistem liniar și omogen în C_1 și C_2:

$$\left.\begin{aligned} &C_1+C_2=0\\ &C_1e^{\sqrt{-k}\,b}+C_2e^{-\sqrt{-k}\,b}=0. \end{aligned}\right\}$$

Determinantul acestui sistem este diferit de zero, deci sînt posibile numai soluțiile banale $C_1=0$, $C_2=0$. Deci pentru $k<0$, ecuația nu admite nici o soluție nebanală care să satisfacă condițiile date.

Dacă $k=0$, soluția generală a ecuației (5) este

$$R(y)=C_1y+C_2, \qquad (C_1, C_2=\text{const}).$$

Condițiile (3) ne dau $C_1=0$, $C_2=0$. Și în acest caz ajungem la o soluție banală. Pentru $k>0$ soluția generală a ecuației (5) este

$$R(y)=C_1\cos\sqrt{k}y+C_2\sin\sqrt{k}y, \qquad (C_1,\ C_2=\text{const}).$$

Condițiile (3) conduc la următoarele egalități:

$$R(0)=C_1=0,$$

$$R(b)=C_2\sin\sqrt{k}b=0.$$

Pentru a nu ajunge la soluția banală, acceptăm $C_2\neq 0$, deci

$$\sin\sqrt{k}\,b=0,$$

de unde rezultă

$$k=\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Soluția ecuației (5) corespunzătoare lui k astfel determinat este

$$R_n(y)=C_n\sin\frac{n\pi}{b}y, \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Ecuația (5) admite un șir infinit de soluții nebanale care satisfac condițiile (3). Pentru k determinat mai sus, ecuația (4) se scrie

$$S''(x)-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 S(x)=0$$

și are soluția generală

$$S_n(x)=E_n e^{\frac{n\pi}{b}x}+F_n e^{-\frac{n\pi}{b}x}, \qquad (E_n,\ F_n=\text{const}).$$

Notăm

$$u_{1,n}(x,\ y)=\left(A_n e^{\frac{n\pi}{b}x}+B_n e^{-\frac{n\pi}{b}x}\right)\sin\frac{n\pi}{b}y.$$

Presupunem că există suma seriei

$$u_1(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{n\pi}{b}x}+B_n e^{\frac{n\pi}{b}x}\right)\sin\frac{n\pi}{b}y$$

și că $u_1(x,\ y)$ este soluția primei probleme de tip Dirichlet, deci sînt satisfăcute și celelalte condiții (1). Avem

$$f_0(y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)\sin\frac{n\pi}{b}y,$$

$$f_1(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{n\pi a}{b}}+B_n e^{-\frac{n\pi a}{b}}\right)\sin\frac{n\pi}{b}y,$$

de unde

$$\left.\begin{aligned} A_n + B_n &= \frac{2}{b}\int_0^b f_0(\tau)\sin\frac{n\pi}{b}\tau\,d\tau \\ A_n e^{\frac{n\pi a}{b}} + B_n e^{-\frac{n\pi a}{b}} &= \frac{2}{b}\int_0^b f_1(\tau)\sin\frac{n\pi}{b}\tau\,d\tau \end{aligned}\right\}$$

Rezolvînd acest sistem în necunoscutele A_n și B_n, găsim

$$A_n = \frac{1}{b\,\mathrm{sh}\frac{n\pi a}{b}}\left[e^{\frac{n\pi a}{b}}\int_0^b f_0(\tau)\sin\frac{n\pi}{b}\tau\,d\tau - \int_0^b f_1(\tau)\sin\frac{n\pi}{b}\tau\,d\tau\right],$$

$$B_n = \frac{1}{b\,\mathrm{sh}\frac{n\pi a}{b}}\left[\int_0^b f_1(\tau)\sin\frac{n\pi}{b}\tau\,d\tau - e^{-\frac{n\pi a}{b}}\int_0^b f_0(\tau)\sin\frac{n\pi}{b}\tau\,d\tau\right].$$

Rezultă

$$u_1(x,y) = \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{b}y}{\mathrm{sh}\frac{n\pi a}{b}}\left[\mathrm{sh}\frac{n\pi}{b}x\int_0^b f_1(\tau)\sin\frac{n\pi}{b}\tau\,d\tau - \right.$$

$$\left. - \mathrm{sh}\frac{n\pi}{b}(x-a)\int_0^b f_0(\tau)\sin\frac{n\pi}{b}\tau\,d\tau\right] \qquad (6)$$

Analog pentru ecuația $\Delta u_2 = 0$ găsim soluția care satisface condițiile (2):

$$u_2(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{a}x}{\mathrm{sh}\frac{n\pi}{a}b}\left[\mathrm{sh}\frac{n\pi}{a}y\int_0^a g_1(\tau)\sin\frac{n\pi}{a}\tau\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \mathrm{sh}\frac{n\pi}{a}(b-y)\int_0^a g_0(\tau)\sin\frac{n\pi}{a}\tau\,d\tau\right]. \qquad (7)$$

Scanned with OKEN Scanner

16. Să se rezolve problema lui Dirichlet pentru un cerc de rază dată R cu centrul în originea axelor de coordonate, știind că pe frontieră

$$u|_{\Sigma} = a_1 x^2 + 2 a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 x + a_5 y + a_6.$$

R. Trecînd la coordonate polare, avem

$$\Delta u = \rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \tag{1}$$

$$u|_{\Sigma} = a_1 R^2 \cos^2 \theta + a_2 R^2 \sin 2\theta + a_3 R^2 \sin^2 \theta + a_4 R \cos \theta + a_5 R \sin \theta + a_6. \tag{2}$$

Soluția problemei lui Dirichlet fiind unică, căutăm pentru ecuația (1) o soluție de forma

$$u(\rho, \theta) = S(\rho) \cdot T(\theta). \tag{3}$$

Înlocuind funcția (3) în ecuația (1), obținem ecuațiile

$$\rho^2 S''(\rho) + \rho S'(\rho) - \lambda S(\rho) = 0, \tag{4}$$

$$T''(\theta) + \lambda T(\theta) = 0, \qquad \lambda = \text{const} \tag{5}$$

Pentru a avea soluții nesingulare și ținînd seama de faptul că o funcție armonică este uniformă, trebuie să avem

$$\begin{aligned} &S(0) = \text{finit}, \quad 0 \leqslant \rho < R, \\ &T(\theta) = T(\theta + 2\pi), \quad -\infty \leqslant \theta \leqslant +\infty. \end{aligned} \tag{6}$$

Fie $\lambda < 0$. În acest caz soluția ecuației (5) este

$$T(\theta) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,\theta} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,\theta}, \quad (C_1, C_2 = \text{const}),$$

soluție care nu verifică a doua condiție (6)

Dacă $\lambda = 0$, avem

$$T(\theta) = C_1 \theta + C_2, \quad (C_1, C_2 = \text{const}),$$

Singura posibilitate în acest caz este ca $T(\theta) = C_2$.

Pentru $\lambda > 0$ avem pentru ecuația (5) soluția

$$T(\theta) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}\,\theta + C_2 \sin \sqrt{\lambda}\,\theta.$$

Din condiția a doua din (6) rezultă

$$\sqrt{\lambda}\,\theta = \sqrt{\lambda}\,(\theta + 2\pi) + 2n\pi,$$

deci

$$\lambda = n^2, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

și

$$T_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, \quad (A_n, B_n = \text{const}), \tag{7}$$

cu $n = 0, 1, 2, \ldots$, deoarece $T(\theta) = C_2$ se cuprinde în (7).

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\lambda=n^2$ ecuația (4) se scrie

$$\rho^2 S''(\rho)+\rho S'(\rho)-n^2 S(\rho)=0$$

și are soluția

$$S(\rho)=C_1 \rho^n+C_2 \rho^{-n}.$$

Din condiția $S(0)=$finit rezultă $C_2=0$, deci

$$S_n(\rho)=C_n \rho^n, \quad (C_n=\text{const}), \quad n=1, 2, \ldots$$

Pentru $n=0$ ecuația devine

$$\rho^2 S''(\rho)+\rho S'(\rho)=0$$

și are soluția

$$S(\rho)=K_1 \ln \rho+K_2, \quad (K_1, K_2=\text{const}).$$

Din condiția $S(0)=$finit, rezultă $K_1=0$, deci soluția ecuației (4) este

$$S_n(\rho)=C_n \rho^n, \quad n=0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Ecuațiile (4) și (5) admit cîte un șir infinit de soluții de forma (7), respectiv (8). Fie

$$u(\rho, \theta)=\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\theta+B_n \sin n\theta).$$

Pe (Σ) avem

$$u(R, \theta)=\sum_{n=0}^{\infty} R^n (A_n \cos n\theta+B_n \sin n\theta)=f(\theta),$$

unde

$$f(\theta)=a_1 R^2 \cos^2\theta+a_2 R^2 \sin 2\theta+a_3 R^2 \sin^2\theta+a_4 R \cos\theta+a_5 R \sin\theta+a_6.$$

Identificînd obținem

$$A_0=a_6+a_1\frac{R^2}{2}+a_3\frac{R^2}{2}, \qquad A_2=\frac{a_1}{2}-\frac{a_3}{2},$$

$$A_1=a_4, \qquad B_2=a_2,$$

$$B_1=a_5, \qquad A_n=B_n=0 \text{ pentru } n>2.$$

Rezultă

$$u(\rho, \theta)=a_6+\frac{R^2}{2}(a_1+a_3)+\rho[a_4 \cos\theta+a_5 \sin\theta]+\rho^2\left[\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_3}{2}\right)\cos 2\theta+a_2 \sin 2\theta\right]$$

și

$$u(x, y)=a_6+\frac{R^2}{2}(a_1+a_3)+a_4 x+a_5 y+\frac{a_1-a_3}{2}(x^2-y^2)+2a_2 xy.$$

17. Să se rezolve problema lui Dirichlet pentru domeniul din fig. VII.17 dacă pe frontiera domeniului avem

$$u|_{\theta=0}=0,\ u|_{\theta=\alpha}=C,\quad (C=\text{const})$$
$$u\Big|_{r=r_1}=\frac{C\theta}{\alpha},\quad u\Big|_{r=r_2}=\frac{C\theta}{\alpha}.$$

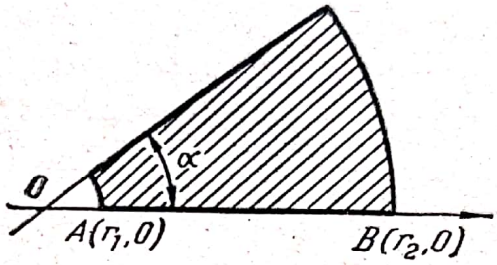


Fig. VII.17

R. Avem de determinat soluția ecuației

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0 \tag{1}$$

care să satisfacă condițiile date.

Soluția ecuației o căutăm ca suma următoarei serii:

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(r)\sin\frac{k\pi}{\alpha}\theta,$$

unde

$$u_k=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}u\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha}\,d\theta.$$

Înmulțind (1) cu $\frac{2}{\alpha}\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha}\,d\theta$ și integrînd de la 0 la α, obținem

$$\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\sin\frac{k\pi}{\alpha}\theta\,d\theta+\frac{2}{\alpha r^2}\int_0^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\sin\frac{k\pi}{\alpha}\theta\,d\theta=0$$

sau

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_k}{dr}\right)+\frac{2}{\alpha r^2}\int_0^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\sin\frac{k\pi}{\alpha}\theta\,d\theta=0, \tag{2}$$

unde

$$\int_0^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \sin \frac{k\pi}{\alpha}\theta \, d\theta = \sin \frac{k\pi}{\alpha}\theta \, \frac{\partial u}{\partial \theta}\Big|_0^\alpha - \frac{k\pi}{\alpha}\int_0^\alpha \cos \frac{k\pi}{\alpha}\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta =$$

$$= -\frac{k\pi}{\alpha}\left[u \cos \frac{k\pi}{\alpha}\theta\Big|_0^\alpha - \left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)^2 u_k.\right.$$

Ținînd seama de condițiile date, (2) devine

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_k}{dr}\right) - \left(\frac{k\pi}{\alpha r}\right)^2 u_k = (-1)^k \frac{2k\pi}{\alpha^2 r^2} C \tag{3}$$

și condițiile pe frontieră

$$u_k\Big|_{r=r_1} = \frac{2C}{\alpha^2}\int_0^\alpha \theta \sin \frac{k\pi}{\alpha}\theta \, d\theta = u_k\Big|_{r=r_2} = (-1)^{k-1}\frac{2C}{k\pi}. \tag{4}$$

Soluția generală a ecuației (3) este

$$u_k = A_k r^{\frac{k\pi}{\alpha}} + B_k r^{-\frac{k\pi}{\alpha}} + (-1)^{k-1}\frac{2C}{k\pi}.$$

Condițiile (4) conduc la sistemul liniar și omogen în A_k și B_k:

$$\left.\begin{aligned} A_k r_1^{\frac{k\pi}{\alpha}} + B_k r_1^{-\frac{k\pi}{\alpha}} &= 0 \\ A_k r_2^{\frac{k\pi}{\alpha}} + B_k r_2^{-\frac{k\pi}{\alpha}} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

care admite numai soluția $A_k = B_k = 0$.

Rezultă

$$u_k = -(1)^{k-1}\frac{2C}{k\pi}$$

iar soluția problemei este

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sin \frac{k\pi\theta}{\alpha} = \frac{2C}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin \frac{k\pi}{\alpha}\theta}{k} = \frac{C\theta}{\alpha}$$

18. Să se rezolve ecuația $\Delta u = k$, (k = const), în dreptunghiul $0 \leqslant x \leqslant a$, $-\frac{b}{2} \leqslant y \leqslant \frac{b}{2}$, știind că pe frontiera acestui domeniu u este nul.

R. Vom determina soluția ecuației lui Poisson

$$\Delta u = k$$

ca fiind o sumă de două funcții

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$$

astfel ca să avem

$$\Delta u_1 = k \tag{1}$$

cu condițiile

$$u_1(0, y) = 0, \quad u_2(a, y) = 0 \tag{2}$$

și

$$\Delta u_2 = 0 \tag{3}$$

cu

$$u_2(0, y) = 0, \quad u_2(a, y) = 0,$$

$$u_2\left(x, \frac{b}{2}\right) = -u_1\left(x, \frac{b}{2}\right), \quad u_2\left(x, -\frac{b}{2}\right) = -u_1\left(x, -\frac{b}{2}\right). \tag{4}$$

Fie u_1 de forma

$$u_1 = Ax^2 + Bx + C, \qquad (A, B, C = \text{const}).$$

Punînd condiția ca această funcție să verifice ecuația (1) și condițiile (2), obținem

$$A = \frac{k}{2}, \quad B = -\frac{k}{2}a, \quad C = 0,$$

deci

$$u_1 = \frac{k}{2}x(x - a). \tag{5}$$

Soluția ecuației (3) care satisface primele două condiții (4) este

$$u_{2,n}(x, y) = \sin\frac{n\pi}{a}x\left[A_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}\right], \qquad \begin{pmatrix} (k = 1, 2, \ldots \\ A_n, B_n = \text{const.} \end{pmatrix}$$

Ultimele condiții din (4) ne dau egalitățile

$$\sin\frac{n\pi}{a}x\left[A_n e^{\frac{n\pi b}{2a}} + B_n e^{-\frac{n\pi b}{2a}}\right] = \frac{k}{2}x(a - x),$$

$$\sin\frac{\pi n}{a}x\left[A_n e^{-\frac{n\pi b}{2a}} + B_n e^{\frac{n\pi b}{2a}}\right] = \frac{k}{2}x(a - x).$$

De aici rezultă $A_n = B_n$ și deci

$$u_{2,n}(x, y) = 2A_n \sin\frac{n\pi}{a}x \operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}y,$$

iar

$$u_2(x, y)=2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{a}\, x \operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}\, y.$$

Pentru $y=\frac{b}{2}$ obținem dezvoltarea în serie Fourier a funcției $\frac{k}{2}x(a-x)$ și anume

$$\frac{k}{2}\, x(a-x)=2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}\sin\frac{n\pi}{a}\, x.$$

Coeficienții acestei serii sînt

$$A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}=\frac{k}{2a}\int_0^a \xi(a-\xi)\sin\frac{n\pi}{a}\,\xi\, d\xi=\frac{ka^2}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n].$$

De aici obținem

$$A_{2m+1}=\frac{2ka^2}{(2m+1)^3\pi^3}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}\dfrac{(2m+1)\pi b}{2a}}, \qquad m=0, 1, 2, \ldots$$

deci

$$u_2(x, y)=\frac{4ka^2}{\pi^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^3\pi^3}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}\dfrac{(2m+1)\pi b}{2a}}\sin\frac{(2m+1)\pi}{a}\, x \operatorname{ch}\frac{(2m+1)\pi}{a}\, y.$$

Soluția problemei este

$$u(x, y)=\frac{k}{2}x(x-a)+$$

$$+\frac{4ka^2}{\pi^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^3\pi^3\operatorname{ch}\dfrac{(2m+1)\pi b}{2a}}\cdot\sin\frac{(2m+1)\pi}{a}\, x\cdot\operatorname{ch}\frac{(2m+1)\pi}{a}\, y.$$

19. Să se rezolve problema Dirichlet pentru sferă știind că pe sferă u este funcție numai de z.

R. Vom trece în coordonate sferice, soluția fiind funcție de r și θ. Avem de determinat deci soluția ecuației

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right]+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right]=0 \qquad (1)$$

care satisface condiția

$$u(r, \theta)\Big|_{r=R} = f(R\cos\theta). \tag{2}$$

Căutăm o soluție de forma

$$u(r, \theta) = S(r)\, T(\theta). \tag{3}$$

Înlocuind funcția (3) în ecuația (1), găsim

$$T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r^2S'] + S\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[\sin\theta T'] = 0$$

sau

$$\frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r^2S'] = \frac{-1}{T\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[\sin\theta\cdot T'] = \lambda, \quad (\lambda = \text{const}).$$

Obținem următoarele ecuații:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r^2S'] - \lambda S = 0, \tag{4}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[\sin\theta\cdot T'] + \lambda T(\theta) = 0. \tag{5}$$

Coeficienții ecuației (4) sînt 1, $\frac{2}{r}$, $\frac{\lambda}{r^2}$, deci $r=0$ atrage după sine singularitatea soluției. Pentru a avea o soluție nesingulară, punem condiția ca

$$S(0) = \text{finit}.$$

Coeficienții ecuației (5) sînt 1, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, λ. Pentru a avea o soluție nesingulară, atașăm condițiile

$$T(0) = \text{finit}, \quad T(\pi) = \text{finit}.$$

Integrăm ecuația (5). Făcînd schimbarea de variabilă $\cos\theta = t$, obținem ecuația

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1-t^2)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right] + \lambda T = 0$$

și condițiile

$$T(1) = \text{finit}, \quad T(-1) = \text{finit}.$$

Soluția ecuației care satisface aceste condiții este

$$T_n(t) = P_n(t) \quad \text{cu} \quad \lambda = n(n+1), \quad t = \cos\theta,$$

$P_n(t)$ fiind polinoame Legendre, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Ecuația (5) admite un șir infinit de soluții nesingulare care satisfac condițiile date.

Ecuația (4) este o ecuație de tip Euler

$$r^2S''+2rS'-n(n+1)S=0$$

și are soluția

$$S(r)=C_1r^n+C_2r^{-(1+n)} \qquad \begin{pmatrix} C_1, C_2=\text{const} \\ n=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

Această soluție nu este finită pentru $r=0$, deci luăm $C_2=0$. Obținem

$$S_n(r)=C_nr^n, \qquad (C_n=\text{const}),$$

deci ecuația (4) admite un șir infinit de soluții nesingulare.

Notăm

$$u_n(r, \theta)=C_nr^nP_n(\cos\theta), \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Fie $u(r, \theta)$ suma seriei

$$u(r, \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nr^nP_n(\cos\theta)$$

și $u(r, \theta)$ este soluție a problemei date, deci vom determina C_n din condiția ca $u(r, \theta)=f(R\cos\theta)$.

Avem

$$u(R, \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nR^nP_n(\cos\theta)=f(R\cos\theta).$$

Utilizînd proprietatea de ortogonalitate a polinoamelor Legendre

$$\int_{-1}^{1}P_n(t)P_m(t)\,dt=\frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}.$$

obținem

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_nR^n\int_{-1}^{1}P_n(t)P_m(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}C_nR^n\frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}=C_mR^m\frac{2}{2m+1}=\int_{-1}^{1}f_1(t)P_m(t)\,dt,$$

unde

$$f_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nR^nP_n(t)=f(Rt),$$

Rezultă

$$C_n=\frac{2n+1}{2R^n}\int_{-1}^{1}f_1(t)\,P_n(t)\,dt,$$

deci soluția problemei Dirichlet este

$$u(r, \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2R^n}\cdot r^n\cdot P_n(\cos\theta)\cdot\int_{-1}^{1}f_1(t)\,P_n(t)\,dt.$$

Scanned with OKEN Scanner

20. Să se determine temperatura staționară în punctele din interiorul unui paralelipiped dreptunghic de muchii l, m, n (trei muchii concurente coincid cu axele de coordonate) dacă în timpul experienței fețele laterale sînt menținute la temperatura 0°.

R. Funcția căutată satisface ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{1}$$

cu condițiile

$$\begin{aligned} &u|_{x=0}=0, && u|_{x=l}=0,\\ &u|_{y=0}=0, && u|_{y=m}=0,\\ &u|_{z=0}=f(x, y), && u|_{z=n}=g(x, y). \end{aligned} \tag{2}$$

Vom determina soluția ecuației date, utilizînd metoda lui Fourier. Căutăm soluțiile ecuației date sub forma

$$u(x, y, z)=X(x)\,Y(y)\,(Z(z). \tag{3}$$

Din (2) rezultă că trebuie să avem

$$X(0)=0, \qquad X(l)=0, \tag{4}$$

$$Y(0)=0, \qquad Y(m)=0. \tag{5}$$

Înlocuind funcția (3) în ecuația (1), găsim

$$X''YZ+Y''XZ+XYZ''=0.$$

Împărțind această egalitate cu XYZ, obținem

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}-\frac{Z''}{Z}.$$

În membrul întîi avem o funcție care depinde numai de x iar în membrul al doilea funcții care depind de y și z. Egalitatea nu este posibilă decît atunci cînd ele sînt egale cu o constantă. Notăm constanta cu a. Obținem

$$X''-aX=0,$$

$$\frac{Y''}{Y}=-\frac{Z''}{Z}-a.$$

Același raționament ca mai înainte ne arată că ultima egalitate este adevărată numai dacă fiecare din cele două funcții este egală cu o constantă b. Avem

$$X''-aX=0, \tag{6}$$

$$Y''-bY=0, \tag{7}$$

$$Z''+(a+b)\,Z=0. \tag{8}$$

1. Fie $a=\lambda^2$. În acest caz soluția generală a ecuației (6) este

$$X(x)=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x},$$

unde C_1 și C_2 sînt constante arbitrare. Condițiile (4) ne conduc la următorul sistem liniar și omogen în C_1 și C_2:

$$\left.\begin{aligned} C_1+C_2&=0\\ C_1e^{\lambda l}+C_2e^{-\lambda l}&=0\end{aligned}\right\}.$$

Determinantul acestui sistem este diferit de zero, deci sînt posibile numai soluțiile banale $C_1=0$, $C_2=0$. În consecință pentru $a>0$, ecuația (6) nu admite nici o soluție nebanală, care să satisfacă condițiile (4).

2. Fie $a=0$. Soluția generală în acest caz este de forma

$$X(x)=C_1x+C_2,\ C_1, C_2 \text{ fiind constante arbitrare.}$$

Condițiile (4) ne dau

$$X(0)=C_2=0,\ X(l)=C_1l=0,$$

de unde rezultă, $C_1=0$ și $C_2=0$. Ajungem din nou la soluția banală.

3. Fie $a<0$, $a=-\lambda^2$. În acest caz soluția generală este

$$X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x,\qquad (C_1, C_2=\text{const}).$$

Condițiile (4) ne conduc la egalitățile

$$X(0)=C_1=0,$$

$$X(l)=C_2\sin\lambda l=0.$$

Ultimul produs se anulează dacă $C_2=0$ sau $\sin\lambda l=0$. Primul caz $C_2=0$ ne conduce din nou la soluția banală $u(x, y, z)=0$. Acceptăm deci că $C_2\neq0$ și

$$\sin\lambda l=0.$$

Această egalitate este satisfăcută pentru

$$\lambda l=k\pi$$

sau

$$\lambda=\frac{k\pi}{l},$$

unde k poate fi egal cu orice număr natural.

Soluția ecuației (6) corespunzătoare lui $\lambda=\frac{k\pi}{l}$ o scriem în felul următor:

$$X_k=C_k\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

În concluzie, ecuația (6) admite un șir infinit de soluții nebanale care satisfac condițiile (4).

Urmează să integrăm ecuația (7).

4. Fie $b=\mu^2$. Soluția generală a ecuației (7) este

$$Y(y)=C_1e^{\mu y}+C_2e^{-\mu y},\ (C_1,\ C_2=\text{const}).$$

Condițiile (5) ne conduc la sistemul liniar și omogen în C_1 și C_2:

$$\left.\begin{aligned} C_1+C_2&=0\\ C_1e^{\mu m}+C_2e^{-\mu m}&=0\end{aligned}\right\}$$

al cărui determinant este diferit de zero, deci sînt posibile numai soluțiile banale $C_1=0$, $C_2=0$. Ecuația (7) nu admite soluții nebanale care să satisfacă condițiile (5).

5. Fie $b=0$. În acest caz soluția generală a ecuației (7) este

$$Y(y)=C_1y+C_2,\ (C_1,\ C_2=\text{const}),$$

iar condițiile (5) conduc la $C_1=0$, $C_2=0$, deci, ajungem din nou la soluția banală.

6. Fie $b=-\mu^2$. Soluția generală a ecuației (7) în acest caz

$$Y(y)=C_1\cos\mu y+C_2\sin\mu y.$$

Condițiile (5) conduc la egalitățile

$$Y(0)=C_1=0,$$
$$Y(m)=C_2\sin\mu m=0.$$

Avem deci

$$C_1=0 \text{ și } \sin\mu m=0.$$

Rezultă

$$\mu=\frac{j\pi}{m},\ (j=1,\ 2,\ \ldots).$$

Soluția ecuației (7) corespunzătoare lui $\mu=\frac{j\pi}{m}$ o scriem sub forma

$$Y_j(y)=A_j\sin\frac{j\pi}{m}y.$$

Urmează să integrăm ecuația (8), valorile lui a și b fiind fixate. Corespunzător lui

$$a=-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,\ b=-\left(\frac{j\pi}{m}\right)^2$$

avem ecuația diferențială

$$Z''-\left(\frac{k^2}{l^2}+\frac{j^2}{m^2}\right)\pi^2Z=0$$

a cărei soluție generală este

$$Z_{k,j}=B_{k,j}e^{\sqrt{\frac{k^2}{l^2}+\frac{j^2}{m^2}}\pi z}+D_{k,j}e^{-\sqrt{\frac{k^2}{l^2}+\frac{j^2}{m^2}}\pi z},\ (B_{k,j}\ D_{k,j}=\text{const}).$$

Notăm

$$u_{k,j}(x,\ y,\ z)=X_k(x)\cdot Y_j(y)\ Z_{k,j}(z).$$

Am obținut astfel un șir infinit de soluții de forma particulară (3) care satisfac condițiile (4) și (5).

Trecem acum la determinarea soluției problemei lui Cauchy cu ajutorul funcțiilor $u_{k,j}(x, y, z)$. Presupunem că există suma

$$u(x, y, z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left[E_{k,j}\,e^{\pi\sqrt{\frac{k^2}{l^2}+\frac{j^2}{m^2}}\,z}+F_{k,j}\,e^{-\pi\sqrt{\frac{k^2}{l^2}+\frac{j^2}{m^2}}\,z}\right]\sin\frac{k\pi}{l}\,x\cdot\sin\frac{j\pi}{m}\,y.$$

Afirmăm, de asemenea, că funcția $u(x, y, z)$ este soluția problemei lui Cauchy, deci sînt satisfăcute condițiile inițiale ale problemei

$$f(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(E_{k,j}+F_{k,j})\sin\frac{k\pi}{l}\,x\sin\frac{j\pi}{m}\,y,$$

$$g(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left[E_{k,j}\,e^{\pi\sqrt{\frac{k^2}{l^2}+\frac{j^2}{m^2}}\,n}+F_{k,j}\,e^{-\pi\sqrt{\frac{k^2}{l^2}+\frac{j_2}{m^2}}\,n}\right]\sin\frac{k\pi}{l}\,x\cdot\sin\frac{j\pi}{m}\,y.$$

Aceste egalități reprezintă dezvoltarea funcțiilor $f(x, y)$ și $g(x, y)$ în serie Fourier. Coeficienții acestor serii sînt

$$E_{k,j}+F_{k,j}=\frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m f(x, y)\sin\frac{k\pi}{l}\,x\cdot\sin\frac{j\pi}{m}\,y\,dx\,dy,$$

$$E_{k,j}\,e^{\pi n\alpha}+F_{k,j}\,e^{-\pi n\alpha}=\frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m g(x, y)\sin\frac{k\pi}{l}\,x\sin\frac{j\pi}{m}\,y\,dx\,dy,\quad \alpha=\sqrt{\frac{k^2}{l^2}+\frac{j^2}{m^2}}.$$

De aici deducem pe $E_{k,j}$ și $F_{k,j}$ și obținem soluția problemei care satisface condițiile date:

$$u(x, y, z)=$$

$$=\frac{4}{lm}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi}{l}\,x\cdot\sin\frac{\pi j}{m}\,y}{\operatorname{sh}\left(\pi n\sqrt{\frac{k^2}{l^2}+\frac{j^2}{m^2}}\right)}\left\{\operatorname{sh}\left[\pi(n-z)\sqrt{\frac{k^2}{l^2}+\frac{j^2}{m^2}}\right]\cdot\right.$$

$$\cdot\int_0^l\int_0^m f(x, y)\sin\frac{k\pi}{l}\,x\sin\frac{j\pi}{m}\,y\,dx\,dy+$$

$$\left.+\operatorname{sh}\left[\sqrt{\frac{k^2}{l^2}+\frac{j^2}{m^2}}\,\pi z\right]\cdot\int_0^l\int_0^m g(x, y)\sin\frac{k\pi}{l}\,x\sin\frac{j\pi}{m}\,y\,dx\,dy\right\}.$$

21. Să se rezolve problema lui Neumann pentru un cerc C_R de rază R și cu centrul în originea axelor de coordonate.

R. Avem de determinat funcția $u(\rho, \theta)$ continuă împreună cu derivatele sale parțiale în domeniul închis $C_R + \widetilde{C}_R$ și care satisface condițiile

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \qquad \text{în punctele lui } C_R \ (1)$$

și

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} = f(\theta),$$

unde $f(\theta)$ este o funcție dată, continuă împreună cu derivata sa de ordinul întîi și cu derivata a doua continuă pe porțiuni.

În plus condiția necesară pentru ca problema lui Neumann să aibă soluție este ca integrala funcției $f(\theta)$ luată pe frontiera domeniului să fie egală cu zero, deci

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta = 0.$$

Soluția acestei probleme o putem determina aplicînd metoda lui Fourier, care ne conduce la seria

$$u(\rho, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

Coeficienții A_n și B_n se determină din condiția la limită. Avem

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

și

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} = \sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = f(\theta).$$

Am ajuns la o serie Fourier și, prin urmare,

$$A_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad B_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta.$$

Coeficientul A_0 rămîne o constantă arbitrară, deoarece soluția problemei lui Neumann nu este unică, ea depinde de o constantă aditivă. Rezultă

$$u(\rho, \theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{\pi n R^{n-1}}\left[\cos n\theta\cdot\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi+\right.$$

$$\left.+\sin n\theta\cdot\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi\right]=\frac{A_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{nR^{n-1}}\cos n(\varphi-\theta)\right]\cdot d\varphi.$$

Să calculăm suma seriei

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{nR^{n-1}}\cos n(\varphi-\theta).$$

Derivăm această relație în raport cu φ:

$$\frac{\partial S}{\partial\varphi}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{R^{n-1}}\sin n(\varphi-\theta)=-R\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n\frac{e^{in(\varphi-\theta)}-e^{-in(\varphi-\theta)}}{2i}=$$

$$=-\frac{R}{2i}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi-\theta)}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}e^{-i(\varphi-\theta)}\right)^n\right].$$

Aceste serii sînt convergente și au rația în modul mai mică ca 1, deci

$$\frac{\partial S}{\partial\varphi}=-\frac{R}{2i}\left[\frac{\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi-\theta)}}{1-\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi-\theta)}}-\frac{\frac{\rho}{R}e^{-i(\varphi-\theta)}}{1-\frac{\rho}{R}e^{-i(\varphi-\theta)}}\right]=\frac{-\rho\sin(\varphi-\theta)}{1-2\frac{\rho}{R}\cos(\varphi-\theta)+\frac{\rho^2}{R^2}}.$$

De aici, obținem

$$S=-\frac{R}{2}\ln\left(1-2\frac{\rho}{R}\cos(\varphi-\theta)+\frac{\rho^2}{R^2}\right)+C=$$

$$=-\frac{R}{2}\ln[R^2-2R\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2]+C_1,\ (C, C_1=\text{const}).$$

Cu aceasta avem

$$u(\rho, \theta)=\frac{A_0}{2}-\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\ln[R^2-2R\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2]\,d\varphi-$$

$$-\frac{R}{2\pi}C_1\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi=\frac{A_0}{2}-\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\ln[R^2-2R\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2]\,d\varphi.$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VIII

TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

Definiție. *Se numește algebră Boole o mulțime nevidă* $\mathcal{A}$ *înzestrată cu trei operații* $\cup$, $\cap$, $\mathbf{C}$, *care verifică axiomele:*

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$, (asociativitate),
2. $(A \cap B) \cup A = A$, $A \cap (A \cup B) = A$, (absorbție),
3. $(A \cap \mathbf{C}A) \cup B = B$, $(A \cup \mathbf{C}A) \cap B = B$ (complementaritate) *pentru orice* $A, B, C \in \mathcal{A}$.

Definiție. *Un element* $A \in \mathcal{A}$, $A \neq \emptyset$ *se numește atom dacă pentru orice* $B \in \mathcal{A}$ *incluziunea* $B \subset A$ *implică* $B = \emptyset$ sau $B = A$.

Fie Ω o mulțime oarecare formată din elemente ω și să notăm prin $\mathcal{P}(\Omega)$ mulțimea tuturor părților mulțimii Ω.

Definiție. *Se numește corp de părți o familie nevidă* $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *care posedă următoarele proprietăți:*

1. $A \in \mathcal{K}$, implică $\mathbf{C}A \in \mathcal{K}$,
2. $A, B \in \mathcal{K}$, implică $A \cup B \in \mathcal{K}$.

Se observă că mulțimile $\omega \in \mathcal{K}$, formate din cîte un singur element sînt atomi ai algebrei Boole $\mathcal{K}$. În general aceste elemente nu epuizează mulțimea atomilor lui $\mathcal{K}$.

Definiție. *Fie* A *un eveniment pentru realizarea căruia dintr-un număr total de* N *cazuri posibile se prezintă* n *cazuri favorabile. Probabilitatea de realizare a evenimentului* A *este definită ca raportul dintre numărul cazurilor favorabile și numărul cazurilor posibile, presupuse toate egal posibile.*

Aceasta este *definiția clasică* a probabilității care poate fi folosită în unele probleme.

Definiția corectă a noțiunii de probabilitate este *definiția axiomatică* dată de A. N. Kolmogorov.

Definiție. *Se numește cîmp (cîmp borelian)* de evenimente, o mulțime* Ω *înzestrată cu un corp* (corp borelian) *de evenimente* $\mathcal{K}$.

Fie $\{\Omega, \mathcal{K}\}$ *un cîmp de evenimente.*

Definiție. *Se numește probabilitate pe* $\mathcal{K}$ *o aplicație* $P: \mathcal{K} \to R$ *cu următoarele proprietăți:*

1) $P(A) \geqslant 0$ *pentru orice* $A \in \mathcal{K}$;

2) $P(\Omega) = 1$;

3) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ *pentru orice evenimente* $A_1, A_2 \in \mathcal{K}$ *cu* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Definiție. *Se numește cîmp de probabilitate tripletul* $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ *unde* Ω *este mulțimea evenimentelor elementare,* $\mathcal{K}$ *un corp de părți generat de o familie de părți ale lui* Ω, *iar* P *o probabilitate pe* $\mathcal{K}$.

Definiție. *Se numește cîmp borelian de probabilitate un cîmp borelian de evenimente* $\{\Omega, \mathcal{K}\}$ *înzestrat cu o probabilitate* P *complet aditivă* ($P(A) \geqslant 0$, or $A \in \mathcal{K}$, $P(\Omega) = 1$; $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{K}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j \in I$, I fiind o mulțime cel mult numărabilă de indici).

Dacă Ω conține un număr finit de evenimente $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, atunci orice eveniment $A \in \mathcal{K}$, $A \neq \emptyset$ este reuniunea unui număr finit de evenimente elementare

$$A = \{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{\omega_{i_k}\}$$

și

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\}) + \cdots + P(\{\omega_{i_k}\}).$$

Probabilitate geometrică. Fie $\mathfrak{M}$ o familie de figuri geometrice și $\mathfrak{K}$ o submulțime de figuri a lui $\mathfrak{M}$.

Probabilitatea submulțimii $\mathfrak{K}$ *este egală cu raportul dintre măsura submulțimii* $\mathfrak{K}$ *de figuri a familiei de figuri* $\mathfrak{M}$ *și măsura întregii familii de figuri* $\mathfrak{M}$. Dacă D este acea submulțime a domeniului D_0 ale cărei puncte $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q)$ generează submulțimea de figuri $\mathfrak{K}$ a familiei de figuri considerate, avem

$$P(\mathfrak{K}) = \frac{\mu(\mathfrak{K})}{\mu(\mathfrak{M})} = \frac{\nu(D)}{\nu(D_0)} = \frac{\int_D \cdots \int \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_q}{\int_{D_0} \cdots \int \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_q}$$

expresia $\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_q$ se numește *măsură elementară* a familiei.

---

* În limbajul folosit în teoria măsurii, un cîmp borelian de evenimente este un spațiu măsurabil care conține și spațiul total.

Definiție. *Se numește probabilitate a evenimentului B condiționată de evenimentul A raportul*

$$P_A(B)=P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}.$$

Fie $(A_i)_{i\in I}\in\mathcal{K}$ o familie cel mult numărabilă de evenimente incompatibile două cîte două cu $\bigcup_{i\in I}A_i=\Omega$ și $P(A_i)\neq 0$, $i\in I$. Atunci

$$P(A)=\sum_{i\in I}P(A_i)P(A/A_i)$$

și

$$P(A)=\sum_{i\in I}P(A_i)\,P(A/A_i)=\sum_{i\in I}P(A\cap A_i)=P\Big(A\cap\bigcup_{i\in I}A_i\Big).$$

Aceasta este *formula probabilității totale.*

Formula lui Bayes. Fie $(A_i)_{i\in I}\in\mathcal{K}$ o familie cel mult numărabilă de evenimente incompatibile două cîte două cu $\bigcup_{i\in I}A_i=\Omega$ și $P(A_i)\neq 0$. Atunci

$$P(A_i/A)=\frac{P(A_i)\,P(A/A_i)}{\sum_{i\in I}P(A_i)\,P(A/A_i)},\quad i\in I.$$

Definiție. *Evenimentele A_1, $A_2\in\mathcal{K}$ sînt independente dacă*

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\,P(A_2).$$

Evenimentele $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathcal{K}$ *sînt independente în totalitatea lor* sau pe scurt, *independente*, dacă pentru orice $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n$ avem

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_s})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_s}).$$

Evenimentele $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathcal{K}$ sînt *independente k cîte k, $k\leqslant n$,* dacă evenimentele din orice familie de k evenimente sînt independente.

Definiție. *Se numește variabilă aleatoare definită pe un cîmp borelian de evenimente $\{\Omega,\mathcal{K}\}$ o aplicație $\xi:\Omega\to R$ cu proprietatea că $\xi^{-1}(A)\in\mathcal{K}$ pentru orice $A\in\mathcal{B}$.*

Se numește variabilă aleatoarea simplă o variabilă aleatoare care ia un număr finit de valori finite.

Definiție. *Se numește funcție de repartiție a variabilei aleatoare ξ funcția $F:R\to R$ definită de relația*

$$F(x)=P(A_x),\quad x\in R,$$

unde $A_x=\{\omega \mid \xi(\omega)<x\}$, *sau pe scurt*

$$F(x)=P(\xi<x).$$

Dacă introducem aplicația $P^{(\xi)}:\mathcal{B}\to R$ prin relația

$$P^{(\xi)}(A)=P(\xi^{-1}(A))$$

numită funcția de probabilitate corespunzătoare variabilei aleatoare ξ,

$$F(x)=P^{(\xi)}((-\infty,\ x)).$$

Proprietăți:

1. $0\leqslant F(x)\leqslant 1$;
2. $F(x_1)\leqslant F(x_2)$, dacă $x_1<x_2$;
3. $F(x-0)=F(x)$, pentru orice $x\in R$;
4. $F(-\infty)=0$;
5. $F(+\infty)=1$.

Dacă există o funcție nenegativă $\rho(x)$ care verifică pentru orice x egalitatea

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\rho(u)\,du,$$

atunci $\rho(x)$ se numește *densitate de repartiție* a variabilei aleatoare ξ și are proprietățile:

1. $\rho(x)\geqslant 0$,
2. $P(x_1\leqslant\xi\leqslant x_2)=\int_{x_1}^{x_2}\rho(u)\,du, \quad (x_1<x_2)$,
3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(u)\,du=1$.

În mod analog se definesc funcția de repartiție și densitatea de repartiție pentru distribuții cu mai multe dimensiuni și cu aceleași proprietăți.

Compunerea legilor de repartiție. Fie ξ și η două variabile aleatoare cu densitățile $f(x)$ și $g(y)$. Avem

$$r(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-x)g(x)\,dx$$

sau

$$r(z)=\iint\limits_{x+y<z} f(x)\,g(y)\,dx\,dy,$$

unde $r(z)$ este *densitatea* variabilei aleatoare $\zeta=\xi+\eta$.

Dacă ξ și η sînt independente pentru funcțiile de repartiții ale variabilelor $\xi\eta$ și ξ/η, obținem

$$P(\xi\eta<z)=\iint\limits_{xy<z} f(x)\,g(y)\,dx\,dy,$$

$$P(\xi/\eta<z)=\iint\limits_{x/y<z} f(x)\,g(y)\,dx\,dy,$$

sau notînd cu $s(z)$ și $p(z)$ densitățile de repartiție corespunzătoare variabilelor $\xi\eta$ și ξ/η, avem

$$s(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,f\left(\frac{z}{y}\right)\frac{dy}{|y|},$$

$$p(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|\,g(y)\,f(zy)\,dy.$$

Fie $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ un cîmp borelian de probabilitate și $\mathcal{L}^r=\mathcal{L}^r(\Omega, \mathcal{K}, P)$, $r\in R$, mulțimea variabilelor aleatoare r - sumabile în raport cu probabilitatea P.

Valori medii și momente

1. Se numește *valoare medie* a variabilei aleatoare $\xi\in\mathcal{L}^1$ numărul

$$E(\xi)=\int\limits_{\Omega}\xi(\omega)\,dP(\omega).$$

Fie $F(x)$ funcția de repartiție a lui ξ și $\tau:R\to R$ o aplicație măsurabilă Borel. Presupunem că $\tau\circ\xi\in\mathcal{L}^1$.

2. Se numește *moment de ordinul* τ al variabilei aleatoare ξ numărul

$$E_\tau(\xi)=E(\tau\circ\xi)=\int\limits_{\Omega}(\tau\circ\xi)(\omega)\,dP(\omega)=\int\limits_{R}\tau(x)\,dF(x). \qquad (1)$$

3. Se numește *moment (inițial) de ordinul* p, $p \in N$, al variabilei aleatoare ξ numărul obținut din (1) pentru $\tau(x)=x^p$

$$\alpha_p(\xi)=E(\xi^p)=M_p(\xi)=\int_\Omega \xi^p(\omega)\,dP(\omega)=\int_R x^p\,dF(x).$$

4. Se numește *moment absolut de ordinul* r, $0<r\in R$, al variabilei aleatoare ξ numărul

$$\beta_r(\xi)=E(|\xi|^r)=\int_\Omega |\xi(\omega)|^r\,dP(\omega)=\int_R |x|^r\,dF(x).$$

Pentru o variabilă aleatoare de tip discret care ia valorile $(x_i)_{i\in I}$, $I\subset N^*$, cu probabilitățile $(p_i)_{i\in I}$, avem

$$\alpha_p(\xi)=\sum_{i\in I} x_i^p p_i,$$

$$\beta_r(\xi)=\sum_{i\in I} |x_i|^r p_i.$$

Pentru o variabilă aleatoare de tip continuu ξ cu densitatea f formulele date devin

$$\alpha_p(\xi)=\int_R x^p f(x)\,dx,$$

$$\beta_r(\xi)=\int_R |x|^r f(x)\,dx.$$

5. Se numește *moment centrat de ordinul* p, $p\in N^*$, numărul

$$\mu_p(\xi)=\alpha_p(\xi-E(\xi)).$$

6. Se numește *dispersie* a variabilei aleatoare $\xi\in\mathcal{L}^2$ numărul

$$\sigma^2=D^2(\xi)=\mu^2(\xi),$$

iar $\sigma=D(\xi)$ se *numește abatere medie pătratică*.

7. Se numesc *asimetrie* și *exces* numerele

$$\gamma_1(\xi)=\frac{\mu_3(\xi)}{\sqrt{\mu_2^3(\xi)}};\quad \gamma_2(\xi)=\frac{\mu_4(\xi)}{\mu_2^2(\xi)}-3.$$

Scanned with OKEN Scanner

8. Se numește *covarianță* a variabilelor aleatoare ξ și η valoarea medie a produsului abaterilor

$$\lambda_{\xi,\eta}=E[(\xi-E(\xi))\cdot(\eta-E(\eta))]=E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)$$

iar

$$\rho_{\xi,\eta}=\frac{\lambda_{\xi,\eta}}{D(\xi)\cdot D(\eta)}$$

se numește *coeficient de corelație*.

9. Se numește *moment de ordinul* $(p_1, \ldots, p_s)$, $p_1, \ldots, p_s \in N$ al variabilei aleatoare n - dimensionale $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ expresia

$$\alpha_{p_1 \ldots p_s}=E(\xi_1^{p_1}, \ldots, \xi_s^{p_s})=\int_\Omega \xi_1^{p_1}(\omega)\ldots\xi_s^{p_s}(\omega)\,dP(\omega)=$$

$$=\int_{R^s} x_1^{p_1}\ldots x_s^{p_s}\,dF(x_1\cdots x_s).$$

La fel se pot extinde și momentele absolute și cele centrate.

Matricea $\|E(\xi_i\eta_j)\|_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ se numește *matrice de corelație* a variabilelor aleatoare n-dimensionale $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$.

Inegalitatea lui Markov

$$P(\xi\geqslant\lambda E(\xi))\leqslant\frac{1}{\lambda},$$

ξ fiind o variabilă aleatoare pozitivă de valoare medie finită, $\lambda>1$.

Inegalitatea lui Cebîșev

$$P(\xi\geqslant a)\leqslant\frac{\beta_2(\xi)}{a^2}, \text{ pentru orice } a>0.$$

Definiție. *Se numește probabilitatea evenimentului A condiționată de variabila aleatoare ξ variabila aleatoare $P(A\mid\xi)(\cdot)$ definită astfel:*

$$P(A\mid\xi)(\omega)=\begin{cases} P(A\mid\xi=x_i),\ \omega\in\{\omega\mid\xi(\omega)=x_i\} \text{ și } P(\{\omega\mid\xi(\omega)=x_i\})>0 \\ \text{o valoare arbitrară dacă } P(\{\omega\mid\xi(\omega)=x_i\})=0. \end{cases}$$

Avem

$$P(A\cap B)=\int_B P(A\mid\xi)(\omega)\,dP(\omega).$$

Definiție. *Se numește valoare medie a variabilei aleatoare* η *condiționată de variabila aleatoare* ξ

$$M(\eta \mid \xi)(\omega)=M(\eta \mid \{\omega \mid \xi(\omega)=x_i\})=\Sigma y_i P(\{\omega \mid \eta(\omega)=y_i\} \mid \{\omega \mid \xi(\omega)=x_i\}).$$

Avem prin definiție pentru *funcția de repartiție a lui* η *condiționată de* $\xi=x$

$$F(y \mid x)=P(\eta<y \mid \xi=x)=\int_{-\infty}^{y} f(t \mid x)\mathrm{d}t,$$

unde $f(y \mid x)$ este *densitatea condiționată* a lui η de $\xi=x$.

Definiție. *Se numește funcție caracteristică a variabilei aleatoare* ξ *aplicația* $\varphi_\xi : R \to C$ *definită de relația*

$$\varphi_\xi(t)=E(e^{it\xi})=\int_\Omega e^{it\xi(\omega)}\mathrm{d}P(\omega)=\int_R e^{itx}\mathrm{d}F_\xi(x).$$

Dacă variabila aleatoare ξ are densitatea de repartiție $f(x)$, atunci

$$\varphi(t)=\int_R e^{itx}f(x)\mathrm{d}x.$$

Proprietăți mai importante:

1. $\varphi(t)$ este uniform continuă și $\varphi(0)=1$, $|\varphi(t)| \leqslant 1$.

2. Dacă $\beta_n(\xi)<\infty$ pentru un anumit $n \in N^*$, funcția caracteristică φ_ξ este de n ori derivabilă și

$$\alpha_k(\xi)=\frac{\varphi_\xi^{(k)}(0)}{i^k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

3. Dacă ξ are momente de orice ordin, avem

$$\varphi_\xi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\alpha_k(\xi).$$

4. Fie variabila ξ cu repartiția $F(x)$ și x_1, x_2, $(x_1 \leqslant x_2)$, două puncte de continuitate pentru $F(x)$; are loc egalitatea

$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Dacă x este punct de continuitate a lui $F(x)$, avem

$$F(x)=\lim_{y\to\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{it}\,\varphi(t)\,dt.$$

5. Dacă $(F_n(x))_{n\in N^*}$ este un șir de funcții de repartiție convergent spre funcția de repartiție $F(x)$, atunci șirul de funcții caracteristice $(\varphi_n(t))_{n\in N^*}$ tinde la funcția caracteristică $\varphi(t)$ corespunzătoare funcției $F(x)$.

6. Funcția caracteristică este o funcție de tip pozitiv.

Convergența șirurilor de variabile aleatoare

Fie $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ un șir de variabile aleatoare definite pe cîmpul de probabilitate $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ și ξ o variabilă aleatoare definită de asemenea pe acest cîmp.

1. Șirul de variabile aleatoare converge *în probabilitate* (sau *stochastic*) către ξ dacă pentru orice $\varepsilon>0$ avem

$$\lim_{n\to\infty}P(|\xi_n-\xi|>\varepsilon)=0.$$

2. Șirul de variabile aleatoare converge *aproape sigur* către ξ dacă există o mulțime $E_0\in\mathcal{K}$ cu $P(E_0)=0$ așa încît

$$\xi_n(\omega)\to\xi(\omega)$$

pentru orice $\omega\in\Omega-E_0$; deci dacă $(\xi_n(\omega))_{n\in N^*}$ converge simplu către $\xi(\omega)$ cu excepția unei mulțimi E_0 de probabilitate nulă.

3. Șirul de variabile aleatoare $(\xi_n(\omega))_{n\in N^*}$ converge în *sensul lui Bernoulli* către $\xi(\omega)$ dacă funcțiile de repartiție $F_n(x)$ converg către $F(x)$ în orice punct $x\in R$ de continuitate a funcției $F(x)$.

4. Spunem că șirul converge tare către ξ dacă pentru orice $\varepsilon>0$ și $\eta>0$ există $N(\varepsilon,\eta)$ așa încît

$$P\Big(\bigcup_{n\geq N(\varepsilon,\eta)}\{\omega\,|\,|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|>\varepsilon\}\Big)<\eta.$$

Teorema lui Leapunov. Fie $(\xi_n(\omega))_{n\in N^*}$ un șir de variabile aleatoare independente; dacă există un număr $\delta>0$ astfel încît

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_{(n)}^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}\beta_{2+\delta}\,(\xi_k-a_k)=0,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty}F_{(n)}(x)=\Phi(x),\qquad x\in R.$$

Teorema lui Moivre-Laplace. Fie $(\xi_n)_{n\in N^*}$ un șir de variabile aleatoare care pot lua fiecare valorile 1 și 0, respectiv cu probabilitățile p și $q=1-p$. Atunci funcția de repartiție $F(x)$ a variabilei aleatoare normate

$$\xi_{(n)}=\frac{\xi^{(n)}-np}{\sqrt{npq}}, \text{ unde } \xi^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}\xi_k,$$

converge pentru $n\to\infty$ la Φ.

Legea logaritmului iterat. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ variabile aleatoare uniform mărginite și independente, avînd aceeași valoare medie $M=E(\xi_n)$ și aceeași dispersie $D^2=D^2(\xi_n)$. Notăm

$$\eta_n=\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n-nM}{D}.$$

Avem

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{|\eta_n|}{\sqrt{2n\ln\ln n}}\leqslant 1\right)=1.$$

Problemele de statistică sînt aplicații practice ale principalelor metode de calcul utilizate în statistica matematică.

În esență, *metoda selecției* este următoarea: fiind dată o *populație* formată din N *indivizi*, în urma a n experiențe independente bine determinate, obținem rezultatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Se pune problema determinării caracteristicilor populației (momente, mediană, etc.) pornind de la variabilele x_i, $(i=1, \ldots, n)$.

Cînd numărul indivizilor din populație este infinit sau poate fi considerat, din punct de vedere practic, ca infinit, fiind foarte mare, singura metodă de cercetare pentru determinarea numerică a diferitelor caracteristici este, evident, metoda selecției.

Vom da în continuare cîteva repartiții statistice.

Repartiția binomială

Să considerăm un cîmp de probabilitate finit care constă în evenimentele A și $\complement A$ (evenimentul contrar), în afară de evenimentul total Ω și evenimentul imposibil $\emptyset$.

Experiența care de fiecare dată duce la apariția evenimentului A sau a evenimentului $\complement A$ o vom numi *probă*.

n probe independente dau naștere fiecare la unul din cele două evenimente A și $\complement A$, cu probabilitățile constante p și q în fiecare probă $(p+q=1)$.

Presupunem că în cele n probe independente, evenimentul A s-a verificat de α ori, iar evenimentul $\complement A$ de $n-\alpha$ ori. Repartiția variabilei aleatoare α se numește *repartiție binomială*.

Probabilitatea ca în cele n probe evenimentul A să se verifice de α ori este

$$P_{n,\alpha}=C_n^\alpha p^\alpha q^{n-\alpha}. \tag{1}$$

Funcția de repartiție a repartiției binomiale este

$$F(x)=P(\alpha\leqslant x)=\sum_{\alpha=0}^{[x]}P_{n,\alpha},$$

unde am notat cu $[x]$ cel mai mare întreg conținut în x.

Repartiția multinomială

Fie spațiul euclidian R_m în care luăm baza formată din vectorii

$$e_1=(1, 0, \ldots, 0),$$
$$e_2=(0, 1, \ldots, 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e_m=(0, 0, \ldots, 1).$$

Fie $(\xi_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ o familie de variabile aleatoare vectoriale independente, în care fiecare variabilă ξ_k poate lua ca valori vectorii e_j cu probabilitățile p_j, $1\leqslant j\leqslant n$, $\sum_{j=1}^{n}p_j=1$.

Funcția de repartiție multidimensională a vectorului $\xi=\xi_1+\cdots+\xi_n$ se numește *funcție de repartiție multinomială*.

Dacă $k=(k_1, \ldots, k_m)$ cu $k_1+\cdots+k_m=n$, atunci

$$P(\xi=k)=P_{n,k_1,\ldots,k_m}=\frac{n!}{k_1!\cdots k_m!}p_1^{k_1}\cdots p_m^{k_m}.$$

Repartiția hipergeometrică

Vom ilustra această repartiție astfel: Să presupunem o urnă care conține A bile albe și B bile negre. Din această urnă se fac n extracții succesive, fără să se pună bila extrasă înapoi în urnă (schema bilei neîntoarse). Obținem în modul acesta n probe dependente, adică un șir (ξ_k) de variabile aleatoare vectoriale dependente, unde fiecare poate lua valorile $a_{k_1}=(1, 0)$ sau $a_{k_2}=(0, 1)$ cu probabilitățile respective p_{k_1} și p_{k_2} ($k=1, \ldots, n$; $p_{k_1}+p_{k_2}=1$).

Într-o singură probă variabila vectorială ξ_k poate să apară sau nu, de unde rezultă că vom avea distribuția

$$\xi_k : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_{k_1} & p_{k_2} \end{pmatrix}.$$

Probabilitatea ca în n extracții succesive să scoatem α bile albe și β bile negre $(\alpha+\beta=n)$ este

$$P_n(\alpha)=\frac{C_A^{\alpha}\, C_B^{\beta}}{C_{A+B}^{\alpha+\beta}}.$$

Repartiția Poisson. Se numesc funcții de repartiție Poisson cu parametrul $\lambda>0$ funcțiile de repartiții

$$P(x;\ \lambda)=\sum_{k\in N}\frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}\theta(x-k),$$

θ fiind funcția lui Heaviside.*

Densitatea de repartiție a funcției $P(x;\ \lambda)$ este egală cu

$$\pi(x;\ \lambda)=\sum_{k\in N}\frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}\,\delta(x-k)$$

unde $\delta(x)$ este funcția lui Dirac.**

Dacă variabila aleatoare ξ are repartiția Poisson cu parametrul $\lambda>0$, atunci se vede că valorile ei sînt 0, 1, ... și că

$$P_k=P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}.$$

---

* $\theta(x)=\begin{cases} 0 \text{ dacă } x<0, \\ 1 \text{ dacă } x\geqslant 0. \end{cases}$

** $\delta(x-0)=0,\ x\neq a,$

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\delta(x-a)\,dx=1,\quad \varepsilon>0,$$

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}h(x)\,\delta(x-a)\,dx=h(a).$$

Repartiția normală $N(m, \sigma^2)$. Se numește funcție de repartiție normală și se notează cu $\Phi(x; m, \sigma^2)$ funcția de repartiție definită prin densitatea de repartiție

$$f(x; m, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

m și $\sigma^2 > 0$ fiind constante, numite parametrii repartiției.

Funcția de repartiție normală este egală cu

$$\Phi(x; m, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Repartiția χ^2. Spunem că variabila aleatoare ξ are funcția de repartiție χ^2 cu n grade de libertate dacă funcția de repartiție a variabilei aleatoare ξ este nulă pentru $x \leqslant 0$ iar pentru $x > 0$ este

$$K_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} dt.$$

Dacă $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sînt variabile aleatoare normale independente $N(0, 1)$, atunci variabila aleatoare

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

are densitatea de repartiție egală cu

$$k_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Repartiția gamma. Se numește funcție de repartiție gamma funcția de repartiție a cărei densitate de repartiție este egală cu

$$\Gamma_{\alpha, \lambda}(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, & \text{dacă } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Repartiția beta. Se numește funcție de repartiție beta cu (m, n) grade de libertate funcția de repartiție a cărei densitate de repartiție este egală cu

$$\beta_{m,n}(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}x^{m-1}(1-x)^{n-1} & \text{dacă } x\in(0,1),\\ 0, & \text{dacă } x\notin(0,1).\end{cases}$$

Repartiția normală n-dimensională $N(m, \Lambda^{-1})$. Fie ξ o variabilă aleatoare vectorială n-dimensională $\left\|\begin{matrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{matrix}\right\|$, unde ξ_i, $1\leqslant i\leqslant n$, sînt variabile aleatoare cu $E(\xi_i)=m_i$ și $D(\xi_i)=\sigma_i$.

Se numește funcție de repartiție n-dimensională normală funcția de repartiție definită prin densitatea de repartiție

$$f(x)=\sqrt{\frac{\det\Lambda^{-1}}{(2\pi)^n}}\,e^{-\frac{1}{2}\|x-m\|'\Lambda\|x-m\|}$$

unde

$$x=\left\|\begin{matrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{matrix}\right\|,\quad m=\left\|\begin{matrix}m_1\\ \vdots\\ m_n\end{matrix}\right\|\quad\text{și}\quad \Lambda=\left\|\begin{matrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\ \\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{matrix}\right\|$$

cu $\det\Lambda>0$.

PROBLEME

1. Fie evenimentele A și B și trei numere reale p_1, p_2, p_{12}. Să se arate că pentru a avea

$$P(A)=p_1,\quad P(B)=p_2,\quad P(AB)=p_{12}$$

este necesar și suficient să fie verificate următoarele relații :

$$1-p_1-p_2+p_{12}\geqslant 0, \tag{1}$$
$$p_1-p_{12}\geqslant 0, \tag{2}$$
$$p_2-p_{12}\geqslant 0, \tag{3}$$
$$p_{12}\geqslant 0, \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Se observă că membrii întîi ai celor patru relaţii sînt probabilităţile lui $\overline{AB}$, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$ şi AB, deci nu pot fi negative.

Să demonstrăm suficienţa. Din cele patru condiţii rezultă

$$0 \leqslant p_{12} \leqslant p_1 \leqslant p_1+p_2-p_{12} \leqslant 1$$

şi de asemenea

$$0 \leqslant p_{12} \leqslant p_2 \leqslant p_1+p_2-p_{12} \leqslant 1.$$

Numerele p_1, p_2, p_{12} sînt deci nenegative şi cel mult egale cu 1. Fie intervalul $I=(0, 1)$ şi presupunem că un punct P ales la întîmplare în acest interval este uniform repartizat, adică probabilitatea pentru ca el să cadă într-un interval parţial oarecare este egală cu lungimea acestui interval parţial. Dacă A este evenimentul „punctul cade în intervalul $0<x<p_1$" şi B evenimentul „punctul cade în intervalul $p_1-p_{12}<x<p_1+p_2-p_{12}$", este clar că

$$P(A)=p_1, \quad P(B)=p_2, \quad P(AB)=p_{12}.$$

2. Fie Ω o mulţime numărabilă ale cărei elemente sînt ω_1, ω_2, ..., ω_n, ...

Fie $\mathcal{A}$ mulţimea părţilor lui Ω. Definim probabilitatea P prin

$$P(\{\omega_n\})=p_n, \text{ unde } p_n \geqslant p_{n+1}>0, \ (n=1, 2, \ldots) \text{ şi } \sum_{n=1}^{\infty} p_n=1.$$

1° Să se arate că mulţimea numerelor x pentru care există cel puţin un $A \in \mathcal{A}$ cu $P(A)=x$ este completă.

2° Să se arate că în condiţia 1°, $P(A)$ ia toate valorile din $[0, 1]$ dacă şi numai dacă

$$p_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k, \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

3° În condiţia 1° să se arate că numerelor $x_1, \ldots, x_r$ cu

$$\sum_{i=1}^{r} x_i=1, \ x_i \geqslant 0, \qquad (i=1, 2, \ldots, r),$$

le corespunde un sistem complet de evenimente şi unul singur $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_r$ cu $P(A_i)=x_i$, $(i=1, 2, \ldots, r)$ dacă sînt satisfăcute condiţiile

$$p_n \leqslant \frac{1}{r} \sum_{k=n}^{\infty} p_k, \quad (n=1, 2, \ldots).$$

R. Spunem că un număr x este reprezentabil dacă există un eveniment $A \in \mathcal{A}$ cu $P(A)=x$. Fie x_n $(n=1, 2, \ldots)$ numere reprezentabile şi fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x\neq 0$. Să arătăm că x este de asemenea reprezentabil: din şirul $\{x_n\}$ se poate extrage un subşir infinit $\{x_{n_k}\}$, $(k=1, 2, \ldots)$ astfel ca în reprezentarea tuturor x_{n_k} termenul p_{i_1} este foarte

mare. Din acest subșir se poate extrage un alt subșir infinit de numere, în reprezentarea căruia p_{i_2} este al doilea termen foarte mare. Obținem procedînd astfel un șir p_{i_s} ($s=1, 2, \ldots$) pentru care $\sum_{s=1}^{\infty} p_{i_s}=x$.

Mulțimea valorilor $P(A)$ este deci închisă.

Pe de altă parte x este un număr reprezentabil printr-o sumă finită de p_i. Fie

$$x=\sum_{j=1}^{N} p_{ij},$$

atunci

$$x=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij}+p_n\right).$$

Dacă $x=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$, putem scrie

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}.$$

Mulțimea de valori $P(A)$ este deci perfectă.

3° Condiția necesară este imediată. Să demonstrăm suficiența. Fie $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots$ $\cdots\geqslant x_r$, cu $x_1\geqslant 1/r$ și $p_1\leqslant 1/r$. Deci p_1 poate fi utilizat pentru reprezentarea lui x_1. Fie $x_1'=\max(x_1-p_1, x_2)$, de unde $x_1\geqslant\frac{1}{r}(1-p_1)$. Dar $p_2\leqslant\frac{1}{r}(1-p_1)$, deci p_2 poate fi utilizat în reprezentarea lui x_1', deci a unui x_j. Continuînd astfel se vede că toți p_n pot fi utilizați pentru reprezentarea unui x_j oarecare. Deoarece

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n=\sum_{j=1}^{r} x_j=1,$$

am obținut o descompunere a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ în r serii parțiale disjuncte astfel că suma din a j—a serie este x_j. Dacă A_j este compus din elementele ω_n ale căror probabilități p_n intervin în x_j, mulțimea A_j are proprietatea cerută.

2° este caz particular al lui 3° pentru $r=2$.

3. O algebră de probabilitate (după Kolmogorov) $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ se spune că este neatomică dacă oricare ar fi evenimentul $A\in\mathcal{K}$ cu $P(A)>0$, există un eveniment $B\subseteq A$ astfel că $0<P(B)<P(A)$. Să se arate că pentru o algebră de probabilitate neatomică, mulțimea valorilor lui $P(A)$ ($A\in\mathcal{K}$) este segmentul $[0, 1]$.

R. Să arătăm că pentru orice $\varepsilon>0$ se poate obține o partiție a lui Ω în mulțimi A_j ($A_j\in\mathcal{K}; j=1, \ldots, m$) cu $P(A_j)\leqslant\varepsilon$ și anume: orice parte $A\in\mathcal{K}$ din Ω cu $P(A)>0$ conține o mulțime B cu $0<P(B)\leqslant\varepsilon$. Dacă $P(A)\leqslant\varepsilon$, se ia $A=B$; dacă $P(A)>\varepsilon$,

se poate găsi (deoarece P este neatomic) un $B \subseteq A$ cu $B \in \mathcal{K}$ și $0 < P(B) < P(A)$; unul din $P(B)$ și $P(A-B)$ este cel mult egal cu $\frac{P(A)}{2}$. Dacă $\frac{P(A)}{2} \leqslant \varepsilon$, demonstrația este terminată iar dacă $\frac{P(A)}{2} > \varepsilon$ o continuăm. Cum pentru un întreg r destul de mare avem $\frac{P(A)}{2^r} \leqslant \varepsilon$, obținem, într-un număr finit de etape un B cu $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{A}$ și $0 < P(B) \leqslant \varepsilon$. Se ia

$$\mu_\varepsilon(A) = \sup_{B \subseteq A,\ P(B) \leqslant \varepsilon} P(B), \text{ pentru } A \in \mathcal{K},$$

și $\mu_\varepsilon(A)$ este pozitiv pentru $P(A) > 0$. Alegem apoi un $A_1 \in \mathcal{K}$ cu $0 < P(A_1) \leqslant \varepsilon$, apoi un $A_2 \subseteq \overline{A_1}$ cu

$$\varepsilon \geqslant P(A_2) \geqslant \frac{1}{2}\mu_\varepsilon(\overline{A_1}),$$

apoi un $A_3 \subseteq \overline{A_1 + A_2}$ cu $\varepsilon \geqslant P(A_3) \geqslant \frac{1}{2}\mu_\varepsilon(\overline{A_1 + A_2})$. În general, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ fiind deja aleși, alegem un A_{n+1} astfel ca

$$A_{n+1} \subseteq \overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}$$

cu

$$\varepsilon \geqslant P(A_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2}\mu_\varepsilon(\overline{A_1 + A_2 + \cdots A_n}).$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt disjuncte, deci $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leqslant 1$ și în consecință $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$ și de asemenea

$$\lim_{n\to\infty} \mu_\varepsilon(\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}) = 0.$$

Dacă luăm $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = B$, cum $\mu_\varepsilon(A)$ este o funcție monotonă, $\mu_\varepsilon(\overline{B}) = 0$, rezultă deci că $P(\overline{B}) = 0$. Punînd $A_1' = A_1 + \overline{B}$, avem

$$A_1' + \sum_{n=2}^{\infty} A_n = \Omega \text{ și } 0 < P(A_n) \leqslant \varepsilon,\ (n = 2, 3, \ldots),\ 0 \leqslant P(A_1') \leqslant \varepsilon.$$

Alegem apoi un N suficient de mare pentru ca $\sum_{n=N}^{\infty} P(A_n) \leqslant \varepsilon$. Mulțimile $A_1', A_2, \ldots, A_{N-1}$ și $A_N' = \sum_{n=N}^{\infty} A_n$ au proprietatea cerută.

Fie $0<x<1$, atunci putem construi un $A\in\mathcal{K}$ cu $P(A)=x$. Descompunem apoi Ω în N_1 părți disjuncte A_{1j} astfel ca

$$0\leqslant P(A_{1j})\leqslant\frac{x}{2},\quad (j=1, 2, \ldots, N_1).$$

Fie $x_{1,r}=P\left(\sum_{j=1}^{r}A_{1j}\right)$; x aparținînd unuia din intervalele $[x_{1,r}, x_{1,r+1}]$, $(r=1, 2, \ldots, N_1-1)$. Fie $[x_{1,r_1}, x_{1,r_1+1}]$ acest interval. Dacă $x=x_{1,r_1}$, construcția noastră este terminată. Dacă $x_{1,r_1}<x<x_{1,r_1+1}$, descompunem A_{1,r_1+1} în mulțimile A_{2j}, $(j=1, 2, \ldots, H)$ astfel ca

$$0\leqslant P(A_{2j})\leqslant\frac{x-x_{1,r_1}}{2}.$$

Fie

$$x_{2,r}=P\left(\sum_{j=1}^{r_1}A_{1j}+\sum_{j=1}^{r_2}A_{2j}\right),\qquad (r_2=1, 2, \ldots, N_2),$$

x aparținînd unuia din intervalele $[x_{2,r}, x_{2,r+2}]$ și fie $[x_{2,r_2}, x_{2,r_2+1}]$ acest interval. Continuînd astfel obținem mulțimea

$$A=\sum_{j=1}^{r_1}A_{1j}+\sum_{j=1}^{r_2}A_{2j}+\cdots+\sum_{j=1}^{r_s}A_{sj}+\cdots$$

cu $P(A)=x$.

4. O urnă conține 50 de bile dintre care 10 sînt negre iar restul albe. Se scot la întîmplare 5 bile. Care este probabilitatea ca între cele cinci bile extrase să fie bile negre?

R. Evenimentele „toate cele cinci bile sînt albe" și „între cele 5 bile cel puțin una este neagră" sînt evenimente complementare. Probabilitatea ca să se scoată cinci bile albe este

$$\frac{C_{40}^5}{C_{50}^5}$$

de unde probabilitatea cerută:

$$1-\frac{C_{40}^5}{C_{50}^5}=0{,}68944.$$

5. O urnă conține 36 bile albe și 12 bile negre. O persoană scoate bilele una cîte una pînă cînd obține 10 bile albe. Să se determine valoarea medie a numărului de bile negre extrase.

Scanned with OKEN Scanner

R. Sîntem în cazul schemei bilei neîntoarse. Probabilitatea de a scoate 10 bile albe și k bile negre este

$$p=\frac{C_{36}^{10}\cdot C_{12}^{k}}{C_{48}^{10+k}}.$$

Valoarea medie a numărului de bile negre extrase este

$$E=C_{36}^{10}\sum_{k=0}^{12} k\,\frac{C_{12}^{k}}{C_{48}^{10+k}}.$$

6. Să se determine probabilitatea ca ultimele două cifre ale cubului unui număr N luat la întîmplare (prin număr luat la întîmplare se înțelege aici un număr $k>1$, pentru care fiecare cifră este una dintre cifrele 0, 1, ..., 9) să fie egale cu 1.

R. Scriem numărul N sub forma

$$N=a+10\,b+\cdots$$

unde a, b, ... sînt numere oarecare, care pot lua una dintre valorile 0, 1, ..., 9.

Atunci

$$N^3=a^3+30\,a^2b+\cdots.$$

Rezultă deci că asupra ultimelor două cifre ale lui N^3 influențează numai a și b. De aceea numărul valorilor posibile este $n=100$.

Pentru ca ultima cifră a lui N^3 să fie 1, se ia ca valoare favorabilă $a=1$. Apoi trebuie să fie 1 și ultima cifră a lui

$$\frac{N^3-1}{10},$$

adică este necesar ca produsul $3\,b$ să se termine cu 1. Aceasta are loc pentru $b=7$.

În acest mod rezultă o singură valoare favorabilă $a=1$, $b=7$, deci probabilitatea cerută este

$$p=\frac{1}{100}=0{,}01.$$

7. O urnă conține N bile, dintre care M bile negre și $N-M$ bile albe. Se fac extrageri fără a se repune bilele în urnă (schema bilei neîntoarse).

1° Se fac k extrageri. Care este probabilitatea ca în extracția de rang k să se obțină pentru prima dată o bilă neagră?

2° Se extrag n bile. Care este probabilitatea ca între cele n bile extrase k să fie negre și $n-k$ albe?

R. 1° Primele $k-1$ bile pot fi alese dintre cele $N-M$ bile albe în C_{N-M}^{k-1} moduri și se pot ordona în $(k-1)!$ moduri. Pentru bila neagră care apare în locul k avem M alegeri posibile și celelalte locuri pot fi ocupate în $(N-k)!$ moduri.

Deci probabilitatea cerută este

$$P_k = \frac{1}{N!} \cdot C_{N-M}^{k-1} \cdot (k-1)!\, M \cdot (N-k)!$$

sau

$$P_k = \frac{M}{N-k+1} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{M}{N-j+1}\right).$$

Dacă N și M sînt mari în raport cu k și dacă notăm $p = \frac{M}{N}$, $(0<p<1)$, obținem pentru P_k valoarea apropiată

$$P_k \approx (1-p)^{k-1} \cdot p = \pi_k.$$

În sfîrșit, dacă N și M tind către infinit astfel ca p să rămînă constant, $P_k \to \pi_k$.

2° Numărul cazurilor posibile este C_N^n, iar numărul cazurilor favorabile $C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}$. Notînd cu P_k probabilitatea ca dintre cele n bile extrase k bile să fie negre, avem

$$P_k = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

8. Evenimentul A constă în apariția cel puțin o dată a fetei 5, aruncînd un zar de patru ori, și evenimentul B constă în apariția fetei 5 cel puțin de două ori, aruncînd de 18 ori cîte două zaruri. Care din cele două evenimente este mai probabil?.

R. Probabilitatea ca într-o aruncare cu zarul să nu apară fața 5 este $\frac{5}{6}$, iar ca să nu apară fața 5 aruncînd patru zaruri este

$$P(\mathbf{C}A) = \left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

Probabilitatea ca aruncînd un zar de patru ori să apară fața 5 cel puțin o dată este

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

Se poate interpreta apariția fetei 5 a unui zar, ca o urnă cu două stări, una „fața 5" cu $p = \frac{1}{6}$ și alta „non fața 5" cu probabilitatea $q = \frac{5}{6}$. Aruncările sînt independente, deci în loc să aruncăm de două ori cîte 18 zaruri, putem arunca 36 de zaruri o singură dată. După formula urnei, probabilitatea evenimentului $\mathbf{C}B$ ca în 36 de aruncări să obținem sau de zero ori fața 5 sau o dată fața 5 este

$$P(\mathbf{C}B) = \left(\frac{5}{6}\right)^{36} + 36 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{35}.$$

Avem

$$\frac{P(\mathbf{C}B)}{P(\mathbf{C}A)}=\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{35}\cdot\frac{41}{6}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{4}}<7\left(\frac{5}{6}\right)^{31}<1.$$

deci $P(\mathbf{C}B)<P(\mathbf{C}A)$. Dar $P(\mathbf{C}B)=1-P(B)$ și $P(\mathbf{C}A)=1-P(A)$, rezultă că

$$P(A)<P(B).$$

9. Din 100 de piese lucrate la un strung 5 sînt defecte. Se iau la întîmplare 45 de piese.

1° Care este probabilitatea ca să existe între cele 45 de piese o singură piese defectă?

2° Care este probabilitatea ca să existe cel puțin o piesă defectă?

R. 1° Fie A evenimentul care constă în a avea o singură piesă defectă din 45. Avem

$$P(A)=\frac{C_5^1\,C_{95}^{44}}{C_{100}^{45}}.$$

2° Notăm cu B evenimentul ca să avem cel puțin o piesă defectă. Numărul de cazuri favorabile este

$$C_5^1\cdot C_{95}^{44}+\cdot C_5^2\cdot C_{95}^{43}+C_5^3\cdot C_{95}^{42}+C_5^4\cdot C_{95}^{41}+C_5^5\cdot C_{95}^{40}$$

iar numărul cazurilor posibile rămîne C_{100}^{45}. Rezultă

$$P(B)=\frac{C_5^1\cdot C_{95}^{44}+C_5^2\cdot C_{95}^{43}+C_5^3\cdot C_{95}^{42}+C_5^4\cdot C_{95}^{41}+C_5^5\cdot C_{95}^{40}}{C_{100}^{45}}.$$

10. Într-o cameră sînt studenți în primul an, în al doilea an sau în al treilea an de studii. Se iau la întîmplare doi studenți și unul dintre ei declară că este mai mare ca celălalt. Care este probabilitatea ca el să fie din anul III?

R. Notăm cu m, n, l numărul studenților din anul I, II și III respectiv. Luînd un student din anul II și unul oarecare, probabilitatea ca primul să fie mai mare este

$$\frac{m}{m+n+l-1},$$

iar probabilitatea ca un student să fie din anul III să fie mai mare ca altul luat la întîmplare este

$$\frac{m+n}{m+n+l-1}.$$

Probabilitățile ca un student să fie din anul II, respectiv III, sînt

$$\frac{n}{m+n+l}, \quad \frac{l}{m+n+l}.$$

Probabilitatea ca studentul cel mai mare dintre cei doi să fie din anul III este

$$\frac{\dfrac{l}{m+n+l}\cdot\dfrac{m+n}{m+n+l-1}}{\dfrac{l}{m+n+l}\cdot\dfrac{m+n}{m+n+l-1}+\dfrac{n}{m+n+l}\cdot\dfrac{m}{m+n+l-1}}=\frac{l(m+n)}{l(m+n)+mn}.$$

11. Se dau n urne $U_1, U_2, \ldots, U_n$, astfel încît urna U_i să conțină a_i bile albe și b_i bile negre. Se extrage o bilă din urna U_1 și dacă ea este neagră, se mai extrage o bilă din urna U_2 și așa mai departe pînă extragem o bilă albă. Care este probabilitatea de a extrage o bilă albă dacă se fac cel mult k $(k<n)$ extracții?

R. Fie A_i evenimentul care constă în a extrage o bilă albă din urna U_i și B_i evenimentul care constă din extragerea unei bile negre din aceeași urnă. Avem

$$P(A_i)=\frac{a_i}{a_i+b_i}, \quad P(B_i)=\frac{b_i}{a_i+b_i}.$$

Notăm cu E_k evenimentul care constă în extragerea unei bile albe în cel mult k extracții conform condițiilor problemei. Bila albă poate fi extrasă din U_1 și deci se realizează A_1, sau la a doua extracție din U_2 dacă din U_1 s-a extras o bilă neagră și deci se realizează evenimentul $A_2 \cap B_1$, fie din U_3 dacă din U_1 și U_2 s-au extras bile negre, deci se realizează evenimentul $A_3 \cap B_1 \cap B_2$ s.a.m.d. Rezultă

$$E_k=A_1 \cup (A_2 \cap B_1) \cup (A_3 \cap B_1 \cap B_2) \cup \cdots \cup (A_k \cap B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1})$$

și

$$P(E_k)=P(A_1)+P(A_2 \cap B_1)+P(A_3 \cap B_1 \cap B_2)+\cdots+P(A_k \cap B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1}).$$

Evenimentele A_i și B_i sînt independente, deci

$$P(E_k)=\frac{a_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2}{a_2+b_2}\cdot\frac{b_1}{a_1+b_1}+\frac{a_3}{a_3+b_3}\cdot\frac{b_2}{a_2+b_2}\cdot\frac{b_1}{a_1+b_1}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{a_k}{a_k+b_k}\cdot\frac{b_{k-1}}{a_{k-1}+b_{k-1}}\cdot\frac{b_{k-2}}{a_{k-2}+b_{k-2}}\cdots\frac{b_1}{a_1+b_1}.$$

12. Cineva a scris n scrisori, le-a închis în plicuri și apoi a scris la întîmplare pe fiecare din ele diferite adrese. Să se determine probabilitatea ca cel puțin pe un plic să fie adresa exactă.

Scanned with OKEN Scanner

R. Numerotăm scrisorile de la 1 la n și notăm cu A_k evenimentul că pe plicul k s-a scris adresa exactă.

Evenimentul A „cel puțin un plic are adresa exactă" este

$$A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

evenimentele A_i $(i=1, \ldots, n)$ fiind compatibile. Avem

$$P(A)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} P(A_i\cap A_j)+\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} P(A_i\cap A_j\cap A_k)+$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Dacă pe k plicuri s-a scris adresa exactă, pe celelalte $n-k$ adresele se pot scrie în $(n-k)!$ moduri. Avem

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})=\frac{(n-k)!}{n!}.$$

Scrierea adreselor pe plicuri este egal probabilă, deci

$$\sum_{\substack{i_1,i_2,\cdots,i_k=1\\ i_1<i_2<\cdots<i_k}}^{n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})=C_n^k\frac{(n-k)!}{n!}.$$

Rezultă

$$P(A)=C_n^1\frac{(n-1)!}{n!}-C_n^2\frac{(n-2)!}{n!}+C_n^3\frac{(n-3)!}{n!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=$$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

Pentru n foarte mare

$$P\approx 1-\frac{1}{e}.$$

13. Fie $\{A\}$ și $\{B_i\}$ două familii numărabile de evenimente. Dacă A_1 și B_1 sînt independente și pentru orice $i>0$, $\mathbf{C}A_1\cap\mathbf{C}A_2\cap\cdots\cap\mathbf{C}A_{j-1}\cap A_j$ și B_j sînt independente, să se arate că

$$P(\cup(A_i\cap B_i))\geqslant\alpha P(\cup A_i),$$

unde $\alpha=\inf_i P(B_i)$.

R. Dacă clasa A_i este disjunctă, inegalitatea rezultă imediat deoarece pentru orice i, A_i și B_i sînt independente și deci

$$P(\cup(A_i \cap B_i)) = \Sigma P(A_i)\, P(B_i) \geqslant \alpha \Sigma P(A_i) = \alpha P(\cup A_i).$$

În cazul general avem

$$P(\cup(A_i \cap B_i)) = P(A_i \cap B_i) + P(\mathbf{C}(A_i \cap B_i) \cap A_2 \cap B_2) +$$
$$+ P(\mathbf{C}(A_1 \cap B_1) \cap \mathbf{C}(A_2 \cap B_2) \cap A_3 \cap B_3) + \cdots \geqslant P(A_1 \cap B_1) + P(\mathbf{C}A_1 \cap A_2 \cap B_2) +$$
$$+ P(\mathbf{C}A_1 \cap \mathbf{C}A_2 \cap A_3 \cap B_3) + \cdots \geqslant P(A_1) \cdot P(B_1) + P(\mathbf{C}A_1 \cap A_2) \cdot P(B_2) +$$
$$+ P(\mathbf{C}A_1 \cap \mathbf{C}A_2 \cap A_3) \cdot P(B_3) + \cdots \geqslant P(A_1) + P(\mathbf{C}A_1 \cap A_2) + P(\mathbf{C}A_1 \cap \mathbf{C}A_2 \cap A_3) + \cdots =$$
$$= \alpha P(\cup A_i),$$

deci

$$P(\cup(A_i \cap B_i)) \geqslant \alpha P(\cup A_i).$$

14. Fiind date evenimentele compatibile $A_1, A_2, \ldots, A_n$, să se determine:

a) probabilitatea ca să se verifice numai un eveniment;

b) probabilitatea ca să se verifice r evenimente din n.

R. a) Ne este indiferent care din cele n evenimente se verifică. Să presupunem că se verifică evenimentul A_1. Avem

$$p_1' = P(A_1 \cap \mathbf{C}A_2 \cap \mathbf{C}A_3 \cap \cdots \cap \mathbf{C}A_n) = P\left(\left(A_1 \cap \left(\bigcap_{j=2}^{n} \mathbf{C}A_j\right)\right)\right).$$

Evenimentul A_1 se poate exprima astfel:

$$A_1 = A_1 \cap \Omega = A_1 \cap \left[\left(\bigcap_{j=2}^{n} \mathbf{C}A_j\right) \cup \mathbf{C}\left(\bigcap_{j=2}^{n} \mathbf{C}A_j\right)\right] =$$

$$= \left[A_i \cap \left(\bigcap_{j=2}^{n} \mathbf{C}A_j\right)\right] \cup \left[A_1 \cap \left(\bigcup_{j=2}^{n} A_j\right)\right].$$

Obținem

$$P(A_1) = p_1 = P\left[A_1 \cap \left(\bigcap_{j=2}^{n} \mathbf{C}A_j\right)\right] + P\left[A_1 \cap \left(\bigcup_{j=2}^{n} A_j\right)\right] = p_1' + P\left[\bigcup_{j=2}^{n} (A_1 \cap A_j)\right] =$$

$$= p_1' + \sum_{j=2}^{n} P(A_1 \cap A_j) - \sum_{j,k=2}^{n} P(A_1 \cap A_j \cap A_k) +$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-2} \sum_{\substack{j_2, j_3, \ldots, j_n \\ j_2 < j_3 < \cdots < j_n}} P(A_1 \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_n}) =$$

$$= p_1' + \sum_{j=2}^{n} p_{1j} - \sum_{\substack{j,k=2 \\ j<k}}^{n} p_{1jk} + \cdots + (-1)^{n-2} p_{12\ldots n},$$

de unde rezultă

$$p_1' = p_1 - \sum_{j=2}^{n} p_{1j} + \sum_{\substack{j,k=2 \\ j<k}}^{n} p_{1jk} + \cdots + (-1)^{n-1} p_{12\ldots n}.$$

În mod analog se obține

$$p_i' = p_i - \sum_{j\neq i}^{n} p_{ij} + \sum_{\substack{j,k\neq i \\ j<k}}^{n} p_{ijk} + \cdots + (-1)^{n-1} p_{12\ldots n}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Probabilitatea ca să se verifice un singur eveniment dintre $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se obține sumînd relația de mai sus:

$$P^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} p_i - 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} p_{ij} + 3 \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} p_{ijk} + \cdots + (-1)^{n-1} n \cdot p_{1\cdot 2\ldots n}.$$

b) Vom determina probabilitatea ca să se verifice evenimentele A_1 și A_2. Se obține

$$p_{12}' = P(A_1 \cap A_2 \cap \mathbf{C}A_3 \cap \cdots \cap \mathbf{C}A_n) = P\left(A_1 \cap A_2 \cap \left(\bigcap_{j=3}^{n} \mathbf{C}\, A_j\right)\right)$$

și

$$p_{12} = P(A_1 \cap A_2) = P\left(A_1 \cap A_2 \cap \left(\bigcap_{j=3}^{n} \mathbf{C}\, A_j\right)\right) + P\left(A_1 \cap A_2 \cap \left(\bigcup_{j=3}^{n} A_j\right)\right) =$$

$$= p_{12}' + \sum_{j=3}^{n} p_{12j} - \sum_{\substack{j,k=3 \\ j<k}}^{n} p_{12jk} + \cdots + (-1)^{n-3} p_{1\cdot 2\ldots n},$$

de unde rezultă

$$p_{12}' = p_{12} - \sum_{j=3}^{n} p_{12j} + \sum_{\substack{j,k=3 \\ j<k}}^{n} p_{12jk} + \cdots + (-1)^{n-2} p_{1\cdot 2\ldots n}.$$

În mod analog putem obține p_{ij}'.

Probabilitatea ca să se verifice numai două din cele n evenimente (oricare din ele) va fi

$$P^{(2)} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} p_{ij}' = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} p_{ij} - C_3^2 \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} p_{ijk} + \cdots + (-1)^{n-2} C_n^2 p_{12\ldots n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Repetînd raționamentul, obținem probabilitatea ca să se verifice r evenimente (oricare) din cele n

$$P^{(r)} = \sum_{\substack{i_1, i_2, \cdots, i_r = 1 \\ i_1 < i_2 \cdots < i_r}}^{n} p'_{i_1 i_2 \cdots i_r} = \sum_{\substack{i_1, \cdots, i_r = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_r}}^{n} p_{i_1 i_2 \cdots i_r} - C_{r+1}^{r} \sum_{\substack{i_1, \cdots, i_{r+1} = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_{r+1}}}^{n} p_{i_1 i_2 \cdots i_{r+1}} +$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-r} C_n^r p_{12 \cdots n}.$$

15. La fiecare încercare probabilitatea apariției unui eveniment este egală cu p. Cu ce probabilitate are loc evenimentul de un număr par de ori în n încercări?

R. Fie p_k probabilitatea ca după k încercări evenimentul să aibă loc de un număr par de ori. Înaintea încercării cu numărul k putem avea următoarele situații:

La a $(k-1)$-a încercare evenimentul a avut loc de un număr par sau impar de ori cu probabilitățile p_{k-1} și $1-p_{k-1}$. Rezultă

$$p_k = p_{k-1}(1-p) + (1-p_{k-1})p$$

sau

$$p_k = p + p_{k-1}(1-2p).$$

Punem ultima expresie sub forma

$$p_k - \frac{1}{2} = (1-2p)\left(p_{k-1} - \frac{1}{2}\right), \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

și facem produsul acestor egalități:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(p_k - \frac{1}{2}\right) = (1-2p)^n \prod_{k=1}^{n}\left(p_{k-1} - \frac{1}{2}\right),$$

de unde se obține

$$p_n - \frac{1}{2} = (1-2p)^n\left(p_0 - \frac{1}{2}\right).$$

Dar $p_0 = 1$, deci

$$p_n = \frac{1}{2}[1 + (1-2p)^n].$$

16. Se dau șase urne cu următoarele structuri:
(S_1) două urne care conțin cîte 2 bile albe și 6 negre,
(S_2) trei urne care conțin cîte 3 bile albe și 5 negre;
(S_3) o urnă care conține 6 bile albe și 2 negre.
Se extrage la întîmplare o bilă dintr-o urnă. Se cere:
1° Care este probabilitatea de a extrage o bilă neagră?
2° Presupunînd că dintr-o urnă oarecare s-a extras o bilă neagră, care este probabilitatea ca ea să aparțină uneia din structurile S_1, S_2 sau S_3?

R. Fie A evenimentul care constă în extragerea unei bile negre. Avem

$$A=(S_1\cap A)\cup(S_2\cap A)\cup(S_3\cap A),$$

de unde rezultă

$$P(A)=P(S_1\cap A)+P(S_2\cap A)+P(S_3\cap A)$$

sau

$$P(A)=P(S_1)P_{S_1}(A)+P(S_2)P_{S_2}(A)+P(S_3)\cdot P_{S_3}(A).$$

Avem

$$P(S_1)=\frac{2}{6},\ P(S_2)=\frac{3}{6},\ P(S_3)=\frac{1}{6}$$

și

$$P_{S_1}(A)=\frac{6}{8},\ P_{S_2}(A)=\frac{5}{8},\ P_{S_3}(A)=\frac{2}{8},$$

de unde rezultă

$$P(A)=\frac{2}{6}\cdot\frac{6}{8}+\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{8}=\frac{29}{48}.$$

2° Se aplică formula Bayes

$$P_A(S_1)=\frac{P(S_1)P_{S_1}(A)}{P(A)}=\frac{12}{29};$$

$$P_A(S_2)=\frac{P(S_2)P_{S_2}(A)}{P(A)}=\frac{15}{29};$$

$$P_A(S_3)=\frac{P(S_3)P_{S_3}(A)}{P(A)}=\frac{2}{29}.$$

17. Pentru n persoane se extrag la întîmplare $m\leqslant n$ lozuri dintr-o urnă cu n lozuri. Sînt egale șansele de cîștig pentru oricare jucător? Cînd este mai avantajos să extragi un loz?

R. Fie A_k evenimentul care constă în extragerea unui loz cîștigător după k lozuri extrase din urnă. După rezultatele încercărilor precedente se pot face $k+1$ ipoteze. Fie H_{ks} ipoteza ca din k lozuri extrase s să fie cîștigătoare. Avem

$$P(H_{ks})=\frac{C_m^s C_{n-m}^{k-s}}{C_n^k},\qquad (s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

și

$$P(H_{ks})=0 \text{ dacă } s>m.$$

Au rămas $n-k$ lozuri din care $m-s$ sînt cîștigătoare cu $m\geqslant s$;

$$P(A_k\mid H_{ks})=\frac{m-s}{n-k}.$$

După formula probabilității totale găsim

$$P(A_k)=\sum_{s=0}^{k}\frac{C_m^s C_{n-m}^{k-s}}{C_n^k}\cdot\frac{m-s}{n-k},\quad \text{cu } C_m^s=0 \text{ pentru } s>m,$$

sau

$$P(A_k)=\frac{m}{n}\sum_{s=0}^{k}\frac{C_{m-1}^s C_{n-m}^{k-s}}{C_{n-1}^k}.$$

Avem

$$\sum_{s=0}^{k}C_{m-1}^s C_{n-m}^{k-s}u^{n-k-1}=\frac{1}{k!}\sum_{s=0}^{k}C_k^s\frac{\mathrm{d}^s u^{m-1}}{\mathrm{d}u^s}\cdot\frac{\mathrm{d}^{k-s}u^{n-m}}{\mathrm{d}u^{k-s}}=$$

$$=\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}u^k}\left(u^{m-1}-u^{n-m}\right)=\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}u^k}\left(u^{n-1}\right)=C_{n-1}^k u^{n-k-1},$$

de unde rezultă că

$$\sum_{s=0}^{k}C_{m-1}^s C_{n-m}^{k-s}=C_{n-1}^k.$$

Pentru orice k

$$P(A_k)=\frac{m}{n}.$$

Rezultă că șansele tuturor jucătorilor sînt egale și succesiunea extragerilor nu are importanță.

18. O informație telegrafică constă din semnale „liniuțe" și „puncte". În medie se deformează $\frac{2}{5}$ din semnalele cu „puncte" și $\frac{1}{3}$ din cele cu „liniuțe". Este cunoscut că semnalele „puncte" și „liniuțe" se întîlnesc în raportul $\frac{5}{3}$.

Să se determine probabilitatea ca:
a) primind un semnal consacrat, acesta să fie „punct" și
b) probabilitatea ca el să fie „liniuță".

R. Notăm prin A evenimentul de primire a semnalului „punct" iar prin B evenimentul de primire a semnalului „liniuță".

Se pot considera următoarele ipoteze: H_1 — este transmis semnalul „punct" și H_2 — este transmis semnalul „liniuță".

Avem

$$\frac{P(H_1)}{P(H_2)}=\frac{5}{3},\quad P(H_1)+P(H_2)=1,$$

deci

$$P(H_1)=\frac{5}{8},\quad P(H_2)=\frac{3}{8}$$

și

$$P(A\mid H_1)=\frac{3}{5},\quad P(A\mid H_2)=\frac{1}{3},\quad P(B\mid H_1)=\frac{2}{5},\quad P(B\mid H_2)=\frac{2}{3}.$$

După formula probabilității totale avem

$$P(A)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.$$

Avem pentru cele două probabilități:

$$\text{a)}\quad P(H_1\mid A)=\frac{P(H_1)P(A\mid H_1)}{P(A)}=\frac{3}{4},$$

$$\text{b)}\quad P(H_2\mid B)=\frac{P(H_2)P(B\mid H_2)}{P(B)}=\frac{1}{2}.$$

19. Se împart la întîmplare r cărți la n persoane. Care este probabilitatea ca m persoane să nu ia nici o carte $(0<m<n)$?

R. Numerotăm persoanele de la 1 la n și fie A_k evenimentul ca persoana k să nu primească nici o carte $(k=1, 2, \ldots, n)$. Notăm

$$p_i=P(A_i),\quad p_{ij}=P(A_i\cap A_j),\quad p_{ijk}=P(A_i\cap A_j\cap A_k)\ \text{etc.}$$

În funcție de numărul cazurilor favorabile și al celor posibile avem

$$p_i=P(A_i)=\frac{(n-1)^r}{n^r}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^r,\quad i=1, 2, \ldots, n;$$

$$p_{ij}=P(A_i\cap A_j)=\frac{(n-2)^r}{n^r}=\left(1-\frac{2}{n}\right)^r,\quad i, j=1, 2, \ldots, n;\ i<j$$

. . . . . .

$$p_{ij\ldots\nu}=P(A_i\cap A_j\cap\cdots\cap A_\nu)=\frac{(n-\nu)^r}{n^r}=\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^r;\quad \nu\leqslant n.$$

Notăm cu $p_m(r, n)$ probabilitatea ca m persoane să nu primească nici o carte, $p_0(r, n)$ va fi probabilitatea ca toate persoanele să aibă cărți și ea va fi

$$p_0(r, n)=1-S_1+S_2+\cdots+(-1)^{n-1}S_n,$$

unde

$$S_\nu=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_\nu}P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_\nu})=\sum_{i_1<\cdots<i_\nu}p_{i_1i_2\ldots i_\nu}=C_n^\nu\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^r$$

Rezultă

$$p_0(r, n)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}C_n^{\nu}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^r$$

și

$$p_m(r, n)=C_n^m\left(1-\frac{m}{n}\right)^r p_0(r, n-m)=C_n^m\sum_{\nu=0}^{n-m}(-1)^{\nu}C_{n-m}^{\nu}\left(1-\frac{m+\nu}{n}\right)^r.$$

20. Pe drumul de circulație a mașinilor sînt 4 semafoare. Fiecare din ele permite sau interzice trecerea mașinilor cu probabilitatea $\frac{1}{2}$. Să se construiască poligonul repartizării probabilităților numărului de semafoare întîlnite de mașini pînă la prima oprire.

R. Fie X numărul (aleator) de semafoare întîlnite de mașini pînă la prima oprire. El poate lua valorile

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=3,\ x_5=4.$$

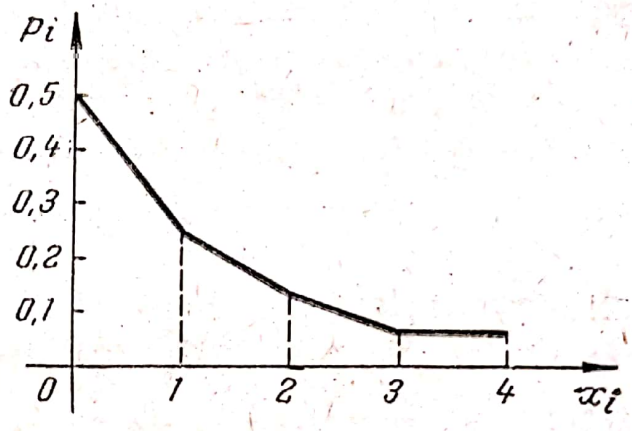


Fig. VIII.20

Notăm $p_i=P(X=x_i)$ și avem

$$p_i=P(X=x_i)=\begin{cases}p(1-p)^{i-1}, & i=1, 2, 3, 4;\\ (1-p)^4, & i=5,\end{cases}$$

unde p este probabilitatea ca semaforul să interzică trecerea mașinii $\left(p=\frac{1}{2}\right)$. Obținem:

$$p_1=0{,}5;\ p_2=0{,}25;\ p_3=0{,}125;\ p_4=0{,}0625;\ p_5=0{,}0625,$$

iar poligonul probabilităților este dat în fig. VIII.20.

Scanned with OKEN Scanner

21. O mașină automată produce două piese pe minut și în producția unui schimb dă 40 piese defecte. Procesul se supune legii Poisson. Să se determine probabilitatea ca din cinci piese cel puțin două să fie defecte.

R. În medie, într-un minut, mașina produce (un schimb are 480 min)

$$a=\frac{40}{480}=\frac{1}{12}\approx 0{,}083 \text{ piese defecte.}$$

Proba de cinci piese la mașină se efectuează în $\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$ min. În acest timp mașina produce

$$\lambda=at=0{,}083\cdot\frac{5}{2}\approx 0{,}207\approx 0{,}2$$

piese defecte. Procesul urmînd o lege Poisson, dacă notăm cu $P_{0,2}(m)$ probabilitatea ca la cinci piese m să fie defecte, avem

$$P_{0,2}(m)=\frac{(0{,}2)^m}{m!}e^{-0.2}.$$

Probabilitatea cerută este

$$p=P_{0,2}(2)+P_{0,2}(3)+P_{0,2}(4)+P_{0,2}(5)\approx 0{,}0175.$$

22. Să se determine timpul de ieșire din funcțiune a unui sistem care conține n lămpi electronice dacă termenul mediu de funcționare a fiecărei lămpi este de τ ore. Probabilitatea de ieșire din funcționare a unei lămpi în funcție de timp este $q(T)$ și se presupune constantă.

R. Se presupune că ieșirea din funcțiune a lămpilor formează evenimente egal probabile, iar lămpile sînt de același tip.

Probabilitatea de ieșire din funcțiune a unei lămpi este

$$P(t)=\int_0^t q(T)\,dt=qt.$$

Cum o lampă are τ ore de funcționare, atunci $q\tau=1$ și deci

$$P(t)=\frac{t}{\tau}.$$

Dacă $P_s(t)$ este probabilitatea de ieșire din funcțiune a sistemului, atunci

$$P_s(t)=\frac{nt}{\tau}.$$

23. Fie $0<p<\frac{1}{2}$; $q=1-p$ și n un întreg astfel că $np=m$, m fiind tot un întreg. Fie A un eveniment de probabilitate p. Să se arate că în n probe independente rezultatele posibile fiind A și $\mathbf{C}A$, probabilitatea ca A să se realizeze cel mult de m ori este mai mare decît probabilitatea ca A să se realizeze mai mult de m ori.

R. Avem de demonstrat inegalitatea

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_n^k p^k q^{n-k} > \sum_{k=m+1}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{1}$$

Notăm

$$B_r = C_n^{m-r} p^{m-r} q^{n-m+r}, \qquad (r=0, 1, \ldots, m),$$

$$C_r = C_n^{m+r} p^{m+r} q^{n-m-r}, \qquad (r=0, 1, \ldots, n-m).$$

Inegalitatea (1) se scrie sub forma

$$\sum_{r=0}^{m} B_r > \sum_{r=0}^{n-m} C_r. \tag{1'}$$

Punînd $\frac{B_r}{C_r} = D_r$, constatăm că

$$\frac{D_{r+1}}{D_r} - 1 = \frac{(p-q)\,(r^2+r-npq)}{(n-m-r)\,(n-m+r+1)\,p^2};$$

$\frac{D_{r+1}}{D_r} - 1$ este deci pozitiv pentru valori mici ale lui r, descreşte cînd r creşte şi este negativ pentru $r \geqslant s$, unde s este un întreg mic astfel ca $s(s+1) > npq$. Dar $D_0 = 1$, $D_1 = \frac{B_1}{C_1} = \frac{npq+q}{npq+p} > 1$, există totdeauna un întreg k astfel ca

$$\frac{B_r}{C_r} \geqslant 1, \text{ pentru } r=0, 1, \ldots, k-1,$$

$$\frac{B_r}{C_r} < 1, \text{ pentru } k \leqslant r \leqslant n-m.$$

Pentru această valoare a lui k avem

$$\sum_{r=0}^{k-1} (k-r-1)\, B_r > \sum_{r=0}^{k-1} (k-r-1)\, C_r \tag{2}$$

și

$$-\sum_{r=k}^{m}(r-k+1)\,B_r > -\sum_{r=k}^{n-m}(r-k+1)\,C_r \tag{3}$$

Din identitatea

$$\sum_{k=0}^{n}(k-m)\,C_n^k p^k q^{n-k}=0$$

rezultă

$$\sum_{r=0}^{m} rB_r = \sum_{r=0}^{n-m} rC_r. \tag{4}$$

Din (2), (3) și (4) obținem

$$(k-1)\sum_{r=0}^{m} B_r > (k-1)\sum_{r=0}^{n-m} C_r.$$

24. Pe una din benzile de magnetofon de lungime de 200 m este imprimată o informație pe un interval de 20 m. Pe alta bandă este imprimată o informație analogă. Să se determine probabilitatea ca în intervalul de la 60 la 85 m să nu fie intervale de bandă neimprimate, dacă începutul ambelor informații este egal posibil în orice punct de la 0 pînă la 180 m.

R. Fie x și y coordonatele originii imprimării cu $x \geqslant y$. Deoarece $0 \leqslant x \leqslant 180$ și $0 \leqslant y \leqslant 180$, domeniul valorilor posibile ale lui x și y reprezintă un triunghi cu catetele de 180 m. Suprafața lui este $S = \frac{1}{2} \cdot 180^2$ m². Pentru a obține o imprimare continuă este necesar ca $x-y \leqslant 20$ m, iar ca intervalul imprimării să nu fie mai mic de 25 m trebuie ca $x-y \geqslant 5$ m (fig. VIII.24). În afară de aceasta pentru obținerea unei imprimări continue pe intervalul de la 60 m pînă la 85 m trebuie ca

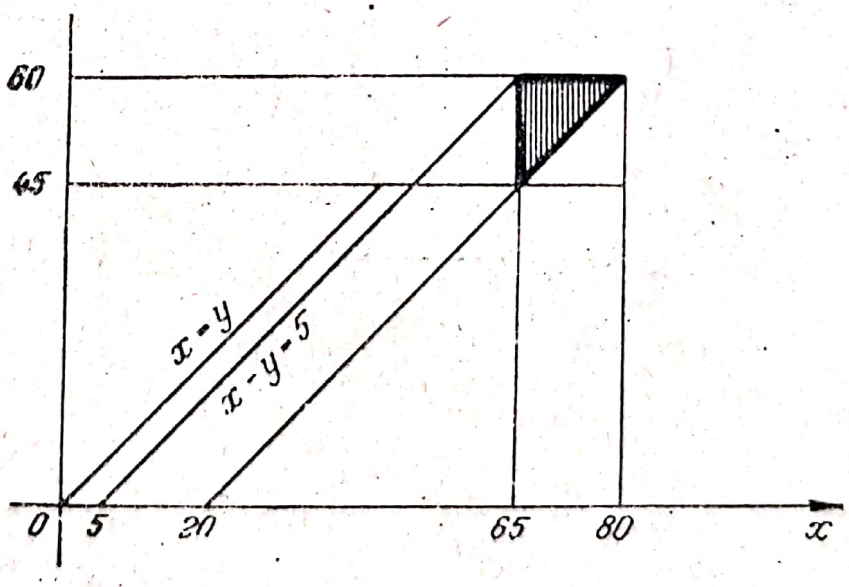


Fig. VIII.24

$$45 \text{ m} \leqslant y \leqslant 60 \text{ m},$$

$$65 \text{ m} \leqslant x \leqslant 80 \text{ m}.$$

Trasînd frontierele domeniului indicat, obținem triunghiul de suprafață $S = \frac{1}{2} \cdot 15 \text{ m}^2$ în care sînt cuprinse valorile favorabile ale lui x și y. Probabilitatea cerută este deci

$$p = \frac{S_F}{S} = \left(\frac{15}{180}\right)^2 = \frac{1}{144}.$$

25. Care este probabilitatea ca suma a două numere pozitive luate la întîmplare să nu depășească unitatea, fiecare din ele nefiind mai mari ca unitatea iar produsul lor să nu fie mai mare ca $\frac{2}{9}$?

R. Fie x și y numerele luate la întîmplare. Valorilor posibile $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ le corespunde în plan pătratul de arie $S = 1$. Valorile favorabile satisfac condițiile

$$x + y \leqslant 1, \quad xy \leqslant \frac{2}{9}.$$

Frontiera $x + y = 1$ împarte pătratul în două părți egale, iar domeniul $x + y \leqslant 1$ reprezintă triunghiul inferior. A doua frontieră $xy = \frac{2}{9}$ reprezintă o hiperbolă, (fig. VIII.25).

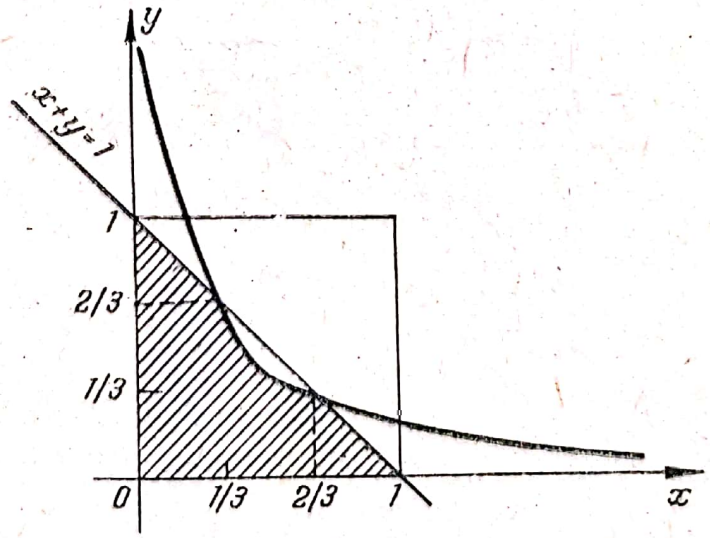


Fig. VIII.25

Mărimea suprafeței favorabile este

$$S_F = \frac{1}{3} + \int_{1/3}^{2/3} y\,dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2.$$

Probabilitatea cerută este

$$p = \frac{S_F}{S} = 0{,}487.$$

26. Pe un segment AB de lungime a se iau la întîmplare două puncte P și Q. Să se determine probabilitatea ca distanța PQ să fie mai mică decît $b\,(b \leqslant a)$.

R. Fie xOy un sistem de coordonate cu originea în A și astfel ca segmentul dat să fie pe axa Ox. Fie $P(x_1, 0)$, $Q(x_2, 0)$. Punctul de coordonate (x_1, x_2) aparține pătratului $ABCD$ (fig. VIII.26). Mulțimea cazurilor posibile este formată, deci, din punctele pătratului $ABCD$.

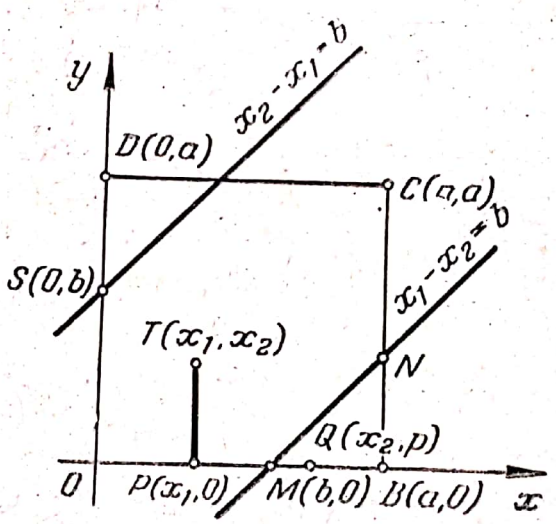


Fig. VIII.26

Mulțimea cazurilor favorabile este formată din punctele, ale căror coordonate verifică condiția $(x_2 - x_1) \leqslant b$, adică din punctele interioare figurii $AMNCRS$.

Avem

$$p = \frac{\text{aria } (AMNCRS)}{\text{aria } (ABCD)} = \frac{a^2 - (a-b)^2}{a^2} = 2\frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2}.$$

27. Se dă funcția

$$f(x) = ax^2 e^{-kx}, \quad (k > 0, \quad 0 \leqslant x < \infty).$$

Se cere:

1° Să se determine a astfel încît $f(x)$ să fie o densitate de repartiție.

2° Să se calculeze funcția de repartiție corespunzătoare.

3° Să se determine probabilitatea ca variabila aleatoare ξ să fie cuprinsă în intervalul $\left(0, \frac{1}{k}\right)$.

R. Pentru ca $f(x)$ să fie densitatea unei repartiții, trebuie ca

$$\int_0^\infty ax^2 e^{-kx}\,dx = 1.$$

Integrînd de două ori prin părți, obținem

$$a\int_0^\infty x^2 e^{-kx}\,dx = \frac{2a}{k^3},$$

de unde rezultă

$$a = \frac{k^3}{2} \quad \text{și} \quad f(x) = \frac{k^3}{2} x^2 e^{-kx}.$$

2° Avem

$$F(x) = \int_0^x \frac{k^3}{2} u^2 e^{-ku}\,du = 1 - \frac{k^2x^2 + 2kx + 2}{2} e^{-kx}.$$

3° $P\left(0 < \xi < \frac{1}{k}\right) = F\left(\frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{5}{2e} \approx 0{,}086.$

27 bis. Se dă funcția $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$.

Se cere:

1° Să se determine constanta a astfel ca $f(x)$ să fie o densitate de repartiție;

2° Să se calculeze funcția caracteristică corespunzătoare.

R. 1° Pentru ca $f(x)$ să fie densitatea unei repartiții, trebuie ca

$$a \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 1,$$

de unde obținem

$$a = \frac{1}{\pi}.$$

2° Funcția caracteristică este

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx=e^{-|t|};$$

calculul integralei se face cu ajutorul reziduurilor (vezi cap. II).

28. Să se determine densitatea de repartiție corespunzătoare funcției caracteristice

$$\varphi(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

R. Dezvoltăm funcția $\varphi(t)$ în serie de puteri. Avem

$$\varphi(t)=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{ikt}.$$

Vom determina mai întîi funcția de repartiție știind că

$$F(x)-F(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{itx}}{it}\varphi(t)\,dt.$$

Obținem

$$F(x)-F(0)=\frac{1}{2\pi}e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itk}-e^{it(k-x)}}{it}\,dt=$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\left[\int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{\pi t}\,dt-\int_0^{\infty}\frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\,dt\right];$$

Pentru

$$x>0,\quad \int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{\pi t}\,dt=\frac{1}{2}\quad\text{și}$$

$$F(x)-F(0)=\frac{1}{2}-e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\int_0^{\infty}\frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}-e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{[x]}\frac{\lambda^k}{k!}\int_0^{\infty}\frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\,dt-e^{-\lambda}\sum_{k=[x]+1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\int_0^{\infty}\frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\,dt.$$

Ținînd seama de relațiile

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t\,(k-x)}{\pi t}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k > x \\ -\frac{1}{2}, & k < x \end{cases}; \quad 1 = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=[x]+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!},$$

obținem

$$F(x) - F(0) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Am obținut funcția de repartiție a unei variabile Poisson care în punctul k are masa $e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$.

29. O particulă se mișcă pe axa Ox. La momentul $t=0$ se află în poziția $X(0)=0$. Vom presupune că t, ca variabilă aleatoare, are repartiție uniformă pe intervalul $0<t<1$ și că particula se deplasează uniform cu viteza v în direcția pozitivă Ox. Să se calculeze funcția de repartiție și densitatea poziției $X(t)$ în momentul arbitrar t, din intervalul $0<t<1$.

R. Considerăm date valorile pentru t și x și fie t_0 momentul cînd particula începe să se miște. În acest caz

$$P(X(t) \leqslant x) = P(v(t-t_0) \leqslant x) = P\left(t_0 \geqslant t - \frac{x}{v}\right).$$

Pentru $x > vt$, $t - \frac{x}{v} < 0$ și $P\left(t_0 \geqslant t - \frac{x}{v}\right) = 1 = P(t_0 \geqslant 0)$.

Dacă $0 \leqslant x \leqslant vt$, cum t are repartiție uniformă, avem

$$P\left(t_0 \geqslant t - \frac{x}{v}\right) = 1 - \left(t - \frac{x}{v}\right) = 1 - t + \frac{x}{v}.$$

Pentru t dat, funcția de repartiție este

$$F(x) = \begin{cases} 1 - t + \frac{x}{v}, & 0 \leqslant x \leqslant vt, \\ 1, & x > vt. \end{cases}$$

Deci probabilitatea ca în momentul t particula să fie în originea coordonatelor este $1-t$.

Notăm cu $f(x)$ densitatea de repartiție și cu $f_1(x)$ funcția

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant vt,\\ 0, & vt<x,\end{cases}$$

atunci

$$f(x)=(1-t)\,\delta(x)+\frac{f_1(x)}{v},$$

unde $\delta(x)$ este funcția delta (sau impulsul elementar):

$$\delta(x)=0, \quad x\neq 0,$$

$$\int_a^b \delta(x)\mathrm{d}x=1, \quad a<x<b.$$

30. Fie variabilele aleatoare ξ_k $(k=1, \ldots, \nu)$ independente între ele și independente de ν. Dacă funcțiile lor de repartiție sînt $F_k(x)=1-e^{-\lambda x}$ pentru $x\geqslant 0$, să se determine funcția de repartiție a variabilei aleatoare $\eta_\nu=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_\nu$ știind că

$$P(\nu=n)=p_n=C_{n-1}^{k-1}\,p^k q^{n-k}, \quad (n=k, k+1, \ldots).$$

R. Fie variabilele aleatoare

$$\zeta_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n.$$

Dacă notăm cu $G_n(x)$ funcțiile lor de repartiție, avem

$$G_n(x)=\int_0^x \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t.$$

Notînd cu $H_\nu(x)$ funcția de repartiție a variabilei aleatoare η_ν, din teorema probabilității totale rezultă

$$H_k(x)=\sum_{n=k}^{\infty} p_n G_n(x).$$

Deci

$$H_k(x)=\int_0^x \frac{(p\lambda)^k t^{k-1} e^{-p\lambda t}}{(k-1)!}\,\mathrm{d}t.$$

Variabila aleatoare η_ν are deci o distribuție Γ de ordinul k și de parametru $p\lambda$, (vezi Introducere).

31. Fie ξ și η două variabile aleatoare independente avînd aceeași densitate de repartiție

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{e^x+e^{-x}}.$$

Să se calculeze densitatea de repartiție a variabilei aleatoare $\zeta=\xi+\eta$.

R. Densitatea de repartiție este

$$f_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(u)f_\eta(z-u)\,du=\frac{4}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{e^u+e^{-u}}\cdot\frac{1}{e^{z-u}+e^{-(z-u)}}\,du=$$

$$=\frac{4e^z}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2u}}{(1+e^{2u})(e^{2z}+e^{2u})}\,du.$$

Facem schimbarea de variabilă $e^{2u}=v$ și obținem

$$f_\zeta(z)=\frac{2e^z}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{dv}{(1+v)(e^{2z}+v)}=\frac{4ze^z}{\pi^2(e^{2z}-1)};\quad -\infty<z<+\infty.$$

32. Să se determine densitatea de probabilitate a sumei a două variabile aleatoare independente $\zeta=\xi+\eta$, unde ξ este uniform repartizată în intervalul (0, 1) iar η este distribuită Simpson

$$f_\eta(y)=\begin{cases}y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 2-y, & 1\leqslant y\leqslant 2,\\ 0, & y<0,\ y>2.\end{cases}$$

R. Deoarece funcțiile $f_\xi(x)$ și $f_\eta(y)$ sînt diferite de zero numai în intervalele determinate de argumentele lor, este mai comod să determinăm mai întîi funcția de repartiție a variabilei aleatoare ζ. Avem

$$F_\zeta(z)=P(\zeta<z)=\iint_{D_z} f_\xi(x)f_\eta(y)\,dx\,dy,$$

unde D_z este domeniul în interiorul căruia $x+y<z$ și nici una din funcțiile $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$ nu sînt nule (fig. VIII.32). Calculînd integralele avînd în vedere cele trei intervale, găsim

$$F_\zeta(z)=\begin{cases} 0, & z<0, \\ \int\limits_0^z f_\eta(y)\,dy \cdot \int\limits_0^{z-y} f_\xi(x)\,dx = \dfrac{z^3}{6}, & 0\leqslant z\leqslant 1, \\ \int\limits_0^{z-1} dx \int\limits_0^1 y\,dy + \int\limits_0^{z-1} dx \int\limits_1^{z-x} (2-y)\,dy + \int\limits_{x-1}^1 dx \int\limits_0^{z-x} y\,dy = & \\ = z-1+\dfrac{(2-z)^3}{6}-\dfrac{(z-1)^3}{6}, & 1\leqslant z\leqslant 2, \\ 1-\int\limits_{z-1}^2 (2-y)\,dy \int\limits_{z-y}^1 dx = 1-\dfrac{1}{6}(3-z)^3, & 2\leqslant z\leqslant 3, \\ 1, & z>3. \end{cases}$$

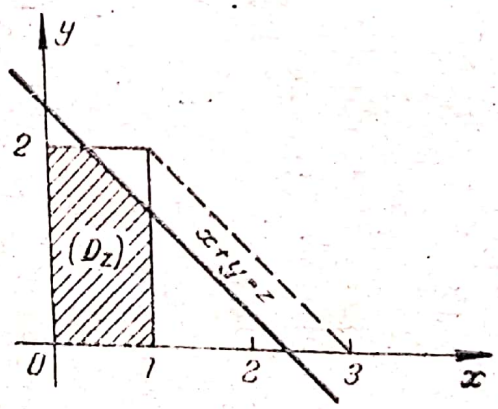


Fig. VIII.32

Derivînd în raport cu z, găsim

$$f_\zeta(z)=\begin{cases} \dfrac{z^2}{2}, & 0\leqslant z\leqslant 1, \\ -z^2+3z-\dfrac{3}{2}, & 1\leqslant z\leqslant 2, \\ \dfrac{1}{2}(z^2-6z+9), & 2\leqslant z\leqslant 3, \\ 0, & z<0,\quad z>3. \end{cases}$$

33. Fie ξ și η două variabile aleatoare independente; ξ avînd o distribuție exponențială de densitate $\lambda e^{-\lambda x}$, $(x>0)$ și η este uniformă în $(0, 2\pi)$. Punînd $\zeta_1=\sqrt{\xi}\cdot\cos\eta$ și $\zeta_2=\sqrt{\xi}\sin\eta$, să se arate că ζ_1 și ζ_2 sînt independente și au aceeași densitate $\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}e^{-\lambda x^2}$.

R. Prin definiție avem

$$P(\zeta_1<u,\ \zeta_2<v)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\substack{\sqrt{x}\cos y<u\\ \sqrt{x}\sin y<v}}\lambda e^{-\lambda x}\,dx\,dy.$$

Facem schimbarea de variabile $\alpha=\sqrt{x}\cos y$, $\beta=\sqrt{x}\sin y$. Avem

$$x=\alpha^2+\beta^2,\quad y=\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha},\quad \frac{D(x,\ y)}{D(\alpha,\ \beta)}=2.$$

$$P(\zeta_1<u,\ \zeta_2<v)=\frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{v}e^{-\lambda(\alpha^2+\beta^2)}d\alpha\,d\beta=$$

$$=\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\int_{-\infty}^{u}e^{-\lambda\alpha^2}d\alpha\cdot\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\int_{-\infty}^{v}e^{-\lambda\beta^2}d\beta=\Phi\left(\sqrt{2\lambda}u\right)\cdot\Phi\left(\sqrt{2\lambda}v\right),$$

unde

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

34. Fie ξ, η, ζ componentele vitezei unei molecule de gaz. Se presupune că aceste componente sînt independente și uniform repartizate în $(-A, +A)$. Să se calculeze densitatea energiei acestei molecule, $f_A(x)$, și să se determine

$$\lim_{A\to+\infty}A^3\cdot f_A(x).$$

R. Fie m masa și ε energia unei molecule. Avem

$$\varepsilon=\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2),$$

deci

$$P(\varepsilon<t)=\frac{1}{8A^3}\iiint\limits_{\frac{m}{2}(x^2+y^2+z^2)<t} dx\,dy\,dz=\frac{\pi}{6A^3}\left(\frac{2t}{m}\right)^{3/2}$$

pentru $\sqrt{\frac{2t}{m}}<A$, deoarece integrala reprezintă volumul unei sfere de rază $\sqrt{2t/m}$.

Deci

$$f_A(t)=\left(\frac{2}{m}\right)^{3/2}\cdot\frac{\pi}{4A^3}\cdot\sqrt{t}\quad\text{pentru}\quad\sqrt{\frac{2t}{m}}<A,$$

de unde rezultă

$$\lim_{A\to+\infty}A^3f_A(t)=c\sqrt{t},\qquad(c=\text{const}).$$

35. Să se determine matricea de varianță și covarianță a unei distribuții gaussiene cu n dimensiuni nedegenerate.

R. Fie variabilele aleatoare $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, a căror densitate cu n dimensiuni este

$$g(y_1, \ldots, y_n)=\left(\frac{|B|}{(2\pi)^n}\right)^{1/2}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}y_iy_j}, \tag{1}$$

unde $|B|$ este determinantul matricei $B=\|b_{ij}\|$. Există variabilele aleatoare gaussiene independente, centrate ξ_k, $(E(\xi_k)=0)$ și o matrice ortogonală $C=\|c_{jk}\|$ astfel că

$$\eta_j=\sum_{k=1}^{n}c_{jk}\xi_k,\quad(j=1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Fie $\sigma_k^2=D^2(\xi_k)$ și S matricea diagonală al cărei element de pe linia k și coloana k este $\frac{1}{\sigma_k^2}$. Între B, S și C avem relația

$$B=CSC^*,$$

C^* fiind transpusa matricei C. Dacă notăm $D_{ij}=E(\eta_i\eta_j)$, avem după (2)

$$D_{ij}=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}c_{jk}\sigma_k^2.$$

Matricea $\|D_{ij}\|=D$ se poate deci pune sub forma $D=CS^{-1}C^*$, unde S^{-1} este matricea inversă a lui S. Deci

$$BD=CSC^*CS^{-1}C^*=I,$$

matrice unitate de ordin n. Matricea covariantă D a distribuției gaussiene este deci inversa matricei B a formei pătratice care figurează la exponentul expresiei (1).

36. Contoarele utilizate pentru studiul razelor cosmice, a radioactivității și a altor fenomene fizice nu înregistrează toate particulele captate de aparat; acesta, după șocul unei particule, rămîne nereceptiv un timp $h>0$ și nu poate înregistra particulele care sosesc în acest timp. Numărul de particule captate este deci inferior numărului de particule care sosesc în realitate. Numim „densitate virtuală a evenimentelor" numărul mediu P de particule înregistrate în unitatea de timp și „densitate reală" numărul mediu p de particule culese efectiv. În ceea ce privește sosirea particulelor, facem ipoteza că probabilitatea de a primi n particule într-un interval de timp este $\frac{1}{n!}(pt)^n e^{-pt}$, $n=(1, 2, \ldots)$.

Se cere:

1° Să se calculeze densitatea virtuală P.

2° Să se calculeze valoarea densității reale care dă o densitate virtuală maximă.

3° Să se calculeze distribuția, valoarea medie și dispersia duratei care separă două șocuri succesive.

4° Dacă intensitatea de radiere este prea mare, se utilizează de obicei pentru ușurarea observației un dispozitiv care nu permite înregistrarea tuturor șocurilor, ci a unui singur șoc, pe k. (În practică k este adesea o putere a lui 2). Să se calculeze densitatea virtuală a evenimentelor în acest caz.

R. 1° Probabilitatea pentru ca o particulă să sosească în intervalul de timp Δt și să fie înregistrată este probabilitatea ca ea să sosească în intervalul de timp considerat și pentru ca nici o particulă să nu fi sosit în intervalul de timp precedent de lungime h este $pe^{-ph}\Delta t$, de unde $P=pe^{-ph}$.

2° Dacă cunoaștem durata de nereceptivitate h și dacă P este determinat prin experiență, se obține pentru p o ecuație transcendentă. Prin diferențiere se găsește că P este maxim pentru $p=\frac{1}{h}$.

3° Presupunem că la momentul 0 un șoc a fost înregistrat și fie $W(t)$ probabilitatea pentru ca să se scurgă cel mult un timp t pînă la următorul șoc înregistrat. Se arată ușor că $W(t)$ satisface ecuația diferențială

$$W'(t)=P(1-W(t-h)), \qquad (t>h) \tag{1}$$

și condiția inițială $W(t)=0$ pentru $0\leqslant t\leqslant h$. Soluția ecuației (1) este

$$W(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}P^k(1-kh)^k}{k!}, \text{ pentru } nh\leqslant t<(n+1)h, \quad n=1, 2, \ldots$$

Tot din (1) obținem

$$1=P\int_0^\infty tW'(t)\,dt.$$

Deci valoarea medie a duratei ce separă două înregistrări este $1/P$. Analog obținem pentru dispersie

$$\sigma^2 = \frac{1-2hP}{P^2}.$$

Se observă că $\sigma = \frac{1}{P} = E$ pentru $h=0$. Pentru $h>0$ avem $\frac{\sigma}{M} < 1$. Fenomenul de nereceptivitate diminuează abaterea medie pătratică.

4° Calculăm mai întîi probabilitatea pentru ca în intervalul de timp $(t, t+\Delta t)$ să fie culeasă o particulă al cărei rang este divizibil cu k. Este clar că probabilitatea acestui eveniment este

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{nk} t^{nk-1} e^{-pt}}{(nk-1)!}\right) \cdot \Delta t + o(\Delta t).$$

Ea depinde de t, deci procesul nu este staționar. Această dependență este slabă cînd timpul care se scurge de la început este mare. Deci

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{nk} t^{nk-1} e^{-pt}}{(nk-1)!} = \frac{p}{k}. \tag{1}$$

Relația (1) rezultă din

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{nk} t^{nk-1} e^{-pt}}{(nk-1)!} = \frac{p}{k} \sum_{r=1}^{k-1} \omega_r e^{pt(\omega_r - 1)}, \tag{2}$$

unde $\omega_r = e^{\frac{2\pi i r}{k}}$, $(r=0, 1, \ldots, k-1)$.

Probabilitatea pentru ca să sosească o particulă, al cărei rang e divizibil cu k în intervalul $(t, t+\Delta t)$ pentru t mare, este aproximativ egală cu $\frac{p}{k}\Delta t$. Densitatea evenimentelor înregistrate este deci p/k.

37. Fie ξ o variabilă aleatoare a cărei funcție de repartiție este $F(x)$. Să se arate că

$$E(H(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\,\mathrm{d}F(x)$$

pentru toate funcțiile boreliene $H(x)$ a căror valoare medie există.

II. Valoarea medie $E(H(\xi))$ nu depinde evident decît de distribuția lui $H(\xi)$, deci de distribuția lui ξ, deoarece, pentru toate mulțimile boreliene B

$$P(H(\xi) \in B) = P(\xi \in H^{-1}(B)),$$

unde $H^{-1}(B)$ este mulțimea tuturor valorilor reale x cu $H(x) \in B$. Deci $E(H(\xi))$ nu depinde de cîmpul de probabilitate $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ pe care este definită variabila aleatoare ξ

considerăm atunci Ω axa reală, $\mathcal{K}$ mulțimea tuturor mulțimilor boreliene din Ω și P măsura Lebesgue-Stieltjes definită prin

$$P(I_{ab}) = F(b) - F(a), \qquad a < b,$$

unde I_{ab} reprezintă un interval oarecare $a \leqslant x < b$. În aceste condiții $\xi(x) = x$, $(-\infty < x < +\infty)$ și

$$E(H(\xi)) = \int_{\Omega} H(\xi)\, dP = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\, dF(x).$$

38. O încercare poate fi reușită cu probabilitatea p și nereușită cu probabilitatea $1-p$. Probabilitatea condiționată de atingere a rezultatului propus după m încercări reușite este

$$P(m) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m, \quad \omega > 1.$$

Să se determine valoarea medie a numărului de încercări independente necesare pentru rezultatul propus.

R. Notăm cu $P_n(A)$ probabilitatea realizării rezultatului propus prin n încercări. Dacă $P_{n,m}$ este probabilitatea de a avea exact m încercări reușite din totalul de n încercări, atunci conform cu formula probabilității totale avem

$$P_n(A) = \sum_{m=0}^{n} P_{n,m} \cdot P(m).$$

Încercările sînt independente și probabilitatea obținerii unui rezultat bun în fiecare încercare este p, atunci

$$P_n(A) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m\right] = 1 - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^m.$$

Pentru realizarea rezultatului propus ne trebuie exact n încercări, dacă la a $n-$a încercare acesta va fi atins. Probabilitatea ultimului eveniment este $P_n(A) - P_{n-1}(A)$, deci valoarea medie a numărului aleator X de încercări necesare pentru realizarea rezultatului propus este

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n[P_n(A) - P_{n-1}(A)] = \sum_{n=1}^{\infty} n\left[\left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^n\right] =$$

$$= \frac{p}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} n\left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^{n-1}.$$

Utilizînd egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1,$$

obținem

$$E(X)=\frac{p}{\omega}\cdot\frac{1}{\left[1-\left(1-\frac{p}{\omega}\right)\right]^2}=\frac{\omega}{p}.$$

39. Un dispozitiv are n siguranțe. În cazul suprasolicitărilor se arde o siguranță și este schimbată cu alta nouă. Să se determine valoarea medie a numărului de suprasolicitări N, după care în dispozitiv sînt schimbate toate siguranțele fixate inițial, dacă ieșirea din aparat în momentul solicitării a uneia din cele n siguranțe este egal probabilă, (siguranța neschimbată este considerată nouă).

R. Fie $E(N/k)$ valoarea medie a numărului de suprasolicitări după care toate cele n siguranțe fixate inițial vor arăta schimbate, dacă au rămas neschimbate k siguranțe.

Dacă au rămas neschimbate k siguranțe ($k\geqslant 1$), atunci pentru deteriorarea uneia din ele, este nevoie de o suprasolicitare următoare. În funcție de rezultatele suprasolicitării următoare vor fi diferite medii ale numărului de suprasolicitări necesare pentru arderea siguranțelor rămase din numărul celor fixate inițial. Deci pentru suprasolicitarea următoare pot interveni două evenimente:

A_1 — a ars una din siguranțele fixate inițial cu $P(A_1)=k/n$;

A_2 — a ars o siguranță schimbată cu $P(A_2)=1-\frac{k}{n}$.

Dacă prin solicitarea următoare intervine A_1, atunci valoarea medie a numărului de solicitări pentru schimbarea tuturor celor k siguranțe neschimbate pînă la solicitarea următoare va fi

$$1+E(N/k-1).$$

Dacă prin solicitarea următoare intervine A_2, avem

$$1+E(N/k).$$

În baza formulei valorii medii totale avem

$$E(N/k)=\frac{k}{n}\left\{1+E(N/k-1)+\left(1-\frac{k}{n}\right)[1+E(N/k)]\right\}=$$

$$=1+\frac{k}{n}E(N/k-1)+\frac{n-k}{n}E(N/k)$$

și după transformări simple

$$E(N/k)-E(N/k-1)=\frac{n}{k}.$$

Dacă $k=1$, adică a rămas numai o siguranță neschimbată, atunci probabilitatea schimbării ei este $1/n$, deci

$$E(N/1)=n.$$

Avem următorul șir de egalități:

$$E(N/n)-E(N/n-1)=\frac{n}{n},$$

$$E(N/n-1)-E(N/n-2)=\frac{n}{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$E(N/3)-E(N/2)=\frac{n}{3},$$

$$E(N/2)-E(N/1)=\frac{n}{2},$$

$$E(N/1)=n,$$

care prin sumare ne dau

$$E(N/n)=\frac{n}{n}+\frac{n}{n-1}+\frac{n}{n-2}+\cdots+\frac{n}{2}+n$$

și

$$E(N)=E(N/n)=n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

40. La explozia unui balon într-un proces de verificare a rezistenței se formează 100 de cioburi care se distribuie în mod egal în conul de

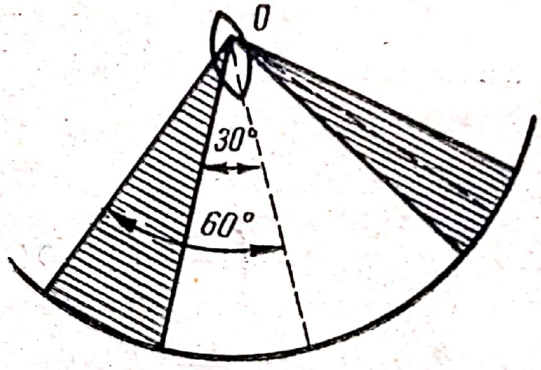


Fig. VIII.40

împrăștiere limitat de unghiurile de 30° și 60° (fig. VIII.40). Să se determine valoarea medie și dispersia numărului de cioburi care se așază pe 1 m² al părții superficiale a sferei interioare conului de împrăștiere, dacă raza sferei este de 50 m, iar centrul ei coincide cu punctul exploziei.

R. Intersectăm conul de împrăştiere a cioburilor cu sfera de rază 50 m şi determinăm valoarea medie a numărului de cioburi răspîndite pe unitatea de arie a zonei de la suprafaţa sferei. Notăm cu S aria zonei superficiale a sferei

$$S=50^2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=2\,500\,\pi\,(\sqrt{3}-1)\approx 5\,725\ \text{m}^2.$$

Numărul total de cioburi este 100; atunci valoarea medie a numărului de cioburi răspîndite pe unitatea de arie a zonei superficiale a sferei va fi

$$a=\frac{N}{S}=\frac{100}{5\,725}=0{,}01745\ \text{cioburi}.$$

Probabilitatea căderii unui ciob dat într-o arie dată $S_0=1$ m^2 este foarte mică: $\frac{S_0}{S}=1{,}75\cdot 10^{-4}$; de aceea putem presupune că numărul aleator de cioburi X care se răspindeşte pe 1 m^2 al suprafeţei sferei este distribuit după legea Poisson şi deci

$$D^2(X)=E(X)=a=0{,}01745.$$

41. Să se determine funcţia caracteristică şi momentele iniţiale ale variabilei aleatoare a cărei densitate de repartiţie este

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\qquad -\infty<x<+\infty.$$

R. Funcţia caracteristică a variabilei aleatoare ξ a cărei densitate de repartiţie este $f(x)$ se defineşte prin egalitatea

$$\varphi(t)=E(e^{it\xi})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}f(x)\,dx,$$

deci

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx-|x|}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{(it-1)x}dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{(it+1)x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-it}-\frac{1}{1+it}\right)=\frac{1}{1+t^2}.$$

Ştim că momentul iniţial de ordinul k, $k\in N$, al variabilei aleatoare ξ este

$$\alpha_k(\xi)=M(\xi^k)=\int_\Omega\xi^k(\omega)\,dP(\omega)=\int_R x^k\,dF(x)$$

și

$$\alpha_k(\xi)=\frac{\varphi_\xi^{(k)}(0)}{i^k}.$$

Avem

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k\varphi(t)}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=0}=\begin{cases}i^k k!, & \text{pentru } k \text{ par},\\ 0, & \text{pentru } k \text{ impar},\end{cases}$$

deci

$$\alpha_k(\xi)=\begin{cases}k!, & \text{pentru } k \text{ par},\\ 0, & \text{pentru } k \text{ impar}.\end{cases}$$

42. Probabilitatea unui eveniment depinde de variabila X și se exprimă prin

$$P(A/x)=\begin{cases}1-e^{-kx}, & \text{pentru } x\geqslant 0,\\ 0, & \text{pentru } x<0,\end{cases}\qquad (k>0).$$

Să se determine probabilitatea totală a evenimentului A dacă X este o variabilă aleatoare distribuită normal cu valoarea medie $\bar{x}$ și dispersia σ^2.

R. Probabilitatea totală a evenimentului A este

$$P(A)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,P(A/x)\mathrm{d}x,$$

unde

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

deci

$$P(A)=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}(1-e^{-kx})\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{\bar{x}}{\sigma}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^\infty e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}-kx}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{\bar{x}}{\sigma}\right)\right]-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-k\left(\bar{x}-\frac{k\sigma^2}{2}\right)}\int_0^\infty e^{\frac{-(x-\bar{x}+k\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\Phi\left(\frac{\bar{x}}{\sigma}\right)-\left[1+\Phi\left(\frac{\bar{x}-k\sigma^2}{\sigma}\right)\right]e^{-k\left(x-\frac{k\sigma^2}{2}\right)}\right\}.$$

43. Ca rezultat al verificărilor un obiect poate fi pus la prima calitate cu probabilitatea p_1 la calitatea a doua cu probabilitatea p_2, sau la rebuturi cu probabilitatea $p_3=1-p_1-p_2$. Se verifică n obiecte. Să se determine distribuţia diferitelor numere de obiecte din prima şi a doua calitate, valoarea lor medie, dispersia şi covarianţa.

R. Fie X şi Y numărul obiectelor din prima şi a doua calitate. Verificările sînt independente, deci probabilitatea ca k obiecte să se afle la prima calitate, s obiecte să fie la calitatea a doua iar $n-k-s$ obiecte rebutate este

$$P(X=k,\ \ Y=s)=\frac{n!}{k!\,s!\,(n-k-s)!}p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s},$$

cu $p_1+p_2+p_3=1$, $(s,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n;\ s+k\leqslant n)$.

Valoarea medie şi dispersia numărului de obiecte din prima calitate sînt

$$E(X)=\bar{x}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-k}\frac{n!}{k!\,s!\,(n-k-s)!}p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s}=$$

$$=p_1\frac{\partial}{\partial p_1}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-k}\frac{n!}{k!\,s!\,(n-k-s)!}p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s}\right]=$$

$$=p_1\frac{\partial}{\partial p_1}(p_1+p_2+p_3)^n=np_1;$$

$$D^2(X)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-k}\frac{k^2\cdot n!}{k!\,s!\,(n-k-s)!}p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s}-\bar{x}^2=$$

$$=p_1\frac{\partial}{\partial p_1}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-k}\frac{k\cdot n!}{k!\,s!\,(n-k-s)!}p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s}\right]-\bar{x}^2=$$

$$=p_1\cdot\frac{\partial}{\partial p_1}[np_1(p_1+p_2+p_3)^{n-1}]-\bar{x}^2=np_1(1-p_1).$$

Analog obţinem

$$E(Y)=np_2,\qquad D^2(Y)=np_2(1-p_2).$$

Covarianţa între numărul obiectelor din prima categorie şi din categoria a doua este

$$E(XY)-E(X)E(Y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-k}ks\frac{n!}{k!\,s!\,(x-k-s)}p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s}-\bar{x}\bar{y}=$$

$$=p_1\frac{\partial}{\partial p_1}\cdot p_2\frac{\partial}{\partial p_2}[(p_1+p_2+p_3)^n]-n^2p_1p_2=p_1\frac{\partial}{\partial p_1}[np_1(p_1+p_2+p_3)^{n-1}]-n^2p_1p_2=$$

$$=n(n-1)p_1p_2-n^2p_1p_2=-np_1p_2.$$

44. Fie (ξ, η) un punct uniform repartizat în domeniul din plan definit prin $|x^2-y^2| \leqslant 1$. Să se determine densitatea condiționată $f(x/y)$.

R. Densitatea lui (ξ, η) este

$$h(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } |x^2-y^2| < 1, \\ 0, & |x^2-y^2| \geqslant 1. \end{cases}$$

Densitatea de probabilitate $f(x)$ a lui ξ este dată de

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y)\,dy.$$

Fie

$$f(x) = \begin{cases} 2\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right), & \text{pentru } |x| > 1 \\ 2\sqrt{x^2+1}, & |x| \leqslant 1. \end{cases}$$

Dacă $g(y)$ este densitatea lui η, atunci

$$g(y) = \begin{cases} 2\left(\sqrt{y^2+1}-\sqrt{y^2-1}\right), & \text{pentru } |y| > 1 \\ 2\sqrt{y^2+1}, & |y| \leqslant 1. \end{cases}$$

Rezultă

$$f(x/y) = \frac{h(x, y)}{g(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\left(\sqrt{y^2+1}-\sqrt{y^2-1}\right)}, & \text{pentru } |y| > 1,\ \sqrt{y^2-1} < |x| < \sqrt{y^2+1}, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y^2+1}}, & \text{pentru } |y| \leqslant 1,\ 0 \leqslant |x| < \sqrt{y^2+1}, \\ 0, & |x| < 0;\quad |x| \geqslant \sqrt{y^2+1}. \end{cases}$$

45. Să se determine valoarea medie a pătratului distanței dintre două puncte luate la întîmplare pe oricare din laturile unui dreptunghi.

R. Prin alegerea punctelor la întîmplare sînt posibile următoarele ipoteze incompatibile:

H_1: punctele sînt alese pe aceeași latură a;
H_2: punctele sînt alese pe aceeași latură b;
H_3: punctele sînt alese pe laturi alăturate ale dreptunghiului;
H_4: punctele sînt alese pe laturile opuse a;
H_5: punctele sînt alese pe laturile opuse b.

Avem

$$P(H_1) = 2\left(\frac{a}{2p}\cdot\frac{a}{2p}\right) = \frac{a^2}{2p^2}; \quad P(H_2) = \frac{b^2}{2p^2}; \quad P(H_3) = 2\frac{ab}{p^2};$$

$$P(H_4) = \frac{a^2}{2p^2}; \quad P(H_5) = \frac{b^2}{2p^2},$$

unde $2p$ este perimetrul dreptunghiului.

Vom determina valorile medii condiționate (vezi ipotezele H_i) ale pătratului distanței între două puncte:

$$E(d^2/H_1)=\int_0^a\int_0^a f(x,\ y)\,(x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a^2}\int_0^a\int_0^a (x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a^2}{6};$$

$$E(d^2/H_2)=\frac{1}{b^2}\int_0^b\int_0^b (x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{b^2}{6};$$

$$E/(d^2/H_3)=\frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}(a^2+b^2);$$

$$E(d^2/H_4)=E\,[b^2+(X-Y)^2]=b^2+\frac{a^2}{6};$$

$$E(d^2/H_5)=a^2+\frac{b^2}{6}.$$

Valoarea medie totală a variabilei aleatoare d^2 este

$$E(d^2)=\sum_{i=1}^{5}P(H_i)E(d^2/H_j)=\frac{1}{6p^2}(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)=\frac{(a+b)^4}{6p^2}=\frac{p^2}{6}.$$

46. Fiind dată matricea de corelație $\|\lambda_{rs}\|$ a unui sistem de 6 variabile aleatoare normale $X_1, X_2, \ldots, X_6$, ale căror valori medii sînt zero, să se determine valoarea medie a produsului $X_3^2X_2X_4$ utilizînd metoda funcțiilor caracteristice.

R. Valoarea medie $E(X_3^2X_2X_4)$ se determină cu ajutorul derivatei de ordinul al patrulea a funcției caracteristice

$$\varphi_{x_2,\,x_3,\,x_4}(t_2,\,t_3,\,t_4)=e^{-\frac{1}{2}\sum_{r=2}^{4}\sum_{s=2}^{4}\lambda_{rs}t_rt_s};$$

$$E(X_3^2X_2X_4)=\left.\frac{\partial^4\varphi_{x_2,\,x_3,\,x_4}(t_2,\,t_3,\,t_4)}{\partial t_3^2\,\partial t_2\,\partial t_4}\right|_{t_2=t_3=t_4=0}.$$

Notăm $\tau_r=\sum_{s=1}^{n}\lambda_{rs}t_s$. Atunci

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_3}=\frac{\partial}{\partial t_3}\left(e^{-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{6}\sum_{s=1}^{6}\lambda_{rs}t_rt_s}\right)=-\varphi\tau_3,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_3^2}=\varphi\tau_3^2-\varphi\frac{\partial\tau_3}{\partial t_3}=\varphi\tau_3^2-\varphi\lambda_{33},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_3^2 \partial t_2} = -\varphi\tau_3^2\tau_2 + 2\varphi\tau_3\lambda_{23} + \varphi\tau_2\lambda_{33},$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t_3^2 \partial t_2 \partial t_4} = \varphi\tau_3^2\tau_2\tau_4 - 2\varphi\tau_3\tau_2\lambda_{34} - \varphi\tau_3^2\lambda_{24} - 2\varphi\tau_3\tau_4\lambda_{23} + 2\varphi\lambda_{34}\lambda_{23} - \varphi\tau_2\tau_4\lambda_{33} + \varphi\lambda_{24}\lambda_{33}.$$

Pentru $t_1 = t_2 = \cdots = t_6 = 0$ avem

$$\varphi = 1, \quad \tau_r = 0,$$

prin urmare

$$E(X_3^2 X_2 X_4) = \lambda_{33}\lambda_{24} + 2\lambda_{23}\lambda_{34}.$$

47. Fie η_n $(n = 1, 2, \ldots)$ variabile aleatoare mărginite, $|\eta_n| \leqslant C$. Condiția necesară și suficientă pentru ca η_n să conveargă în probabilitate la 0 este

$$\lim_{n\to\infty} E(|\eta_n|) = 0.$$

R. Aplicînd inegalitatea lui Markov variabilelor aleatoare (η_n), obținem

$$P(|\eta_n| \geq \varepsilon) \leqslant \frac{E(|\eta_n|)}{\varepsilon}.$$

Condiția dată este deci suficientă pentru ca $\eta_n \xrightarrow{P} 0$.

Presupunem acum că $\lim_{n\to\infty}{}_{st}\ \eta_n = 0$, (convergență stochastică sau în probabilitate). Fie $A_n(\delta)$ evenimentul $|\eta_n| > \delta$, cu $\delta > 0$ arbitrar. Avem

$$E(|\eta_n|) = E(|\eta_n| / A_n(\delta))P(A_n(\delta)) + E(|\eta_n| / \overline{A_n(\delta)})P(\overline{A_n(\delta)}) \leqslant CP(A_n(\delta)) + \delta.$$

Prin ipoteză $\lim_{n\to\infty} P(A_n(\delta)) = 0$, de unde

$$\limsup_{n\to\infty} E(|\eta_n|) \leqslant \delta.$$

Deoarece δ poate fi ales arbitrar de mic, condiția dată este necesară.

48. Fie $f(x)$ și $g(x)$ două funcții continue pe intervalul închis $[0, 1]$ verificînd: $0 \leqslant f(x) < Cg(x)$, unde C este o constantă pozitivă. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{g(x_1) + g(x_2) + \cdots + g(x_n)}\, dx_1 \ldots dx_n = \frac{\int_0^1 f(x)dx}{\int_0^1 g(x)dx}.$$

R. Alegem în cubul-unitate din spațiul cu n-dimensiuni un punct P la întîmplare (avînd repartiția uniformă). Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ coordonatele sale; ξ_k $(k = 1, \ldots, n)$

sînt deci independente și uniform distribuite în $[0,1]$. Notăm

$$\eta_n = \frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\cdots+f(\xi_n)}{n}, \quad \zeta_n = \frac{g(\xi_1)+g(\xi_2)+\cdots+g(\xi_n)}{n}.$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty st} \eta_n = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x, \quad \lim_{n\to\infty st} \zeta_n = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$$

și, cum $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x > 0$, avem

$$\lim_{n\to\infty st} \frac{\eta_n}{\zeta_n} = \frac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x}.$$

Dar $0 < \frac{\eta_n}{\zeta_n} < C$, se arată ușor că dacă un șir de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n\in N^*}$ converge stochastic la C și $h(x)$ este o funcție mărginită, măsurabilă Borel, continuă în C, atunci $\lim_{n\to\infty} E(h(\xi_n)) = f(C)$, deci

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{\eta_n}{\zeta_n}\right) = \frac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

49. Dacă $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sînt variabile aleatoare independente cu $E(\xi_n)=0$, $D(\xi_n)=D_n$ și dacă $\zeta_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, avem pentru toți $\varepsilon > 0$ și $n=1, 2, \ldots$

$$P\left(\sup_{k\geqslant n}\left|\frac{\zeta_k}{k}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D_k^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{D_k^2}{k^2}\right).$$

Această inegalitate este dată de J. Hájek.

R. Fie

$$\eta = \sum_{k=n}^{\infty} \zeta_k^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right).$$

Atunci

$$E(\eta_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D_k^2+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{D_k^2}{k^2}. \tag{1}$$

Fie A_k $(k\geqslant n)$, evenimentul care constă în aceea că inegalitățile

$$\frac{|\zeta_m|}{m}<\varepsilon,\ (m=n,\ n+1,\ \ldots,\ k-1)\ \text{și}\ \frac{|\zeta_k|}{k}\geqslant\varepsilon$$

sînt verificate; dacă $A=\sum_{k=n}^{\infty}A_k$, evenimentele $\overline{A}, A_n, A_{n+1}, \ldots$ constituie un sistem complet. Deci

$$E(\eta)=E(\eta\,|\overline{A})P(\overline{A})+\sum_{k=n}^{\infty}E(\eta/A_k)P(A_k) \tag{2}$$

și

$$E(\eta/A_k)=\sum_{m=n}^{\infty}E(\zeta_m^2/A_k)\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{(m+1)^2}\right)\geqslant\sum_{m=k}^{\infty}E(\zeta_m^2/A_k)\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{(m+1)^2}\right).$$

Dacă $m>k$ se arată, ca și la demonstrarea inegalității lui Kolmogorov, că

$$E(\zeta_m^2/A_k)\geqslant E(\zeta_k^2/A_k)\geqslant k^2\varepsilon^2, \tag{4}$$

de unde

$$E(\eta/A_k)\geqslant\varepsilon^2$$

și

$$E(\eta)\geqslant\varepsilon^2\sum_{k=n}^{\infty}P(A_k)=\varepsilon^2P\left(\sup_{k\geqslant n}\left|\frac{\zeta_k}{k}\right|\geqslant\varepsilon\right). \tag{5}$$

Din (1) și (5) obținem rezultatul căutat.

50. Fie η_n frecvența absolută a evenimentului A într-un șir de n experiențe independente, $P(A)=p$, $(0<p<1;\ q=1-p)$. Să se demonstreze teorema logaritmului iterat:

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{\eta_n-np}{\sqrt{2npq\ln\ln n}}=1\right)=1 \tag{1}$$

și

$$P\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{\eta_n-np}{\sqrt{2npq\ln\ln n}}=-1\right)=1. \tag{2}$$

R. La demonstrarea teoremei Moivre-Laplace se arată că

$$P\left(\frac{\eta_n-np}{\sqrt{npq}}>x\right)=1-\Phi(x)+o\left(\frac{x^3}{\sqrt{n}}\right)$$

pentru $x=o\left(\sqrt{\ln \ln n}\right)$, de unde

$$P\left(\frac{\eta_n-np}{\sqrt{2npq \ln \ln n}} \geqslant 1-\varepsilon\right)=1-\Phi\left((1-\varepsilon)\sqrt{2 \ln \ln n}\right)+o\left(\frac{(\ln \ln n)^{3/2}}{\sqrt{n}}\right).$$

Dar

$$1-\Phi(x)>\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

rezultă că

$$P\left(\frac{\eta_n-np}{\sqrt{2npq \ln \ln n}} \geqslant 1-\varepsilon\right) \geqslant \frac{c}{\ln n}, \text{ pentru } n \geqslant n_0,$$

$c>0$ fiind o constantă. Fie $\eta_k=2^k$ și A_k evenimentul

$$\frac{\eta n_k-n_k p}{\sqrt{2 n_k pq \ln \ln n_k}} \geqslant 1-\varepsilon.$$

Seria $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ este deci divergentă și

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} P(A_k A_l)}{\left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)^2}=1,$$

deci cu probabilitatea 1 se produc o infinitate de evenimente A_k (lema lui Borel-Cantelli). Cum $\varepsilon>0$ este arbitrar de mic, (1) este demonstrat. Analog se demonstrează și (2).

51. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ variabile aleatoare independente două cîte două, avînd aceeași repartiție $F(x)$. Notînd $\zeta_n=\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n}$ să se arate că pentru a avea $\lim_{n\to\infty}{}_{st}\ \zeta_n=0$ condițiile următoare:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} x \mathrm{d}F(x)=0; \tag{1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} xF(x)=\lim_{x\to+\infty} x[1-F(x)]=0 \tag{2}$$

sînt suficiente.

R. Fie

$$\xi_{n_k}=\begin{cases}\xi_k, & |\xi_k|\leqslant n,\\ 0, & |\xi_k|>n\end{cases}$$

și

$$\zeta_n^*=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_{n_k}.$$

Atunci

$$P\left(\zeta_n\neq\zeta_n^*\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}P(|\xi_k|>n)=n[F(-n)+(1-F(n))]$$

și din (2)

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\zeta_n\neq\zeta_n^*\right)=0.$$

Este suficient deci de arătat că $\lim_{st}\zeta_n^*=0$: deoarece

$$P(|\zeta_n|>\varepsilon)\leqslant P\left(|\zeta_n^*|\geqslant\varepsilon\right)+P\left(\zeta_n\neq\zeta_n^*\right)$$

și deci $\lim_{st}\zeta_n=0$. Pe de altă parte din (1) rezultă

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\zeta_n^*\right)=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}x\,dF(x)=0.$$

Mai mult

$$D^2\left(\zeta_n^*\right)\leqslant\frac{1}{n}\int_{-n}^{n}x^2dF(x)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2\int_{k-1}^{k}dF(x)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2\int_{-k}^{-(k-1)}dF(x).$$

Introducînd notația $a_k=1-F(k)$, $b_k=F(-k)$, putem scrie

$$D^2\left(\zeta_n^*\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\left[(a_{k-1}-a_k)+(b_{k-1}-b_k)\right]\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(a_k+b_k)\,(2k+1)$$

și după (2)

$$\lim_{k\to\infty}(2k+1)\,(a_k+b_k)=0,$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty}D^2\left(\zeta_n^*\right)=0,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_n^* = 0.$$

52. Să se cerceteze dacă integrala $I=\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, $(a>0)$, după schimbarea de variabilă $y=\frac{a}{x}$ se poate calcula prin metoda Monte-Carlo după formula

$$I_n=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{n}\frac{1}{y_k}\sin\frac{a}{y_k},$$

unde y_k sînt numere aleatoare din intervalul $[0, 1]$.

R. După schimbarea de variabilă indicată obţinem

$$I=\int_0^1 \frac{1}{y}\sin\frac{a}{y}\,dy.$$

Mărimea I_n poate fi socotită apropiată de valoarea I numai atunci cînd

$$\lim_{n\to\infty} P(|I_n-I|<\varepsilon)=1.$$

Numerele aleatoare y_k au repartiţii unice şi deci şi funcţiile lor $\frac{1}{y_k}\sin\frac{a}{y_k}$ au repartiţii unice.

Pentru aplicarea teoremei lui Hincin rămîne să ne convingem de existenţa valorii medii $E\left[\frac{1}{Y}\sin\frac{a}{Y}\right]$, unde Y este o variabilă aleatoare uniform distribuită în $[0,1]$, deci trebuie să arătăm că $\int_0^1 \frac{1}{y}\sin\frac{a}{y}\,dy$ este absolut convergentă.

Dacă notăm prin s cel mai mic număr întreg cu $s\geqslant\frac{a}{\pi}$, atunci

$$\int_0^1\left|\frac{1}{y}\sin\frac{a}{y}\right|dy=\int_a^\infty\frac{|\sin x|}{x}\,dx\geqslant\sum_{k=s}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx=\sum_{k=s}^{\infty}\int_0^\pi\frac{\sin y}{y+k\pi}\,dy.$$

Dar

$$\sum_{k=s}^{\infty}\int_0^\pi\frac{\sin y}{y+k\pi}\,dy>\sum_{k=s}^{\infty}\frac{1}{\pi(k+1)}\int_0^\pi\sin y\,dy=\frac{2}{\pi}\sum_{k=s}^{\infty}\frac{1}{k+1}=\infty,\ \text{deci}$$

integrala este divergentă și $E\left[\frac{1}{Y}\sin\frac{a}{Y}\right]$ nu există, deci metoda Monte-Carlo nu se aplică.

53. Să se cerceteze dacă mărimea

$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a)^2$$

poate fi luată ca valoare aproximativă a dispersiei greșelilor de verificare a unui aparat, dacă $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sînt măsurători independente ale mărimii constante a, care au aceeași funcție de repartiție.

R. Fie σ^2 valoarea exactă a dispersiei erorilor de verificare a aparatului. Mărimea S_n^2 poate fi privită ca valoare aproximativă a lui σ^2 dacă

$$\lim_{n\to\infty} P(|S_n^2-\sigma^2|<\varepsilon)=1.$$

Variabilele aleatoare $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sînt independente iar mărimile $\eta_k=(\xi_k-a)^2$ sînt și ele independente. Avem

$$E(\eta_k)=E((\xi_k-a)^2)=E(\xi_k^2)-2aE(\xi_k)+a^2=$$

$$=\sigma^2+\overline{\xi}_k^2-2a\overline{\xi}_k+a^2=\sigma^2+(\overline{\xi}_k-a)^2, \qquad \overline{\xi}_k=E(\xi_k).$$

Pentru a avea $E(\eta_k)=\sigma^2$, este necesar ca $\overline{\xi}_k=a$, ceea ce înseamnă lipsa greșelilor sistematice de măsurare. Deci numai dacă nu avem greșeli sistematice, putem aplica legea numerelor mari și prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a)^2-\sigma^2\right|<\varepsilon\right)=1.$$

54. Cîte încercări sînt necesare pentru evaluarea integralei

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$

prin metoda Monte-Carlo pentru ca în calculul integralei să avem cu probabilitatea 0,9 o eroare relativă mai mică de 5%?

R. Integrala

$$\frac{\pi}{2}I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$

poate fi considerată ca valoarea medie a funcției cos x în raport cu variabila aleatoare ξ uniform repartizată în $(0, \pi/2)$. Atunci valoarea aproximativă a integralei este

$$I_n = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n} \cos \xi_k,$$

unde ξ_k este un număr aleator în $(0, \pi/2)$. Formăm variabila aleatoare

$$T_n = \frac{I_n - I}{\sqrt{D[I_n]}}$$

care are la limită, ca lege de repartiție, conform teoremei lui Leapunov

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Deci mărimile $\cos \xi_k$ sînt independente, au aceeași repartiție, cu $I = E[I_n]$ și

$$D^2[I_n] = \frac{\pi^2}{4n} D^2[\cos \xi] = \frac{\pi^2 - 8}{8n}.$$

Teorema lui Leapunov ne dă

$$P\left(\sqrt{\frac{8n}{\pi^2-8}} |I_n - I| < \varepsilon\right) \approx \Phi(\varepsilon) = 0{,}9;$$

aici $\varepsilon = 1{,}645$.

Pentru ca eroarea relativă $\frac{I_n - I}{I}$ să fie mai mică decît 0,05, considerînd că $I = 1$, este necesar să facem un număr n de încercări, astfel încît

$$\sqrt{\frac{8n}{\pi^2-8}} \cdot 0{,}05 > 1{,}645, \text{ de unde } n > 252.$$

55. Să se stabilească relațiile

1. $H(AB) = H(A) + H_A(B)$,
2. $H_A(B) \leqslant H(B)$,

oricare ar fi cîmpurile de evenimente A, B, C.

R. Fie A un cîmp finit de evenimente cu desfacerea $A_1, \ldots, A_n$ și probabilitățile corespunzătoare $P(A_i)$, $(i = 1, \ldots, n)$. Mărimea $H(A)$ se numește *entropia* cîmpului A și ea constituie o măsură a nedeterminării sau o cantitate de informație conținută în A și este definită astfel:

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \log_2 P(A_i).$$

Avem

$$H(AB) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(A_iB_j)\log_2 P(A_iB_j),$$

unde B este un cîmp finit de evenimente și are o desfacere $B_1, B_2, \ldots, B_m$.

Entropia condiționată a cîmpului B, în ipoteza că în cîmpul A a avut loc evenimentul A_i, este

$$H_{A_i}(B) = -\sum_{k=1}^{m} P_{A_i}(B_k)\log_2 P_{A_i}(B_k),$$

Valoarea medie a variabilei aleatoare $H_{A_i}(B)$ este

$$H_A(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) H_{A_i}(B)$$

și se numește *entropia* cîmpului B *condiționată* de cîmpul A.

1. Să presupunem că A și B sînt independente. Avem

$$-H(AB) = \sum_{i,k} P(A_iB_k)\log_2 P(A_iB_k) = \sum_{i,k} P(A_i)P(B_k)[\log_2 P(A_i) + \log_2 P(B_k)] =$$

$$= \sum_k P(B_k)\sum_i P(A_i)\log_2 P(A_i) + \sum_i P(A_i)\sum_k P(B_k)\log_2 P(B_k) = -H(A) - H(B).$$

Dacă cîmpurile nu sînt independente, $P(A_iB_k) = P(A_i)P_{A_i}(B_k)$ și deci

$$-H(AB) = \sum_{i,k} P(A_i)\,P_{A_i}(B_k)\,[\log_2 P(A_i) + \log_2 P_{A_i}(B_k)] =$$

$$= \sum_k P_{A_i}(B_k)\sum_i P(A_i)\log_2 P(A_i) + \sum_i P(A_i)\sum_k P_{A_i}(B_k)\log_2 P_{A_i}(B_k) = -H(A) - H_A(B).$$

2. Considerăm funcția convexă pentru $x > 0$

$$f(x) = x\log_2 x.$$

Atunci pentru orice $x_i > 0$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, avem

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right). \qquad (*)$$

Scriem inegalitatea (2) sub forma

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\sum_{k=1}^{m} P_{A_i}(B_k)\log_2 P_{A_i}(B_k) \geqslant \sum_{k=1}^{m} P(B_k)\log_2 P(B_k).$$

Luăm $\lambda_i = P(A_i)$ și $x_i = P_{A_i}(B_k)$ în (*). Rezultă

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \sum_{k=1}^{m} P_{A_i}(B_k) \log_2 P_{A_i}(B_k) = \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} P(A_i) f(P_{A_i}(B_k)) \right] \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{m} f\left(\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B_k) \right) = \sum_{k=1}^{m} f(P(B_k)) = \sum_{k=1}^{m} P(B_k) \log_2 P(B_k),$$

deoarece $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$, $\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B_k) = P(B_k)$.

Deci

$$H_A(B) \leqslant H(B).$$

56. Se codifică prin metoda Sennon-Feno alfabetul compus din 4 simboluri A, B, C, D dacă probabilitățile apariției fiecărui simbol într-o comunicare sînt

$$P(A)=0{,}28; \qquad P(B)=0{,}14; \qquad P(C)=0{,}48; \qquad P(D)=0{,}10.$$

Să se determine cantitatea de informație care corespunde la un simbol.

R. Dispunem simbolurile alfabetului în ordinea descreșterii probabilităților lor și aranjăm pe grupe diviziunile logice.

În prima diviziune din prima grupă intră C, iar în a doua A, B și D, deoarece $P(C)=0{,}48$ și $P(A+B+D)=0{,}12$.

Primei grupe îi adăugăm simbolul codificat 1, iar grupei a doua 0. Analog, din grupa a doua obținem subgrupurile A și $B+D$ cu probabilități 0,28 și 0,24 și însemnările codificate 01 și 00. În sfîrșit grupa $B+D$ se descompune în B și D cu probabilitățile 0,14 și 0,10 și simbolurile codificate 001 și 000.

Reprezentăm astfel procesul codificării:

Simbolurile alfabetului	Probabilitățile simbolurilor alfabetului	Subgrupele și simbolurile lor codificate	Insemnările codifcate ale simbolurilor alfabetului
C	0,48	1	1
A	0,28	0 1	01
B	0,14	0 1 0	001
D	0,10	0 0	000

La apariția unuia din simbolurile alfabetului corespunde o grupă întreagă de evenimente incompatibile și în general cantitatea de informație în exemplul dat este egală cu entropia alfabetului. De aceea cantitatea de informație care corespunde la un simbol codificat (economia de cod) este egală cu raportul dintre entropia alfa-

betului și valoarea medie a lungimii însemnărilor codificate a simbolurilor alfabetului

$$\frac{-0{,}48\cdot\log_2 0{,}48-0{,}28\cdot\log_2 0{,}28-0{,}14\cdot\log_2 0{,}14-0{,}10\cdot\log_2 0{,}10}{1\cdot 0{,}48+2\cdot 0{,}28+3\cdot 0{,}14+3\cdot 0{,}10}=\frac{1{,}751}{1{,}760}=0{,}995.$$

57. Dintre toate legile de repartiție continue a unei variabile aleatoare pentru care este dată aceeași dispersie D^2, să se determine legea de repartiție cu entropia diferențială maximă.

R. Conform unei teoreme a calculului variațional pentru determinarea funcției $y=y(x)$ care dă extremumul integralei

$$I=\int_a^b \Phi(x,\ y)\,dx$$

cu condițiile suplimentare

$$\int_a^b \Psi_s(x,\ y)\,dx=c_s,\quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

este necesar să rezolvăm ecuația lui Euler

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}=0,$$

unde $\Phi_1=\Phi+\sum_{s=1}^{m}\lambda_s\Psi_s$, iar constantele λ_s se determină cu ajutorul condițiilor suplimentare date. În exemplul nostru trebuie să aflăm maximul integralei

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln f(x)\,dx$$

cu condițiile

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1,\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{x})^2 f(x)\,dx=D^2.$$

De aici

$$\Phi_1(x,\ f)=-f\ln f+\lambda_1 f+\lambda_2(x-\bar{x})^2 f.$$

Prin urmare, ecuația pentru determinarea funcției $f(x)$ este

$$-\ln f(x)-1+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_2(x-\bar{x})^2=0,$$

de unde

$$f(x)=Ce^{-\lambda_2(x-\bar{x})^2},\qquad C=e^{-\lambda_1+1}.$$

Din condițiile suplimentare găsim

$$C=\frac{1}{\sqrt{2\pi D^2}},\quad \lambda_2=\frac{1}{2D^2}.$$

Rezultatul găsit corespunde entropiei maxime, care are o lege normală de repartiție

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}D}e^{-\frac{1}{2D^2}(x-\bar{x})^2}.$$

58. Se dau trei variabile aleatoare: x ovalitatea bucșelor după o rectificare preliminară, y adaosurile în timpul rectificării finale, iar z ovalitatea după rectificarea finală. Se mai dau

$$\begin{array}{lll}\bar{x}=0{,}045; & s_x=0{,}020, & r_{xz}=0{,}70;\\ \bar{y}=0{,}027; & s_y=0{,}062, & r_{yz}=0{,}42;\\ \bar{z}=0{,}018; & s_z=0{,}012, & r_{xy}=0{,}54.\end{array}$$

Să se calculeze ecuația de regresie a lui Z față X și Y și coeficienții de corelație $r_{z\,.\,xy}$, $r_{x\,.\,yz}$, $r_{y\,.\,xz}$.

R. Se știe că

$$r_{z\,.\,xy}=\sqrt{1-\frac{\bar{\Delta}}{\Delta_{33}}};\qquad r_{x\,.\,yz}=\sqrt{1-\frac{\bar{\Delta}}{\Delta_{11}}};\qquad r_{y\,.\,xz}=\sqrt{1-\frac{\bar{\Delta}}{\Delta_{22}}},$$

unde Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{33} sînt complementii algebrici ai elementelor liniei a treia din determinantul

$$\bar{\Delta}=\begin{vmatrix}1 & r_{xy} & r_{xz}\\ r_{yx} & 1 & r_{yz}\\ r_{zx} & r_{zy} & 1\end{vmatrix},$$

iar linia de regresie este dată de

$$\frac{\hat{z}-\bar{z}}{s_z}=\frac{r_{xz}-r_{xy}r_{yz}}{1-r_{xy}^2}\cdot\frac{x-\bar{x}}{s_x}+\frac{r_{yz}-r_{xy}r_{xz}}{1-r_{xy}^2}\cdot\frac{y-\bar{y}}{s_y}.$$

Avem

$$\bar{\Delta}=0{,}36;\ \Delta_{33}=0{,}71;\ \Delta_{31}=-0{,}47;\ \Delta_{32}=-0{,}04;\ \Delta_{11}=0{,}82;\ \Delta_{22}=0{,}51.$$

Ecuația de regresie se scrie

$$\hat{z}=0{,}40\,x+0{,}011\,y-0{,}019$$

și

$$r_{z\,.\,xy}=0{,}70;\ r_{x\,.\,yz}=0{,}75;\ r_{y\,.\,xz}=0{,}54.$$

59. În cadrul a patru laboratoare diferite de control s-au făcut cîte $l=10$ măsurători, deci în total $N=k\cdot l=40$ măsurători, asupra unui anumit reper, și s-au obținut următoarele rezultate:

Laboratorul	Valoarea medie	Abaterea medie pătratică	Dispersia
1	$\bar{x}_1=151$	$s_1=22{,}9$	$s_1^2=526$
2	$\bar{x}_2=148$	$s_2=24{,}1$	$s_2^2=583$
3	$\bar{x}_3=168$	$s_3=24{,}5$	$s_3^2=601$
4	$\bar{x}_4=173$	$s_4=22{,}6$	$s_4^2=511$

Să se cerceteze dacă diferențele dintre valorile medii date de fiecare laborator sînt sistematice sau întîmplătoare.

R. Avem o problemă de dispersie simplă. Vom calcula următoarele caracteristici:

$$\sum_{i=4}^{4} x_i=640;\quad \bar{\bar{x}}=\frac{640}{4}=160,\quad \sum_{i=1}^{4} s_i^2=2221;$$

$$\bar{s}_1^2=\frac{l}{k-s}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{\bar{x}})^2=1527;$$

$$\bar{s}_1^2=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}s_i^2=555.$$

Raportul care trebuie verificat prin proba F este

$$\frac{\bar{s}_1}{\bar{s}_2}=2{,}75.$$

În tabelă găsim pentru $n_1=k-1=3$ și $n_2=N-k=36$ (n_1 și n_2 sînt gradele de libertate corespunzătoare) o valoare

$$F>2{,}84.$$

Întrucît $2{,}75<2{,}84$, diferențele dintre valorile medii ale fiecărui laborator sînt întîmplătoare.

60. Se fac cinci măsurători asupra înălțimii unui punct. Rezultatele măsurătorilor h_i date în mm și ponderile corespunzătoare p_i sînt date în tabela următoare:

Scanned with OKEN Scanner

h_i	p_i	$h_i'=h_i-\beta$	p_ih_i'	$h_i-\tilde{h}$	$(h_i-\tilde{h})^2$	$p_i(h_i-\tilde{h})^2$
12356	1,0	6	6,0	−0,64	0,410	0,410
12361	0,4	11	4,4	4,36	19,010	7,604
12357	3,0	7	21,0	0,36	0,130	0,390
12355	0,2	5	1,0	−1,64	2,690	0,538
12352	0,4	2	0,8	−4,64	21,530	8,612
Total	5,0		33,2			17,554

Să se estimeze înălțimea și precizia observațiilor.

R. Vom folosi metoda estimației punctuale pentru estimarea lui h și σ. Calculele sînt date în tabela unde s-a luat $\beta=12\,350$ mm. Avem

$$\bar{x}=\beta+\frac{\sum p_ih_i'}{\sum p_i}=12\,350+\frac{33{,}2}{5}=12\,356{,}64 \text{ mm}$$

și

$$\tilde{s}=\sqrt{\frac{\sum p_i(h_i-\tilde{h})^2}{\sum p_i}}=\sqrt{\frac{17{,}554}{5}}=1{,}87;$$

$$q=\sqrt{\frac{\sum p_i(h_i-\tilde{h})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{17{,}554}{4}}=2{,}09.$$

Căutăm un interval de încredere pentru h. Pentru $n-1=4$ grade de libertate și un prag $p=0{,}9$ din tabelele cu distribuția t (Student) găsim $t=2{,}132$. Dar

$$\frac{t\tilde{s}}{\sqrt{n-1}}=\frac{(2{,}132)\cdot(1{,}87)}{2}=1{,}99,$$

deci pentru h am obținut intervalul de încredere

$$12354{,}6<h<12358{,}7.$$

Precizia măsurătorilor o vom estima pentru un prag $p=0{,}9$. Tabela cu distribuția χ^2 dă intervalul de încredere pentru σ plecînd de la condiția

$$P\left(\sqrt{\frac{n-1}{\chi_1^2}}q<\tau<\sqrt{\frac{n-1}{\chi_2^2}}q\right)=P_2-P_1=p.$$

Pentru patru grade de libertate, obținem

$$\sqrt{\frac{n-1}{\chi_1^2}}=0{,}649,\quad \sqrt{\frac{n-1}{\chi_2^2}}=2{,}37,$$

deci pentru σ avem intervalul de încredere

$$1{,}35<\sigma<4{,}96.$$

Scanned with OKEN Scanner

61. Să se determine intervalul de încredere de 99% pentru estimarea mediei teoretice a diametrului a al axului unei piese, în baza unei probe de 8 piese prelucrate la un strung automat. Abaterile dimensiunilor acestor piese de la centrul cîmpului de toleranță sînt date în tabela:

Nr. piesei după ordine	1	2	3	4	5	6	7	8
Abaterile dimensiunilor x_i în μ	+1	+2	−1	+3	−2	+4	+5	+4

R. Media aritmetică de selecție este

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8}=\frac{16}{8}=2\,\mu.$$

Dispersia este

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2}{n}=5{,}5,$$

deci $\tilde{s}=2{,}6$.

Cu ajutorul repartiției Student determinăm intervalul de încredere pentru estimarea mediei. Avem

$$P\left(\bar{x}-t_{1;\,7}\frac{s}{\sqrt{8-1}}<a<\bar{x}+t_{1;\,7}\frac{s}{\sqrt{8-1}}\right)=0{,}99.$$

Din tabele pentru $q=1\,\%$ și $n-1=7$ găsim $t_{1;\,7}=3{,}499$ sau

$$\frac{t_{1;\,7}\tilde{s}}{\sqrt{n-1}}=3{,}499\,\frac{2{,}6}{\sqrt{7}}=2{,}94,$$

deci

$$-0{,}94<a<4{,}94.$$

Așadar, valorile admisibile cu o siguranță de 99 % ale parametrului a sînt situate în intervalul $(-0{,}94;\ 4{,}94)$.

62. Se face o selecție mare de 150 piese din producția unui strung automat, formată din cinci probe independente de cîte 30 piese (probe luate în anumite intervale de timp). Se presupune că abaterea medie generală de la dimensiunea nominală în întreaga selecție este $\bar{x}=1{,}50$ mm, iar abaterea medie pătratică empirică generală este $s=0{,}36$ mm.

Să se estimeze cu un prag de semnificație de 5%, dacă discordanța dintre media aritmetică a probei nr. 2 este egală cu $\bar{x}_2=1{,}85$ și media aritmetică generală a întregii selecții este esențială.

R. Notăm abaterea relativă a mediei $\bar{x}_2$ a subgrupei, de la media generală $\bar{x}$ cu

$$y_2 = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}}{s}.$$

Se arată apoi că variabila

$$t = \frac{y_2\sqrt{(m(n-2)}}{\sqrt{n-m-my_2^2}}$$

urmează o lege Student cu $k=n-2$ grade de libertate. Avem pentru $m=30$ și $n=150$

$$t = \frac{0{,}69\sqrt{30(150-2)}}{\sqrt{150-30-30\cdot 0{,}692}} = 4{,}4.$$

Pentru $q=5\,\%$, $k=\infty$ (selecție mare) și $k=148$ grade de libertate

$$t_{5;\,\infty} = 1{,}96,$$

deci media probei 2 aparține domeniului critic dat de inegalitatea

$$\bar{x} > t_q \cdot \frac{\sqrt{m(n-2)}}{\sqrt{n-m-y_2^2}}$$

și deci ipoteza cu privire la omogenitatea mediilor probei nr. 2 și a selecției întregi trebuie respinsă.

63. Raza unei piese circulare este măsurată cu o eroare de observație care este normal distribuită în jurul lui zero, cu dispersia σ^2 necunoscută. Să se determine o estimație absolut corectă pentru aria acestui cerc, dat fiind n măsurători independente ale razei.

R. Fie a raza cercului și r rezultatele măsurătorilor. Atunci r este distribuit $N(a, \sigma^2)$, unde $E(r)=a$, $E[(r-a)^2]=\sigma^2$. Rezultă

$$E(r^2) = \sigma^2 + a^2.$$

Fie $r_1, \ldots, r_n$ cele n măsurători independente și $\theta(r_1, \ldots, r_n)$ o estimație absolut corectă a ariei cercului. Avem

$$E(\theta(r_1, \ldots, r_n)) = \pi a^2.$$

Luăm

$$\theta(r_1, r_2, \ldots, r_n) = r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2.$$

Rezultă

$$E(r_1^2 + \cdots + r_n^2) = nE(r^2) = n\sigma^2 + na^2$$

sau

$$\frac{\pi}{n} E(r_1^2 + \cdots + r_n^2) - \pi\sigma^2 = \pi a^2.$$

Deci

$$\frac{\pi}{n}(r_1^2 + \cdots + r_n^2) - \pi\sigma^2$$

este o estimație absolut corectă pentru aria cercului πa^2.

Se știe că $\frac{ns^2}{n-1}$ este o estimație absolut corectă pentru σ^2 deoarece $E\left[\frac{ns^2}{n-1}\right]=\sigma^2$, unde s^2 este dispersia de selecție. Dacă σ^2 este necunoscută, o estimație absolut corectă pentru aria cercului este

$$\frac{\pi}{n}(r_1^2+\cdots+r_n^2)-\pi\frac{ns^2}{n-1}.$$

64. Să se determine estimatorul de maximă verosimilitate pentru θ pe baza a n observații pentru funcția de frecvență

$$f(x,\theta)=(1+\theta)x^\theta,\quad \theta>0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

R. Probabilitatea obținerii valorilor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este

$$P(x,\theta)=(1+\theta)^n\prod_1^n x_i^\theta,$$

$$\ln P(x,\theta)=n\ln(1+\theta)+\theta\sum_1^n \ln x_i.$$

Ecuația de maximă verosimilitate este

$$\frac{\partial \ln P(x,\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{1+\theta}+\sum_1^n \ln x_i=0.$$

Cea mai bună estimație dată de metoda verosimilității maxime pentru parametrul θ este

$$\overline{\theta}=-\frac{n}{\sum_1^n \ln x_i}-1.$$

65. Se consideră familia de repartiții normale cu funcție de frecvență

$$f(x,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

unde media m este cunoscută, iar σ un parametru neeunoscut. Să se estimeze σ pe baza a n observații independente $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Să se cerceteze existența unei statistici exhaustive.

R. Aplicăm metoda bazată pe determinarea unei statistici necesare și suficiente. O statistică necesară și suficientă se poate obține aplicînd relația

$$g(x,\sigma)=\ln f(x,\sigma)-\ln f(x,\sigma_0),$$

unde σ_0 este o valoare particulară dată parametrului σ. Avem

$$g(x, \sigma) = -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} + \frac{(x-m)^2}{2\sigma_0^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma^2}\right](x-m)^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_i, \sigma) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma^2}\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2.$$

O statistică necesară și suficientă echivalentă este

$$\overline{\alpha}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n}.$$

Pentru obținerea unei estimații absolut corecte trebuie deci să considerăm o funcție de $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta} = \varphi(\overline{\alpha})$ astfel încît

$$E(\overline{\beta}) = \sigma, \quad D^2(\overline{\beta}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Fie

$$\overline{\beta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n}}.$$

Variabilele $x_i - m$ urmează o repartiție normală $(0, \sigma)$ și sînt independente. Legea de probabilitate a lui $\overline{\beta}$ este

$$\frac{2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n-1} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}x^2}.$$

Avem

$$E(\overline{\beta}) = \sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\,\sigma.$$

Considerînd expresia

$$\overline{\sigma}(x) = \sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n}},$$

obținem

$$E(\overline{\sigma})=\sigma,$$

$$D^2(\overline{\sigma})=\sigma^2\left[\frac{n}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}-1\right].$$

Asimptotic avem

$$\Gamma(x+1)=x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x},$$

de unde rezultă

$$D^2(\overline{\sigma})=\frac{\sigma^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Prin urmare, $\overline{\sigma}(x)$ este o estimație absolut corectă a lui σ.

Scriind $\overline{\sigma}(x)$ sub forma

$$\overline{\sigma}(x)=\begin{cases}\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{i=n}^{n}(x_i-m)^2}, & \text{pentru } n \text{ par},\\[2ex] \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-2)}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}, & \text{pentru } n \text{ impar},\end{cases}$$

teorema minimului dispersiei ne arată că

$$D^2(\overline{\sigma})\geqslant\frac{1}{nE\left(\frac{\partial \ln f}{\partial\sigma}\right)^2}=\frac{\sigma^2}{2n}.$$

Calculînd valoarea lui $D^2(\overline{\sigma})$ am văzut că diferă de $\frac{\sigma^2}{2n}$, deci $\overline{\sigma}$ este numai o estimație suficientă, în virtutea existenței unei statistici exhaustive.

Eficiența $e_n(\overline{\sigma})$ este dată de formula

$$e_n(\overline{\sigma})=\frac{\frac{1}{2n}}{\frac{n}{2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}-1}$$

și $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(\overline{\sigma})=1$, deci $\overline{\sigma}$ este o estimație eficient asimptotică.

Metoda verosimilității maxime ne dă

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n}}. \qquad (1)$$

Dar dacă există o estimație suficientă, ea este funcție de valoare (1), ceea ce s-a constatat direct cu estimația $\overline{\sigma}(x)$.

66. Fie o schemă Bernoulli cu două stări. În fiecare probă probabilitatea de a se obține o stare este p iar probabilitatea contrarie q. În probe consecutive s-a obținut frecvența $\frac{\nu}{n}$. Să se estimeze p^2 și p cu ajutorul lui ν.

R. Avem

$$E\left(\frac{\nu}{n}\right)=p, \quad D\left(\frac{\nu}{n}\right)=\sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Deoarece $D\left(\frac{\nu}{n}\right)\to 0$, rezultă că $\frac{\nu}{n}$ este o estimație absolut corectă a lui p. În plus

$$E\left(\frac{\nu}{n+1}\right)=p-\frac{p}{n+1}, \quad D\left(\frac{\nu}{n+1}\right)=\frac{\sqrt{npq}}{n+1}.$$

Prin urmare, și $\frac{\nu}{n+1}$ converge în probabilitate către p însă, din cauza termenului $-\frac{p}{n+1}$, valoarea $\frac{\nu}{n+1}$ este numai o estimație corectă a lui p, comportînd eroarea sistematică negativă $-\frac{p}{n+1}$.

Pentru a estima pe p^2, să încercăm să-l estimăm prin $\frac{\nu^2}{n^2}$ deoarece pentru p am găsit estimația $\frac{\nu}{n}$. Avem

$$E\left(\frac{\nu^2}{n^2}\right)=p^2+\frac{pq}{n}, \quad D\left(\frac{\nu^2}{n^2}\right)=\sqrt{\frac{4p^3q}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

De aici rezultă că $\frac{\nu^2}{n^2}$ este o estimație corectă pentru p^2. Pentru a găsi o estimație absolut corectă, observăm că

$$E\left(\frac{\nu^2}{n^2}\right)=\frac{n-1}{n}p^2+\frac{p}{n}, \quad E\left(\frac{\nu}{n^2}\right)=\frac{p}{n},$$

deci

$$E\left(\frac{\nu^2}{n^2}-\frac{\nu}{n^2}\right)=\frac{n-1}{n}p^2$$

și

$$E\left(\frac{\nu^2-\nu}{n(n-1)}\right)=p^2, \quad D\left(\frac{\nu^2-\nu}{n(n-1)}\right)=\sqrt{\frac{4p^3q}{n}+\frac{1}{n}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă deci că $\frac{\nu^2-\nu}{n(n-1)}$ este o estimație absolut corectă a lui p^2.

Să arătăm acum că estimația absolut corectă pentru p este și o estimație eficientă. Fie

$$\overline{\alpha}(\nu)=\frac{\nu}{n}$$

funcția de estimație. Din teorema minimului varianței știm că, oricare ar fi estimația corectă $\overline{\beta}(\nu)$, are loc inegalitatea

$$D^2(\overline{\beta})\geqslant\frac{1}{n\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \ln p_i}{\partial p}\right)^2 p_i(\alpha)}.$$

În cazul nostru parametrul α este egal cu p,

$$p_1(p)=p,$$

$$p_2(p)=1-p,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \ln p_i}{\partial p}\right)^2 p_i=p\frac{1}{p^2}+(1-p)\cdot\frac{1}{(1-p)^2}=\frac{1}{pq}.$$

Prin urmare,

$$D^2(\overline{\beta})\geqslant\frac{pq}{n}.$$

Minimul este atins pentru $\frac{\nu}{n}$, care este o estimație eficientă.

67. Se dă funcția de frecvență

$$f(x)=\frac{1}{\partial^p\Gamma(p)}\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)^{p-1}e^{-\frac{x-\alpha}{\sigma}},\quad \alpha\leqslant x<\infty,\ \alpha>0,\ p>2.$$

Să se estimeze parametrii α, σ, p pe baza unei selecții de volum n.

R. Pentru funcția de verosimilitate

$$P=\sigma^{-np}[\Gamma(p)]^{-n}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\alpha}{\sigma}\right)^{p-1}e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\alpha}{\sigma}}$$

avem

$$\ln P=-np\ln\sigma-n\ln\Gamma(p)+\sum_{i=1}^{n}(p-1)\ln\frac{x_i-\alpha}{\sigma}-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\alpha}{\sigma}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile de verosimilitate sînt

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \alpha} = -(p-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-\alpha}+\frac{n}{\sigma}=0,$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \sigma} = -\frac{np}{\sigma}+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\alpha}{\sigma^2}=0,$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial p} = -n\ln\sigma - n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(\ln\Gamma(p))+\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-\alpha)=0.$$

Matricea inversă a dispersiilor este

$$V^{-1}=n\begin{Vmatrix} \frac{1}{\sigma^2(p-2)} & \frac{1}{\sigma^2} & \frac{1}{\sigma(p-1)} \\ \frac{1}{\sigma^2} & \frac{p}{\sigma^2} & \frac{1}{\sigma} \\ \frac{1}{\sigma(p-1)} & \frac{1}{\sigma} & \frac{\mathrm{d}^2\ln\Gamma(p)}{\mathrm{d}p^2} \end{Vmatrix}$$

cu determinantul

$$|V^{-1}|:n^3=\Delta=\frac{1}{(p-2)\,\sigma^4}\left[2\frac{\mathrm{d}^2\ln\Gamma(p)}{\mathrm{d}p^2}-\frac{2}{p-1}+\frac{1}{(p-1)^2}\right].$$

Dispersiile de selecție sînt

$$D^2(\overline{\alpha})=\frac{1}{n\,\Delta\,\sigma^2}\left[p\frac{\mathrm{d}^2\ln\Gamma(p)}{\mathrm{d}p^2}-1\right],$$

$$D^2(\overline{\sigma})=\frac{1}{n\,\Delta\,\sigma^2}\left[\frac{1}{p-2}\frac{\mathrm{d}^2\ln\Gamma(p)}{\mathrm{d}p^2}-\frac{1}{(p-1)^2}\right],$$

$$D^2(\overline{p})=\frac{1}{n\,\Delta\,(p-2)\,\sigma^4}=\frac{2}{n}\Big/\left[2\frac{\mathrm{d}^2\ln\Gamma(p)}{\mathrm{d}p^2}-\frac{2}{p-1}\frac{1}{(p-2)^2}\right].$$

Pentru p mare folosim formula lui Stirling:

$$\frac{\mathrm{d}^2\ln\Gamma(p)}{\mathrm{d}p^2}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\left[\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\left(p+\frac{1}{2}\right)\ln p-p+\frac{1}{12\,p}-\frac{1}{360\,p^2}+\cdots\right]$$

și obținem

$$2\frac{\mathrm{d}^2\ln\Gamma(1+p)}{\mathrm{d}p^2}-\frac{2}{p}+\frac{1}{p^2}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{p^3}-\frac{1}{5p^5}+\frac{1}{7p^7}-\cdots\right],$$

deci

$$D^2(\overline{p})=\frac{6}{n}\left[(p-1)^3+\frac{1}{5}(p-1)\right].$$

Dacă estimăm parametrii prin egalarea momentelor de selecție cu momentele corespunzătoare, găsim

$$\alpha+\sigma p=m_1;\ \sigma^2 p=m_2;\ 2\sigma^3 p=m_3;\ b_1=\frac{m_3^2}{m_2^3}=\frac{4}{p},$$

b_1 fiind valoarea de selecție a lui p_1.

Pentru estimarea prin metoda momentelor,

$$D^2(b_1)=\frac{\beta_1}{n}[4\beta_4-24\beta_2+36+9\beta_1\beta_2-12\beta_3+35\beta_1]$$

care se reduce în cazul de față la

$$D^2(b_1)=\frac{\beta_1^2}{n}\cdot\frac{6(p+1)(p+5)}{p}.$$

Avem

$$D^2(\tilde{p})=\frac{p^4}{16}D^2(b_1)=\frac{6}{n}p(p+1)(p+5).$$

Eficiența acestui estimator pentru p mare este mai mică ca 1.

$$\frac{D^2(\bar{p})}{D^2(\tilde{p})}=\frac{(p-1)^3+(p-1)/5}{p(p+1)(p+5)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IX

ELEMENTE DE PROGRAMARE MATEMATICĂ

Programarea liniară este o metodă matematică care permite analiza diferitelor aspecte ale activităţii economice. Condiţiile în care se desfăşoară activitatea analizată conduc la un sistem de relaţii — ecuaţii sau inecuaţii — care cuprind *variabilele* problemei şi *coeficienţii tehnici* care o caracterizează. Aceste relaţii alcătuiesc *restricţiile* problemei. Obiectivul studiului este *optimizarea* unui anumit rezultat dependent de aceleaşi variabile care figurează şi în restricţii. Acest obiectiv apare sub forma unei funcţii ale cărei valori maxime sau minime le căutăm şi care se numeşte *funcţie obiectiv, funcţie de eficienţă* sau *funcţie economică.*

Restricţiile problemei împreună cu funcţia obiectiv constituie modelul matematic al problemei de programare matematică. Dacă sistemul restricţiilor şi funcţia obiectiv sînt funcţii liniare de variabilele problemei, modelul constituie o problemă de programare liniară care sub formă algebrică se scrie:

$$\sum_{j=1}^{m+n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i=1, 2, \ldots, k, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{m+n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, \quad i=k+1, \ldots, p, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m+n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i=p+1, \ldots, m, \tag{3}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1, 2, \ldots, m+n,$$

$$[\text{Max}]\ Z=\sum_{j=1}^{m+n} c_j x_j \text{ sau } [\text{Min}]\ Z=\sum_{j=1}^{m+n} c_j x_j, \tag{4}$$

unde coeficienţii a_{ij} $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n+m)$, b_i $(i=1,2,\ldots m)$ şi c_j $(j=1,2,\ldots,m+n)$ sînt numere reale asupra cărora nu facem nici o ipoteză particulară. Coeficienţii a_{ij} se numesc şi *coeficienţi tehnici* şi sînt stabiliţi pe baza fenomenului studiat. Dacă aceşti coeficienţi sînt şi rămîn constanţi într-un interval de timp determinat, avem de studiat o problemă de *programare liniară*. Dacă coeficienţii tehnici variază şi aceste variaţii pot fi exprimate ca funcţii de unul sau mai mulţi parametri, avem o problemă de *programare parametrică*. Dacă a_{ij} sînt variabile aleatoare, atunci avem o problemă de *programare stochastică*.

Variabilele x_j $(j=1,2,\ldots,m+n)$ reprezintă *nivelul la care trebuie desfăşurate activităţile* $j=1,2,\ldots,m+n$, şi este evident că nici o activitate nu poate fi desfăşurată la un nivel negativ.

Toate inecuaţiile sistemului de restricţii pot fi transformate în egalităţi prin adunarea sau scăderea unor variabile nenegative numite *variabile de abatere*. Aceste modificări conduc la *forma standard* a problemei care poate fi scrisă sub formă matriceală:

$$AX=B, \tag{5}$$

$$CX=Z, \tag{6}$$

unde

$$A=\|a_{ij}\|,\quad X=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix},\quad C=\|c_1, c_2, \ldots, c_{n+m}\|.$$

Numim *soluţie* a problemei orice sistem de valori ale variabilelor x_j $(j=1,\ldots,m+n)$ care satisfac relaţiile (1), (2) şi (3).

Dacă toate variabilele x_j sînt nenegative, dispunem de o *soluție realizabilă* sau de un program de activitate.

Numim *soluție realizabilă de bază* (soluție de bază) mulțimea de m cantități x_i ($x_i \geqslant 0$) și n cantități x_j ($x_j=0$) care satisfac (5).

Numim *soluție de bază optimă* (soluție optimală) soluția de bază care optimizează funcția economică.

Pentru rezolvarea problemelor de programare liniară s-au construit mai multe algoritme: *algoritmul primal, algoritmul dual, primal-dual, algoritmul simplex sau metoda Dantzig* etc.

Algoritmul simplex primal pleacă de la ipoteza că se cunoaște o soluție inițială de bază a problemei de programare liniară și oferă posibilitatea de a îmbunătăți soluția, înlocuind în fiecare iterație cîte un singur vector de bază, pînă la obținerea soluției optime, sau de a dovedi că nu există soluție optimă.

Presupunem că avem o soluție de bază cuprinzînd m variabile nenegative și nu toate nule, x_i, numărabile de la $n+1$ la $n+m$. Putem scrie

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} A_i x_i = B, \tag{7}$$

$$Z = \sum_{i=n+1}^{n+m} c_i x_i, \tag{7'}$$

cu $x_i \geqslant 0$, $(i=n+1, \ldots, m+n)$, $B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix}$ și A_i fiind m vectori coloane din matricea A. Ceilalți n vectori A_j, $j=1, \ldots, n$, pot fi exprimați liniar în funcție de m vectori A_i care constituie o bază a spațiului vectorial m-dimensional:

$$A_j = \sum_{i=n+1}^{m+n} x_{ij} A_i, \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Coeficienții x_{ij} se pot calcula prin inversiunea matricei pătrate formate din cei m vectori de bază A_i. Avem

$$Z_j = \sum_{i=n+1}^{m+n} x_{ij} c_i, \qquad (j=1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Fie θ un scalar pozitiv. Alegînd unul din vectorii A_j care nu sînt în bază, putem scrie

$$\theta A_j = \sum_{i=n+1}^{n+m} \theta x_{ij} A_i,$$

de unde o nouă expresie a lui (7)

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} A_i x_i = B = \sum_{i=n+1}^{n+m} (x_i - \theta x_{ij}) A_i + \theta A_j \tag{10}$$

iar din (7') prin adăugarea cantităţilor $\theta(c_j - Z_j)$ obţinem

$$Z + \theta(c_j - Z_j) = \sum_{i=1+m}^{n+m} c_i x_i + \theta(c_j - Z_j) \tag{11}$$

şi după (9)

$$\theta Z_j = \sum_{i=n+1}^{n+m} \theta x_{ij} c_i.$$

Rezultă

$$Z + \theta(c_j - Z_j) = \sum_{i=n+1}^{n+m} (x_i - \theta x_{ij}) c_i + \theta c_j. \tag{12}$$

Dacă cel puţin un $x_{ij} > 0$, putem alege $\theta > 0$, astfel ca

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ij}}. \tag{13}$$

Toţi $x_i - \theta x_{ij}$ sînt pozitivi, afară de unul care este nul şi corespunde lui θ_0. Atunci scoatem din bază vectorul A_i astfel ca

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ij}},$$

întrucît coeficientul său se anulează după (10). El va fi înlocuit prin vectorul A_j de coeficient θ_0. Noua soluţie de bază astfel obţinută este distinctă de precedenta şi ei îi corespunde o mărire a valorii funcţiei economice (în caz de maximizare) dacă $c_j - Z_j > 0$.

În concluzie *criteriul de intrare în bază* a unui vector A_j este ca acestui vector să-i corespundă diferenţa $c_j - Z_j > 0$.

Dacă nu există cantităţi $c_j - Z_j > 0$, maximul funcţiei economice este atins. Cantităţile $c_j - Z_j$ se mai numesc şi *costuri marginale*.

Dacă există o diferenţă $c_j - Z_j > 0$ şi vectorul A_j are componente pozitive, soluţia poate fi îmbunătăţită.

Scanned with OKEN Scanner

O soluție de bază realizabilă a unei probleme de programare liniară este un vector care verifică sistemul restricțiilor și are un număr de componente strict pozitive, cel mult egal cu numărul de restricții din sistem. Dacă numărul acestor componente strict pozitive este mai mic decît cel al restricțiilor, soluția este o *soluție degenerată de bază.*

Programele:

$$[\text{Max}]g=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad \text{]I]}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

și

$$[\text{Min}]f=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i, \qquad [\text{II}]$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geqslant c_j, \qquad (j=1, \ldots, n)$$

se numesc *duale* și au proprietatea următoare:

$$\max g=\min f.$$

Costurile marginale (c_j-Z_j) ale primului program dau soluția programului al doilea și reciproc.

Din punct de vedere teoretic *metoda tablourilor* este un procedeu direct prin care metoda simplex și criteriul lui Dantzig sînt utilizate pentru selecționarea în fiecare iterație a vectorului care intră în bază și a celui care este scos din bază. Îmbunătățirea esențială constă în faptul că în fiecare iterație se revine la o matrice de bază unitară ceea ce elimină calculele plictisitoare.

În cazul ecuațiilor cînd nu se poate pune în evidență o soluție de bază se procedează astfel:

1° Funcția economică este transformată prin adăugarea de m variabile ai căror coeficienți se iau egali și foarte mari dar neapărat de semn negativ. Se asigură astfel că soluția corespunzătoare maximului nu conține aceste variabile.

2° Se adaugă aceste variabile (variabile artificiale) restricțiilor ca și în cazul inecuațiilor, neafectînd semnul corespunzător membrului al doilea. Este cert că aceste variabile sînt nule pentru maxim.

3° Se procedează apoi ca pentru inecuații.

Pentru efectuarea primei iterații, se adaugă liniei coeficienților funcției economice diferite linii ale matricei multiplicate cu M astfel

ca să apară zero sub matricea unitate. Altfel spus, se adaugă fiecărui c_i cantitatea

$$(a_{1i}+a_{2i}+\cdots+a_{mi})\ M$$

şi lui Z cantitatea

$$(b_1+b_2+\cdots+b_m)\ M.$$

Apoi se selecţionează vectorul A_i care intră în bază ţinînd seama de cantitatea M.

Programare parametrică

O categorie de probleme de programare parametrică este formată de problemele în care termenii liberi din sistemul restricţiilor depind de unul sau mai mulţi parametri. Din punct de vedere economic aceşti termeni pot reprezenta cererea de produse sau resursele disponibile.

Rezolvarea problemelor, în care vectorul cerere b (vectorul care are drept componente cererile de produse) este parametrizat, constă în determinarea soluţiilor optime corespunzătoare diferitelor valori ale parametrilor de care depinde acest vector.

Indiferent de modul în care este parametrizat vectorul b, dacă soluţia asociată unei baze este optimă pentru anumite valori ale parametrilor, ea poate deveni nerealizabilă pentru alte valori, dar rămîne dual-realizabilă. Această observaţie reduce studiul optimalităţii bazei asociate unei soluţii dual-realizabile la determinarea condiţiilor în care soluţia dată este realizabilă.

Rezolvarea problemelor de programare parametrică constă în:

— determinarea intervalelor în care problema admite aceeaşi bază optimă;

— determinarea bazelor optime asociate fiecărui interval.

Fenomene de aşteptare

Vom da acum elementele esenţiale ale unui model de aşteptare.

1. **Veniri.** Acestea sînt presupuse, în general, ca tiind întîmplătoare şi independente. Deci, probabilitatea ca să se producă o venire a unei unităţi este independentă de timpul şi de numărul de unităţi deja ajunse la staţia de serviciu sau de cele ce vor veni.

Probabilitatea ca să se producă o venire în intervalul de timp $(t, t+\mathrm{d}t)$ este *dată de* $\frac{1}{\lambda}$, (λ=const). Această constantă λ indică numărul mediu de veniri în unitatea de timp $\mathrm{d}t$. În cele mai multe cazuri se presupune că venirile urmează o *lege Poisson*. Avem

$$\lambda=\frac{T}{a},$$

unde T este o unitate de timp şi a media lungimii intervalelor de timp dintre două veniri consecutive.

2. **Timpul de serviciu** este dat de variabilele aleatoare în general independente care pot urma o repartiţie exponenţială negativă, o lege constantă, o lege χ^2, sau o lege oarecare.

3. **Factorul de serviciu** (intensitate de trafic) este raportul care indică, în medie, numărul de unităţi care vin în perioada unui singur timp de serviciu. O dată stabilită repartiţia timpului de serviciu, toate caracteristicile modelului de aşteptare studiat se vor exprima în funcţie de acest parametru.

4. **Staţii de serviciu**

5. **Disciplina aşteptării.** Aceasta precizează modul în care se dispun unităţile în şirul de aşteptare şi ordinea în care sînt servite.

Şir de aşteptare cu mai multe staţii

Notăm:

S	— numărul de staţii;
ν	— numărul de unităţi în şirul de aşteptare;
j	— numărul de unităţi în curs de servire în staţii $(0 \leqslant j \leqslant S)$;
n	— numărul total de unităţi din sistem, adică în şir şi în staţii: $n=\nu+j$;
ρ	— numărul de staţii libere;
$\bar{n}, \bar{\nu}, \bar{j}, \bar{\rho}$	— valorile medii corespunzătoare lui n, ν, j, ρ;
t	— timpul mediu de aşteptare în şir înainte de servire.

Ecuaţiile modelului de aşteptare sînt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda - n\mu) p_n(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t), \quad 1 \leqslant n < S,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + S\mu) p_n(t) + S\mu p_{n+1}(t), \quad n \geqslant S,$$

$p_n(t)$ fiind probabilitatea ca la momentul t să avem n unităţi în sistem.

Aceste ecuaţii nu sînt decît un caz particular al ecuaţiilor mai generale care definesc ceea ce se numeşte un „proces de naştere şi de moarte"

în care sosirile (venirile) şi serviciul sînt poissoniene

$$\frac{d}{dt}p_n(t)=\lambda_{n-1}p_{n-1}(t)-(\lambda_n+\mu_n)p_n(t)+\mu_{n+1}p_{n+1}(t), \quad n>0 \qquad (14)$$

$$\frac{d}{dt}p_0(t)=-\lambda_0 p_0(t)+\mu_1 p_1(t),$$

unde λ_n şi μ_n sînt funcţii de n.

Notăm $\Psi=\frac{\lambda}{\mu}$. Cantitatea Ψ/S se numeşte intensitatea de trafic în staţie.

a) Probabilitatea p_n a unui număr de n unităţi în sistem:

$$p_n=p_0\frac{\Psi^{-n}}{n!}, \quad 1\leqslant n<S,$$

$$p_n=p_0\frac{\Psi^n}{S!\,S^{n-S}}, \quad n\geqslant S,$$

de unde

$$p_0=\frac{1}{\frac{\Psi^S}{S!\,(1-\Psi/S)}+1+\frac{\Psi}{1}+\frac{\Psi^2}{2!}+\cdots+\frac{\Psi^{S-1}}{(S-1)!}}.$$

b) Numărul mediu de unităţi n în sistem:

$$\bar{n}=\sum_{n=0}^{\infty}np_n,$$

$$\bar{n}=\left[\Psi+2\frac{\Psi^2}{2!}+\cdots+S\frac{\Psi^S}{S!}+(S+1)\frac{\Psi^{S+1}}{S!\,(S-\Psi)}+\frac{\Psi^{S+2}}{S!(S-\Psi)^2}\right]p_0.$$

c) Numărul mediu de unităţi $\bar{\nu}$ în şirul de aşteptare:

$$\bar{\nu}=\sum_{n=S+1}^{\infty}(n-S)p_n,$$

$$\bar{\nu}=\frac{\Psi^{S+1}}{S\cdot S!\,(1-\Psi/S)^2}p_0.$$

d) Numărul mediu $\bar{\rho}$ de staţii libere:

$$\bar{\rho}=\sum_{n=0}^{S}(S-n)p_n=S-\Psi.$$

Avem

$$\bar{n}=\bar{\nu}+S-\bar{\rho}=\bar{\nu}+\Psi.$$

e) Probabilitatea de așteptare $p(>0)$:

$$p\,(>0)=P\,(n\geqslant S)=\sum_{n=s}^{\infty} p_n,$$

$$p\,(>0)=\frac{\Psi^s}{S\,!\,(1-\Psi/S)}\,p_0.$$

f) Timpul mediu de așteptare $\bar{t}_f$ în șir:

în regim permanent avem

$$\bar{\nu}=\lambda\bar{t}_f,$$

de unde

$$\bar{t}_f=\frac{\bar{\nu}}{\lambda}=\frac{\Psi^S}{S\cdot S!\mu\,(1-\Psi/S)^2}\,p_0.$$

Șir de așteptare cu mai multe stații și număr limitat de clienți

a) Probabilitatea p_n a unui număr de n unități în sistem. Ecuațiile generale (14) ne dau:

$$p_n=C_m^n\,\Psi^n\,p_0,\quad 0\leqslant n\leqslant S,$$

$$p_n=\frac{n\,!}{S!\,S^{n-S}}\,C_m^n\Psi^n\,p_0,\ S\leqslant n\leqslant m,$$

cu $\sum_{n=0}^{m} p_n=1$. Punînd $a_n=\frac{p_n}{p_0}$ avem

$$a_0=1,$$

$$a_n=\frac{m-n+1}{n}\,\Psi a_{n-1},\ 1\leqslant n\leqslant S-1,$$

$$a_n=\frac{m-n+1}{n}\,\Psi a_{n-1},\quad S\leqslant n\leqslant m,$$

de unde

$$p_0=\frac{1}{1-\sum_{n=1}^{m} a_n}.$$

În cazul cu o staţie unică, formulele utilizate sînt

$$p_n = \frac{m!}{(m-n)!}\,\Psi^n\,p_0,$$

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{m}\frac{m!\,\Psi^n}{(m-n)!}}$$

şi $\sum_{n=0}^{m} p_n = 1.$

Avem formula de recurenţă

$$p_n(m-n+1)\,\Psi\,p_{n-1} \quad 1 \leqslant n \leqslant m.$$

b) Numărul de unităţi în şir, de staţii neocupate şi de unităţi în sistem:

$$\bar{\nu} = \sum_{n=S+1}^{m} (n-S)\,p_n;$$

$$\bar{\rho} = \sum_{n=0}^{S} (S-n)\,p_n,$$

$$\bar{n} = S + \bar{\nu} - \bar{\rho}.$$

În cazul cu staţia unică ($S=1$) formulele utilizate sînt

$$\bar{\nu} = m - \frac{1+\Psi}{\Psi}(1-p_0),$$

$$\bar{\rho} = p_0,$$

$$\bar{n} = m - \frac{1}{\Psi}(1-p_0).$$

c) Probabilitatea de aşteptare şi timpul mediu de aşteptare în şir:

$$p\,(>0) = P(n \geqslant S) = \sum_{n=S}^{m} p_n,$$

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{\nu}}{\lambda\,(m-\bar{n})} = \frac{1}{\lambda\,(m-\bar{n})} \sum_{n=S+1}^{m} (n-S)\,p_n = \frac{\bar{\nu}}{\mu\,(S-\bar{\rho})}.$$

Probleme de stocaj

Principalele elemente care intervin într-o *gestiune de stocaj* sînt:
— cererea de r articole care poate fi determinată (spre exemplu proporţională cu timpul) sau aleatoare,
— amînarea livrării τ care poate fi determinată sau aleatoare sau dependentă de volumul de comandă de reaprovizionare;
— diferite niveluri de stoc: nivel maximal, capacitate limitată de stocaj, nivel minimal, nivel de atenţie, nivel de reaprovizionare;
— diferite costuri:
cost de stocaj C_s, socotit pe articol sau pe unităţi de timp; cost de lansare C_l reprezintă cheltuielile administrative ale operaţiei de reaprovizionare;
cost de pierdere C_1 după articolele soldate cînd cererea r este inferioară stocului s;
cost suplimentar C_2 pentru aprovizionare specială dacă cererea este superioară stocului s;
— volumul de comenzi de reaprovizionare n, care poate fi constant sau variabil după regula de gestiune adoptată;
— datele de reaprovizionare t şi perioadele de gestiune T sint de asemenea constante sau variabile după regula de gestiune adoptată.

1° *Gestiune cu perioadă fixă şi cerere constantă*

Costul de lansare a unei comenzi — sau şarje — C_l este independent de numărul de articole. Cererea totală pentru un interval de timp θ este N.

Costul total pentru o şarjă este

$$C_l + \frac{1}{2}\, n\, TC_s.$$

Dacă h este cererea pe unitatea de timp avem

$$n = hT \text{ şi } \frac{N}{n} = \frac{\theta}{T}.$$

Costul global pentru intervalul de timp θ este

$$\Gamma(n) = \left(C_l + \frac{1}{2}\, nTC_s\right)\frac{N}{n} = \frac{NC_l}{n} + \frac{\theta C_s}{2}\, n.$$

Costul global este minim pentru

$$n = n_0 = \sqrt{2\frac{N}{\theta}\cdot\frac{C_l}{C_s}}.$$

Se deduce că

$$T=T_0=\frac{\theta}{N}n_0=\sqrt{2\frac{\theta}{N}\frac{C_l}{C_s}},$$

$$\Gamma_0=\Gamma(n_0)=\sqrt{2N\theta C_l C_s}.$$

2° *Gestiune cu perioadă fixă și comandă constantă cu posibilități de pierdere.*

Costul de stocare a unei șarje: $\frac{1}{2}sT_1C_s$.

Costul de lansare a unei șarje C_l.

Costul de pierdere pentru o șarje: $\frac{1}{2}(n-S)T_2C_p$.

Costul global pentru intervalul de timp θ este

$$\Gamma(n,s)=\left[\frac{1}{2}sT_1C_s+C_l+\frac{1}{2}(m-s)T_2C_p\right]\frac{N}{n}.$$

Avem

$$\frac{N}{n}=\frac{\theta}{T},\quad T_1=\frac{s}{n}T,\quad T_2=\frac{n-s}{n}T,$$

deci

$$\Gamma(n,s)=\frac{s^2\theta C_s}{2n}+\frac{N}{n}C_l+\frac{(n-s)^2\theta}{2n}C_p.$$

Această funcție de două variabile este minimă pentru

$$n=n_0=\sqrt{2\frac{N}{\theta}\cdot\frac{C_l}{C_s}}\sqrt{\frac{C_s+C_p}{C_p}},$$

$$s=s_0=n_0\frac{C_p}{C_s+C_p}.$$

Rezultă

$$T_0=\sqrt{2\frac{\theta}{N}\cdot\frac{C_l}{C_s}}\sqrt{\frac{C_s+C_p}{C_p}};\quad \Gamma_0=\sqrt{2N\theta C_sC_l}\sqrt{\frac{C_p}{C_s+C_p}}.$$

3° *Gestiune cu perioadă fixă si cerere aleatoare cu posibilități de pierdere.*

Fie $p(r)$ probabilitatea unei cereri totale r. Valoarea medie a costului total al stocului pentru o perioadă T este

$$\Gamma(s)=TC_s\sum_{r=0}^{s}\left(s-\frac{r}{2}\right)p(r)+TC_s\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{s^2}{r}p(r)+TC_p\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(r-s)^2}{r}p(r).$$

Minimul are loc pentru o valoare s_0 astfel ca

$$L(s_0-1)<\rho<L(s_0)$$

unde $\rho=\dfrac{C_p}{C_s+C_p}$ și

$$L(s)=p(r\leqslant s)+\left(s+\frac{1}{2}\right)\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{p(r)}{r},$$

$$p(r\leqslant s)=p(0)+p(1)+p(2)+\cdots+p(s).$$

PROBLEME

1. Să se determine

$$[\text{Max}]\ Z=3x_1+2x_2+x_3+x_4+5x_5 \tag{1}$$

cu restricțiile

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+x_3-x_5&=3\\ x_1+x_2-3x_4&=-12\\ x_2+x_3+x_5&=4 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

R. Matricea sistemului de restricții este

$$A=\left\|\begin{matrix} 3 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$$

iar matricea (A, B) este

$$(A, B)=\left\|\begin{matrix} 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 & -12\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{matrix}\right\|.$$

Avem rang $A=$rang $(A, B)=3$, deci sistemul (2) este compatibil.
Considerăm o soluție de bază, arbitrar aleasă; fie aceasta

$$x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=\frac{7}{2},\ x_4=4,\ x_5=\frac{1}{2}.$$

Acestei soluții îi corespunde valoarea lui Z:

$$Z=3\cdot 0+2\cdot 0+1\cdot\frac{7}{2}+1\cdot 4+5\cdot\frac{1}{2}=10.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie vectorii A_i $(i=3, 4, 5)$ liniar independenți. Putem deci considera că o bază a spațiului condițiilor este formată din acești vectori. Avem

$$A_j = \sum_{i=3}^{5} x_{ij} A_i, \quad (j=1, 2)$$

sau

$$\begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \\ x_{51} & x_{52} \end{Vmatrix}.$$

De aici obținem pentru coeficienții x_{ij} valorile

$$\begin{Vmatrix} x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \\ x_{51} & x_{52} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}.$$

Cantitățile Z_j sînt date de relațiile

$$Z_j = \sum_{i=1}^{3} x_{ij} c_i, \qquad (j=1, 2).$$

Rezultă

$$\|Z_1 Z_2\| = \|1 \quad 1 \quad 5\| \cdot \begin{Vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\frac{19}{3} & \frac{8}{3} \end{Vmatrix}.$$

Cantitățile $\Delta_j = c_j - Z_j$ corespunzătoare sînt

$$c_1 - Z_1 = 3 + \frac{19}{3} = \frac{28}{3}; \quad c_2 - Z_2 = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Avînd o diferență pozitivă, soluția aleasă nu este optimă.

Vom încerca să determinăm o soluție realizabilă de bază. Pentru $j=1$ diferența $c_1 - Z_1$ este pozitivă, deci introducem un coeficient nenul pentru vectorul A_1. Pentru determinarea acestui coeficient calculăm rapoartele $\frac{x_i}{x_{i1}}$ și alegem indicele i pentru care obținem cea mai mică valoare pozitivă.

$$\frac{x_3}{x_{31}} = \frac{7}{3}, \quad \frac{x_4}{x_{41}} = -12, \quad \frac{x_5}{x_{51}} = -\frac{1}{3},$$

deci $\theta_0 = \frac{7}{3}$. Noua soluție este

$$x_1' = \theta_0 = \frac{x_3}{x_{31}} = \frac{7}{3}, \quad x_2' = 0, \quad x_3' = 0,$$

$$x_4' = x_4 - \frac{x_3}{x_{31}} \cdot x_{41} = \frac{43}{9}, \quad x_5' = x_5 - \frac{x_3}{x_{31}} \cdot x_{51} = 4.$$

Pentru această soluție valoarea lui Z este

$$Z = 3 \cdot \frac{7}{3} + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{43}{9} + 5 \cdot 4 = 31 + \frac{7}{9}.$$

Se verifică că

$$Z = Z_0 + \theta_0 (c_1 - Z_1) = 10 + \frac{7}{3} \cdot \frac{28}{3} = 31 + \frac{7}{9}$$

și

$$\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{7}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{43}{9} \\ 4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 \\ -12 \\ 4 \end{Vmatrix}.$$

Transformarea dată de vectorii 2 și 3 este

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{42} & x_{43} \\ x_{52} & x_{53} \end{Vmatrix}.$$

(2) (3) (1) (4) (5)

De aici rezultă

$$\begin{Vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{42} & x_{43} \\ x_{52} & x_{53} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -2/9 & 2/9 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\| Z_2 Z_3 \| = \| 3 \quad 1 \quad 5 \| \cdot \begin{Vmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -2/9 & 2/9 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{52}{9} & \frac{65}{9} \end{Vmatrix}.$$

Cantitățile Δ_j corespunzătoare sînt

$$c_2 - Z_2 = -\frac{34}{9} < 0, \quad c_3 - Z_3 = -\frac{56}{9} < 0.$$

Aceste cantități fiind negative, rezultă că soluția găsită este optimă, iar valoarea lui

$Z=31+\frac{7}{9}$ obținută pentru

$$x_1=\frac{7}{3},\ x_2=0,\ x_3=0,\ x_4=\frac{43}{9},\ x_5=4$$

corespunde maximului.

2. 1° Să se determine prin metoda simplex

$$[\text{Max}]\ Z=60x_1+60x_2+90x_3+90x_4$$

supusă la condițiile

$$\left.\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3+x_4\leqslant 15\\ &7x_1+5x_2+3x_3+2x_4\leqslant 1\\ &3x_1+5x_2+10x_3+15x_4\leqslant 1. \end{aligned}\right\}$$

2° Să se dea programul dual.

3° Care este soluția optimă a programului dual considerat la punctul 2°?

4° Înlocuind ultima inecuație prin

$$3x_1+5x_2+10x_3+15x_4=1,$$

care este maximul lui Z?

R. 1° În membrul întîi al inecuațiilor sistemului se adaugă variabilele de abatere x_5, x_6 x_7 și se obține sistemul

$$\left.\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15\\ &7x_1+5x_2+3x_3+2x_4+x_6=1\\ &3x_1+5x_2+10x_3+15x_4+x_7=1 \end{aligned}\right\}$$

adică

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 7 & 5 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 10 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 15\\ 1\\ 1 \end{Vmatrix}$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

O soluție evidentă este

$$x_1=x_2=x_3=x_4=0,\ x_5=15,\ x_6=1,\ x_7=1;$$

ea dă pentru funcția economică valoarea $Z=0$.

Baza este constituită de vectorii-coloane (5), (6) și (7). Putem scrie

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 7 & 5 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 10 & 15 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54}\\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64}\\ x_{71} & x_{72} & x_{73} & x_{74} \end{Vmatrix}.$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

De aici rezultă

$$\begin{Vmatrix} x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} \\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} \\ x_{71} & x_{72} & x_{73} & x_{74} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 10 & 15 \end{Vmatrix} = \|a\| .$$

În acest caz particular obținem

$$\| Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \| = \| Z_5 Z_6 Z_7 \| \cdot \| a \| = \| 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \|,$$

deoarece

$$\| Z_5 \; Z_6 \; Z_7 \| = \| 0 \quad 0 \quad 0 \|.$$

Se deduce

$$\begin{aligned} c_1 - Z_1 &= 60 - 0 = 60, \\ c_2 - Z_2 &= 60 - 0 = 60, \\ c_3 - Z_3 &= 90 - 0 = 90, \\ c_4 - Z_4 &= 90 - 0 = 90. \end{aligned}$$

Examinarea acestor rezultate permite constatarea că se poate alege între introducerea coloanei (3) sau (4) în bază.

1) Presupunem că introducem în bază pe A_3; avem

$$\frac{x_i}{x_{i3}} : \quad \frac{x_5}{x_{53}} = \frac{15}{1}, \qquad \frac{x_6}{x_{63}} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{x_7}{x_{73}} = \frac{1}{10},$$

de unde deducem că trebuie să scoatem din bază pe A_7.

2) Dacă introducem în bază pe A_{42} avem

$$\frac{x_i}{x_{i4}} : \quad \frac{x_5}{x_{54}} = \frac{15}{1}, \qquad \frac{x_6}{x_{64}} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{x_7}{x_{74}} = \frac{1}{15},$$

de unde rezultă că trebuie scos din bază tot A_7. Dar

$$Z = Z_0 + \theta_0 (c_j - Z_j)$$

aici, cu $c_j - Z_j = 90$; trebuie ales deci θ_0 cît mai mare pentru a mări valoarea funcției economice. Prin urmare, se introduce A_3, astfel ca

$$Z = 0 + \frac{1}{10} \cdot 90 = 9.$$

Avem pentru noua soluție

$$x_1' = 0, \quad x_2' = 0, \quad x_3' = \theta_0 = \frac{1}{10}, \quad X_4' = 0,$$

$$x_5' = x_5 - \theta_0 x_{53} = 15 - \frac{1}{10} = \frac{149}{10},$$

$$x_6' = x_6 - \theta_0 x_{63} = 1 - \frac{1}{10} \cdot 3 = \frac{7}{10}, \quad x_7' = 0.$$

Verificînd, obținem

$$90\ x_3' = 90 \cdot \frac{1}{10} = 9.$$

Schimbarea de bază realizată permite scrierea sistemului sub forma

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{10} \\ 0 \\ \frac{149}{10} \\ \frac{7}{10} \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Cu noua bază (5), (6), (3) se poate calcula

$$\underset{(1)\ (2)\ (7)\ (4)}{\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 15 \end{Vmatrix}} = \underset{(5)\ (6)\ (3)}{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 \end{Vmatrix}} \cdot \begin{Vmatrix} x_{51} & x_{52} & x_{57} & x_{54} \\ x_{61} & x_{62} & x_{67} & x_{64} \\ x_{31} & x_{32} & x_{37} & x_{34} \end{Vmatrix}.$$

Avem

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 15 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 7/10 & 5/10 & -1/10 & -5/10 \\ 61/10 & 35/10 & -3/10 & -25/10 \\ 3/10 & 5/10 & 1/10 & 15/10 \end{Vmatrix} = \|b\|$$

și

$$\| Z_1\ Z_2\ Z_7\ Z_4 \| = \| Z_5\ Z_6\ Z_3 \| \cdot \| b \| = \| 0 \quad 0 \quad 90 \| \cdot \| b \| = \| 27 \quad 45 \quad 9 \quad 135 \| .$$

Se calculează apoi

$$\begin{aligned} c_1 - Z_1 &= 60 - 27 = 33, \\ c_2 - Z_2 &= 60 - 45 = 15, \\ c_7 - Z_7 &= 0 - 9 = -9, \\ c_4 - Z_4 &= 90 - 135 = -45. \end{aligned}$$

Aceste rezultate conduc la concluzia că trebuie să introducem în noua bază pe A_1.

Calculînd rapoartele $\dfrac{X_i}{X_{i_1}}$, obținem

$$\frac{x_i}{x_{i_1}}: \quad \frac{x_3}{x_{31}} = \frac{1/10}{3/10} = \frac{1}{3}, \quad \frac{x_5}{x_{51}} = \frac{149}{7}, \quad \frac{x_6}{x_{61}} = \frac{7}{61};$$

rezultă că trebuie să scoatem pe A_6.

Fără dificultate se obține

$$x_1' = \theta_0 = \frac{7}{61}, \quad x_2' = 0, \quad x_3' = x_3 - \theta_0 \cdot x_{31} = \frac{1}{10} - \frac{7}{61} \cdot \frac{3}{10} = \frac{4}{61}, \quad x_4' = 0.$$

$$x_5' = x_5 - \theta_0 \cdot x_{51} = \frac{149}{10} - \frac{7}{61} \cdot \frac{7}{10} = \frac{904}{61}, \quad x_6' = 0, \quad x_7' = 0.$$

Pentru funcția economică avem

$$Z = Z_1 + \theta_0 (c_1 - Z_1) = 9 + \frac{7}{61} \cdot 33 = \frac{780}{61}.$$

Sistemul se scrie sub forma

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 7/6 \\ 0 \\ 4/6 \\ 0 \\ 904/6 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\|.$$

Cu noua bază (5), (1), (3) avem

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 15 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_{56} & x_{52} & x_{57} & x_{54} \\ x_{16} & x_{12} & x_{17} & x_{14} \\ x_{36} & x_{32} & x_{37} & x_{34} \end{matrix} \right\|,$$

(6) (2) (7) (4) (5) (1) (3)

de unde

$$\left\| \begin{matrix} x_{56} & x_{52} & x_{57} & x_{54} \\ x_{16} & x_{12} & x_{17} & x_{14} \\ x_{36} & x_{32} & x_{37} & x_{34} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 7/61 & 6/61 & -4/61 & -13/61 \\ 10/61 & 35/61 & -3/61 & -25/61 \\ -3/61 & 20/61 & 7/61 & 99/61 \end{matrix} \right\| = \| c \|$$

și $\| Z_6 \; Z_2 \; Z_7 \; Z_4 \| = \| Z_5 \; Z_1 \; Z_3 \| \cdot \| c \| = \| 0 \;\; 60 \;\; 90 \| \cdot \| c \| =$

$$= \| \; 330/61 \quad 3900/61 \quad 450/61 \quad 7410/61 \; \|.$$

Cantitățile $\Delta_j = c_j - Z_j$ corespunzătoare sînt

$$c_6 - Z_6 = -\frac{330}{61}, \quad c_7 - Z_7 = -\frac{450}{61},$$

$$c_2 - Z_2 = 60 - \frac{3900}{61} = -\frac{240}{61}, \quad c_4 - Z_4 = 90 - \frac{7410}{61} = -\frac{1920}{61}.$$

Cantitățile sînt toate negative, deci soluția este optimă

$$x_1 = \frac{7}{61}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{4}{6}, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = \frac{904}{61}, \quad x_6 = 0, \quad x_7 = 0$$

cu

$$Z=\frac{780}{61}.$$

2° Programul dual se scrie astfel

	x_1	x_2	x_3	x_4	
y_1	1	1	1	1	15
y_2	7	5	3	2	1
y_3	3	5	10	15	1
	60	60	90	90	

Restricţiile sînt

$$\begin{aligned} &y_1+7\,y_2+\ 3\,y_3\geqslant 60,\\ &y_1+5\,y_2+\ 5\,y_3\geqslant 60,\\ &y_1+3\,y_2+10\,y_3\geqslant 90,\\ &y_1+2\,y_2+15\,y_3\geqslant 90. \end{aligned}$$

Funcţia economică este

$$[\text{Min}]\ F=15\,y_1+y_2+y_3.$$

3° Se ştie că soluţia este $\min F=\frac{780}{61}$ şi că rezultatul se obţine începînd cu programul primal

Variabilele duale	$-y_4$	$-y_5$	$-y_6$	$-y_7$	y_1	y_2	y_3
Variabilele primale	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
Valorile primale	$\frac{7}{61}$	0	$\frac{4}{61}$	0	$\frac{904}{61}$	0	0
Costuri marginale	0	$\frac{240}{61}$	0	$\frac{1920}{61}$	0	$\frac{330}{61}$	$\frac{450}{61}$

Valorile variabilelor programului dual sînt

$$y_1=0,\ y_2=\frac{330}{61},\ y_3=\frac{450}{61}.$$

4° Rezultatul este acelaşi deoarece $x_7=0$.

3. Să se calculeze

$$[\text{Min}]\ Z=15\,x_1+33\,x_2$$

cu restricţiile

$$\left.\begin{aligned} &3\,x_1+2\,x_2\geqslant 6\\ &6\,x_1+\ x_2\geqslant 6\\ &\ \ \ x_2\geqslant 1 \end{aligned}\right\},\quad x_j\geqslant 0,\quad (j=1,2).$$

II. Cu variabilele de abatere x_3, x_4, x_5 se obține sistemul

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+2x_2-x_3&=6\\ 6x_1+x_2-x_4&=6\\ x_2-x_5&=1 \end{aligned}\right\}, \quad x_j\geqslant 0.$$

Pornim cu soluția arbitrară

$$x_1=\frac{2}{3}, \quad x_2=2, \quad x_3=0, \quad x_4=0 \quad x_5=1,$$

$$Z=15\cdot\frac{2}{3}+33\cdot 2=76.$$

$$\begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 0\\ 6 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 6\\ 6\\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \end{matrix}$$

$$\begin{Vmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 0 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}\quad\begin{Vmatrix} x_{13} & x_{14}\\ x_{23} & x_{24}\\ x_{53} & x_{54} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 1/9 & 2/9\\ -2/3 & 1/3\\ -2/3 & 1/3 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{matrix} (3) & (4) & (1) & (2) & (5) \end{matrix}$$

$$\|Z_3\ Z_4\|=\|15\ 33\ 0\|\cdot\begin{Vmatrix} 1/9 & -2/9\\ -2/3 & 1/3\\ -2/3 & 1/3 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} -\frac{61}{3} & \frac{23}{3} \end{Vmatrix},$$

$$c_3-Z_3=\frac{61}{3}, \quad c_4-Z_4=-\frac{23}{3}.$$

Alegem deci $j=4$:

$$x_1'=x_1-\frac{x_5}{x_{54}}x_{14}=\frac{2}{3}-3\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)=\frac{4}{3},$$

$$x_2'=x_2-\frac{x_5}{x_{54}}x_{24}=2-3\cdot\frac{1}{3}=1,$$

$$x_3'=0, \quad x_4'=\frac{x_5}{x_{54}}=3, \quad x_5'=0.$$

Cu aceste valori funcția economică este

$$Z=15\cdot\frac{4}{3}+33\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 3+0\cdot 0=53.$$

Verificare:

$$\begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{Vmatrix},$$

$$Z = Z_0 + \theta_0 (c_4 - Z_4) = 76 + 3 \cdot \left(-\frac{23}{3} \right) = 53.$$

Căutăm o nouă soluție:

$$\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_{13} & x_{15} \\ x_{23} & x_{25} \\ x_{43} & x_{45} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix},$$

(3) (5)

$$\|Z_3 Z_5\| = \|15 \quad 33 \quad 0\| \cdot \begin{Vmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix} = \|-5 \quad -23\|.$$

Diferențele

$$c_3 - Z_3 = 5, \quad c_5 - Z_5 = 23$$

fiind pozitive, rezultă că valoarea $Z = 53$ este minimul căutat.

4. Să se rezolve prin metoda tablourilor problema

$$[\text{Max}]\ Z = 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 6x_5,$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_3 - x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_4 &= -12 \\ x_2 + x_3 + x_5 &= 4. \end{aligned}\right\}$$

R. Cu adăugarea variabilelor artificiale x_6, x_7, x_8 avem

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_3 - x_5 + x_6 &= 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_4 - x_7 &= -12 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_8 &= 4. \end{aligned}\right\}$$

Notăm că variabilele artificiale sînt afectate de semnul corespunzător al membrului doi. Putem începe cu soluția particulară

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, \quad x_6 = 3, \quad x_7 = 12, \quad x_8 = 4.$$

$$Z = 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 6x_5 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8$$

unde M este o cantitate arbitrară foarte mare.

Vom vedea că nu este util să fixăm o valoare a lui M.

Scanned with OKEN Scanner

Avem tabloul

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	B
	(6)	3	0	1	0	−1	1	0	0	3
	(7)	−1	−1	0	3	0	0	1	0	12
	(8)	0	1	1	0	1	0	0	1	4
c_j		4	3	−1	2	6	$-M$	$-M$	$-M$	Z

Pentru a efectua prima iterare și a elimina prioritatea variabilelor artificiale, vom face să apară zero sub matricea unitate, în linia c_j. Pentru aceasta adăugăm fiecărui c_j cantitatea

$$(a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{mj})M$$

și lui Z cantitatea

$$(b_1+b_2+\cdots+b_m)\,M.$$

Obținem tabloul

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	
	(6)	3	0	1	0	−1	1	0	0	3
$s\rightarrow$	(7)	−1	−1	0	3	0	0	1	0	12
	(8)	0	1	0	0	1	0	0	1	4
Δ_j		$2M+4$	3	$2M-1$	$3M+2$	6	0	0	0	$Z+19M$
					$\uparrow e$					

Introducem în bază vectorul A_4 și scoatem vectorul A_7:

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	X
$s\rightarrow$	(6)	3	0	1	0	−1	1	0	0	3
	(4)	−1/3	−1/3	0	1	0	0	1/3	0	4
	(8)	0	1	−1	0	1	0	0	1	4
Δ_j		$3M+\frac{14}{3}$	$M+\frac{11}{3}$	$2M-1$	0	6	0	$M-\frac{2}{3}$	0	$Z+7M-8$
		$\uparrow e$								

Introducem în bază vectorul A_1 și scoatem vectorul A_6

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	X
	(1)	1	0	1/3	0	−1/3	1/3	0	0	1
	(4)	0	−1/9	1/9	1	−1/9	1/9	1/3	0	$\frac{13}{3}$
$s\rightarrow$	(8)	0	1	1	0	1	0	0	1	4
Δ_j		0	$M+\frac{11}{3}$	$M-\frac{23}{9}$	0	$M+\frac{68}{9}$	$-M-\frac{14}{9}$	$-M-\frac{2}{3}$	0	$Z+4M-\frac{38}{3}$.
						$\uparrow e$				

Introducem în bază vectorul A_5 și scoatem vectorul A_8. Avem tabloul

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	X
(1)	1	1/3	2/3	0	0	1/3	0	1/3	7/3
(4)	0	$-\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	1	0	1/9	1/3	1/9	43/9
(5)	0	1	1	0	1	0	0	1	4
Δ_j	0	$-\frac{35}{9}$	$-\frac{91}{9}$	0	0	$-M-\frac{14}{9}$	$-M-\frac{2}{3}$	$M-\frac{68}{9}$	$Z-\frac{386}{9}$.

Nu avem nici o cantitate Δ_j pozitivă. Algoritmul s-a terminat. Soluția optimă este

$$x_1=\frac{7}{3},\ x_2=x_3=0,\ x_4=\frac{43}{9},\ x_5=4,\ x_6=x_7=x_8=0,$$

iar funcția economică

$$Z=\frac{386}{9}.$$

5. Un importator de vin dispune de o piață nelimitată dar se află restrîns prin reglementarea importurilor asupra cantităților lunare maximale autorizate, care se stabilesc astfel:

vin categoria I cel mult 2000 butelii a 35 lei,
vin categoria II cel mult 2500 butelii a 25 lei,
vin categoria III cel mult 1200 butelii a 20 lei.

El efectuează trei amestecuri A, B și C vîndute la prețurile respective de 34, 28,5 și 22,5 lei butelia. Aceste amestecuri se fac astfel:

A { nu mai puțin de 60% vin categoria I,
nu mai mult de 20% vin categoria III,

B { nu mai puțin de 15% vin categoria I,
nu mai mult de 60% vin categoria III,

C { nu mai mult de 50% vin categoria III.

Să se determine amestecurile care dau beneficii maxime.

R. Calitatea C nu conține mai mult de 50% vin categoria III; deci ea trebuie să conțină 50% vin categoria II, dar în aceste condiții ea este vîndută la prețul de cumpărare; acest procedeu nu are semnificație economică.

Notăm x_{11} cantitatea de vin categoria I, x_{12} cea de vin categoria II și x_{13} cantitatea de vin categoria III conținute în amestecul A; pe x_{21}, x_{22} și x_{23} cantitățile corespunzătoare conținute în amestecul B.

Funcția economică se scrie

$$Z=34\ (x_{11}+x_{12}+x_{13})+28{,}5\ (x_{21}+x_{22}+x_{23})-35\ (x_{11}+x_{21})\ -25(x_{12}+x_{22})-$$
$$-20\ (x_{13}+x_{23})=-x_{11}+9x_{12}+14x_{13}-6{,}5x_{21}+3{,}5x_{22}+8{,}5x_{23}.$$

Restricțiile sînt următoarele:

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{21}&\leqslant 2000\\ x_{12}+x_{22}&\leqslant 2500\\ x_{13}+x_{23}&\leqslant 1200 \end{aligned}\right\}\ \text{și}\quad \left.\begin{aligned} x_{11}&\geqslant 0{,}60\ (x_{11}+x_{12}+x_{13})\\ x_{13}&\leqslant 0{,}20\ (x_{11}+x_{12}+x_{13})\\ x_{23}&\leqslant 0{,}60\ (x_{21}+x_{22}+x_{23})\\ x_{21}&\geqslant 0{,}15\ (x_{21}+x_{22}+x_{23}) \end{aligned}\right\}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{21}&\leqslant 2000\\ x_{12}+x_{22}&\leqslant 2500\\ x_{13}+x_{23}&\leqslant 1200 \end{aligned}\right\}\ \text{și}\quad \left.\begin{aligned} 3x_{12}+3x_{13}-2x_{11}&\leqslant 0\\ 4x_{13}-x_{11}-x_{12}&\leqslant 0\\ 2x_{23}-3x_{21}-3x_{22}&\leqslant 0\\ 3x_{22}+3x_{23}-17x_{21}&\leqslant 0 \end{aligned}\right\}.$$

Avem 13 necunoscute și 7 restricții, deci cel puțin 6 variabile nule. Tabloul de plecare este următorul:

	(1) x_{11}	(2) x_{12}	(3) x_{13}	(4) x_{21}	(5) x_{22}	(6) x_{23}	(7) x_1	(8) x_2	(9) x_3	(10) x_4	(11) x_5	(12) x_6	(13) x_7	B
(7)	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2000
(8)	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	2500
(9)	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1200
(10)	−2	3	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
(11)	−1	−1	4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
(12)	0	0	0	−3	−3	2	0	0	0	0	0	1	0	0
(13)	0	0	0	−17	3	3	0	0	0	0	0	0	1	0
c_j	−1	9	14	−6,5	3,5	8,5	0	0	0	0	0	0	0	Z

Ne aflăm în cazul în care de la începutul calculului cîteva din elementele coloanei B sînt nule. Pentru a determina fără dificultate soluția, vom înlocui în coloana B pe zero cu valorile ε care tind către zero și dispar după cîteva iterații. În aceste condiții, Z rămîne egal cu zero (deoarece $\varepsilon=0$) în primele patru iterații.

Iterația 1. Se înlocuiește A_3 prin A_{11} deoarece la A_3 corespunde costul c_j cel mai mare (14) și la A_{11} valoarea pozitivă $\frac{b_i}{a_{i3}}$ este cea mai slabă $\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$.

Iterația 2. Se înlocuiește A_{10} prin A_{12} în bază $\left(\Delta_2=\frac{25}{2},\ \frac{x_i}{a_{i2}}>0\right.$ cel mai slab corespunde la A_{10}: $\left.\frac{\varepsilon}{15}\right)$.

Iterația 3. Se înlocuiește în bază A_{13} prin A_6. $\left(\Delta_6=8{,}5,\ \frac{x_i}{a_{i6}}>0\right.$ cel mai slab corespunde la A_{13}: $\left.\frac{\varepsilon}{3}\right)$.

Iterația 4. Se înlocuiește A_{12} prin A_4 $\left(\Delta_4 = \dfrac{125}{3},\ \dfrac{x_i}{a_{i4}} > 0 \text{ cel mai slab corespunde la } A_{12}:\ \dfrac{\varepsilon}{25}\right)$.

Tabloul obținut este:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	X
(7)	1	0	0	0	3/5	0	1	0	0	0	0	− 3/25	2/25	2000
(8)	1/3	0	0	0	1	0	0	1	0	−4/15	1/5	0	0	2500
(9)	1/3	0	0	0	12/5	0	0	0	1	−1/15	1/5	−17/25	3/25	1200
(2)	−1/3	1	0	0	0	0	0	0	0	4/15	1/5	0	0	0
(3)	−1/3	0	1	0	0	0	0	0	0	1/15	1/5	0	0	0
(4)	0	0	0	1	− 3/5	0	0	0	0	0	0	3/25	−2/25	0
(6)	0	0	0	0	−12/25	1	0	0	0	0	0	17/25	−3/25	0
Δj	20/3	0	0	0	20 ↑ e	0	0	0	0	−10/3	−1	−5	1/2	$Z-0$

Iterația 5. Înlocuim A_9 prin A_5.

Iterația 6. Înlocuim A_7 prin A_1 $\left(\Delta_1 = \dfrac{35}{9},\ \min \dfrac{x_i}{a_{i1}} = \dfrac{12 \times 1\,700}{11} > 0\right)$.

Iterația 7. Se înlocuiește A_8 prin A_{12} $\left(\Delta_{12} = \dfrac{5}{11},\ \min \dfrac{x_i}{a_{i12}} = 447 > 0\right)$.

Se constată că toți Δ_j sînt negativi, am obținut deci soluția optimă

$$x_{11} = 1\,527;\ x_{12} = 509;\ x_{13} = 509;\ x_{21} = 473;\ x_{22} = 1991;\ x_{23} = 691,$$

iar celelalte variabile sînt zero în afară de $x_6 = 6011$ și $Z = 19\,940$ lei.

6. O întreprindere fabrică, la o mașină dată, lucrînd 45 ore pe săptămînă, trei produse diferite P_1, P_2 și P_3. Articolul P_1 lasă un venit net de 4 lei, articolul P_2 un venit de 12 lei și articolul P_3 un venit de 3 lei. Randamentele orare ale mașinii sînt, respectiv pentru fiecare din cele trei produse, în ordine: 50, 25 și 75. În sfîrșit vînzările posibile sînt limitate astfel: 1000 obiecte P_1, 500 obiecte P_2 și 1500 obiecte P_3. Cum se repartizează producția pentru a maximiza venitul intreprinderii?

R. Dacă notăm cu x_1 cantitatea fabricată din produsul P_1, x_2 cantitatea corespunzătoare de P_2 și x_3 cea relativă la P_3, restricțiile problemei sînt

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\leqslant 1\,000 \\ x_2 &\leqslant 500 \\ x_3 &\leqslant 1\,500 \end{aligned}\right\}, \text{ restricții de producție maximă.}$$

$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{25}x_2 + \frac{1}{75}x_3 \leqslant 45 \quad \text{restricție de timp disponibil}$$

Scanned with OKEN Scanner

și funcția de maximizat

$$Z=4x_1+12x_2+3x_3.$$

Economic vorbind, putem face următorul raționament: fabricînd cu precădere produsul al cărui randament monetar orar este ridicat, apoi în restul timpului disponibil cel al cărui randament este pe locul al doilea și apoi ultimul. Randamentul monetar se ordonează astfel:

$$P_2\text{: } 300 \text{ lei/h}; \quad P_3\text{: } 225 \text{ lei/h}; \quad P_1\text{: } 200 \text{ lei/h},$$

convenind în consecință să se fabrice cantitățile următoare:

$$P_2\text{: } x_2=500; \quad P_3\text{: } x_3=1\,500; \quad P_1\text{: } x_1=250$$

pentru a obține venitul maxim

$$\max Z=1000+6000+4500+11\,500 \text{ lei}.$$

Metoda programării liniare duce evident la același rezultat.

Introducînd variabilele de abatere x_4, x_5, x_6 și x_7, sistemul se scrie

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_4&=1000\\ x_2+x_5&=500\\ x_3+x_6&=1500\\ 3x_1+6x_2+2x_3+x_7&=6750 \end{aligned}\right\}$$

$$[\text{Max}]\ Z=4x_1+12x_2+3x_3.$$

Avem:

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	B
$s\rightarrow$	(4)	1	0	0	1	0	0	0	1000
	(5)	0	1	0	1	1	0	0	500
	(6)	0	0	1	0	0	1	0	1500
	(7)	3	6	2	0	0	0	1	6750
	c_j	4	12 ↑ e	3	0	0	0	0	Z

									X
$s\rightarrow$	(4)	1	0	0	1	0	0	0	1000
	(2)	0	1	0	0	1	0	0	500
	(6)	0	0	1	0	0	1	0	1500
	(7)	3	0	2	0	−6	0	1	3750
	Δ_j	4 ↑ e	0	3	0	−12	0	0	$Z-6000$

								X
	(1)	1	0	0	1	0	0	1000
	(2)	0	1	0	0	1	0	500
	(6)	0	0	1	0	0	1	1500
s →	(7)	0	0	2	−3	−6	0	750
	Δ_j	0	0	3	−4	−12	0	$Z-10\,000$
				↑ e				

								X
	(1)	1	0	0	0	0	0	1000
s	(2)	0	1	0	0	1	0	500
→	(6)	0	0	0	3/2	3	1	−1/2	1125
	(3)	0	0	1	−3/2	−3	0	1/2	375
	Δ_j	0	0	0	1/2	−3	0	−3/2	$Z-11\,125$
					↑ e				

								X
	(1)	1	0	0	0	−2	−2/3	1/3	250
	(2)	0	1	0	0	1	0	0	500
	(4)	0	0	0	1	2	2/3	−1/3	750
	(3)	0	0	1	0	0	1	0	1500
	Δ_j	0	0	0	0	−4	−1/3	−4/3	$Z-11\,500$

Toate costurile marginale Δ_j sînt negative, deci am obținut soluția optimă: $x_1=250$; $x_2=500$; $x_3=1\,500$; $x_4=750$ (adică nu se fabrică 750 obiecte P_1); $x_5=x_6=x_7=0$ (adică se fabrică toate obiectele P_2 și P_3 și se utilizează tot timpul disponibil). Valoarea venitului net total este

$$Z=11\,500.$$

7. O uzină este compusă din trei ateliere A, B, C și fabrică trei produse 1, 2, 3 în cantități lunare x_1, x_2, x_3 determinate. Cele trei ateliere se limitează respectiv la 2766, 624 și 416 ore de muncă lunar.

Produsul 1 se convine să se desfășoare astfel:

Atelierele succesive	A	C	B	C
Randamente orare	0,357	30	12	15

Produsul 2 se desfășoară astfel:

Atelierele succesive	A	B	C
Randamente orare	0,286	12	15

Produsul 3 :

Atelierele succesive	B	C
Randamente orare	9,6	12

Cererile lunare pentru cele trei produse sînt respectiv de 250, 1250 și 1500. O cerere nesatisfăcută nu implică penalizare specială. Veniturile unitare respective după cele trei produse sînt 350, 250 și 400. Să se găsească programul care asigură un cîștig maxim.

R. Avem schema din fig. IX.7, *a*; x_1, x_2, x_3 sînt cantitățile necunoscute. Programul se scrie

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x_1}{0{,}357}+\frac{x_2}{0{,}286}\leqslant 2766,\\ &\frac{x_1}{12}+\frac{x_2}{12}+\frac{x_3}{9{,}6}\leqslant 624\\ &\frac{x_1}{30}+\frac{x_1}{15}+\frac{x_2}{15}+\frac{x_3}{12}\leqslant 416\\ &0\leqslant x_1\leqslant 250\\ &0\leqslant x_2\leqslant 1250\\ &0\leqslant x_3\leqslant 1500 \end{aligned}\right\}$$

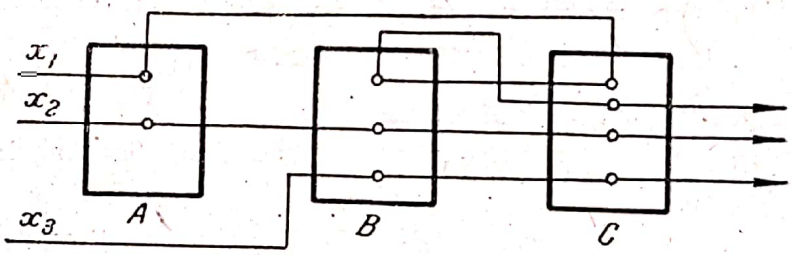


Fig. XI.7, a

$$[\text{Max}]Z=350\,x_1+250\,x_2+400\,x_3.$$

Scriem

$$\frac{x_1}{357}+\frac{x_2}{286}\leqslant 2{,}766, \qquad (1)$$

$$8\,x_1+8\,x_2+10\,x_3\leqslant 96\cdot 624 \text{ sau } 4\,x_1+4\,x_2+5\,x_3\leqslant 29\,952, \qquad (2)$$

$$2\,x_1+4\,x_1+4\,x_2+5\,x_3\leqslant 60\cdot 416 \text{ sau } 6\,x_1+4\,x_2+5\,x_3\leqslant 24. \qquad (3)$$

Restricția (3) este mai puternică ca (2), care poate fi suprimată. Dar

$$(4)\ x_1\leqslant 250; \quad (5)\ x_2\leqslant 1250; \quad (6)\ x_3\leqslant 1500$$

Scanned with OKEN Scanner

sînt astfel că

$$6 \cdot 250+4 \cdot 1250+5 \cdot 1500=14\,000 \leqslant 24\,960.$$

Deci restricţiile (4), (5) şi (6) sînt mai puternice ca (3) care poate fi suprimată. Rezultă deci programul liniar:

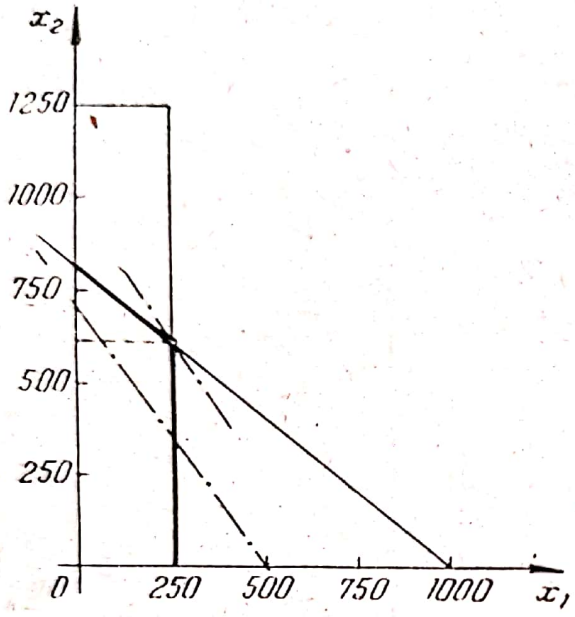


Fig. IX.7, b

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1}{357}+\frac{x_2}{286} &\leqslant 2{,}766 \\ x_1 &\leqslant 250 \\ x_2 &\leqslant 1250 \\ x_3 &\leqslant 1500 \end{aligned}\right\}$$

$$[\text{Max}]\ Z=350\,x_1+250\,x_2+400\,x_3.$$

Pe de altă parte, nimic nu interzice să luăm $x_3=1\,500$, de unde

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1}{357}+\frac{x_2}{286} &\leqslant 2{,}766 \\ x_1 &\leqslant 250 \\ x_2 &\leqslant 1250 \end{aligned}\right\}$$

$$[\text{Max}]\ Z'=350\,x_1+250\,x_2.$$

Avem 5 variabile dintre care trei variabile abatere şi trei restricţii

$$N=5,\ M=3,\ N-M=2;$$

soluţia avînd cel puţin două variabile nule.

Căutăm soluţia grafic în spaţiul cu două dimensiuni. Trasăm dreptele $x_1=250$; $x_2=1\,250$ şi domeniul

$$\frac{x_1}{357}+\frac{x_2}{286} \leqslant 2{,}766,$$

a cărui frontieră trece prin punctele (fig. IX.7, *b*)

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=791{,}076 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} x_1=987{,}462 \\ x_2=0. \end{cases}$$

Se vede pe figură că $x_1=250$. Atunci

$$\frac{250}{357}+\frac{x_2}{286}=2{,}766$$

şi $x_2=590{,}876$. Rezultă

$$\max Z=835\,219 \text{ lei.}$$

8. Să se rezolve problema de programare liniară parametrică:

$$[\text{Max}]\ Z=4\,(1+\lambda)\,x_1+2\,x_2$$

cu restricţiile

$$\left.\begin{aligned} &0\leqslant x_1\leqslant 6\\ &0\leqslant x_2\leqslant 8\\ &3\,x_1+2\,x_2\leqslant 10. \end{aligned}\right\}$$

R. Vom pleca, pentru a face să varieze λ, de la soluţia optimală obţinută pentru $\lambda=0$ şi anume

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	B
	(3)	1	0	1	0	0	6
	(4)	0	1	0	1	0	8
$s\rightarrow$	(5)	3	2	0	0	1	10
	c_j	4	2	0	0	0	Z
		$\uparrow e$					

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	X
	(3)	0	$-2/3$	1	0	$-1/3$	$8/3$
	(4)	0	1	0	1	0	8
	(1)	1	$2/3$	0	0	$1/3$	$10/3$
	Δ_j	0	$-2/3$	0	0	$-4/3$	$Z=\frac{40}{3}$.

Toţi Δ_j sînt negativi, deci soluţia optimală a fost obţinută printr-o singură iteraţie. Transformăm această soluţie introducînd parametrul λ;

c_i		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	X
0	(3)	0	$-2/3$	1	0	$-1/3$	$8/3$
0	(4)	0	1	0	1	0	8
$4(1+\lambda)$	(1)	1	$2/3$	0	0	$1/3$	$10/3$
	c_j	$4\,(1+\lambda)$	2	0	0	0	

Rezultă

$$\Delta_1=4\,(1+\lambda)-4\,(1+\lambda)=0,$$

$$\Delta_2=2-\left[-\frac{2}{3}\cdot 0+1\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot 4\,(1+\lambda)\right]=-\frac{2}{3}-\frac{8}{3}\,\lambda,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\Delta_3 = 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_4 = 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_5 = 0 - \left[-\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 4\,(1+\lambda) \right] = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\lambda$$

și

$$Z = \frac{10}{3} \cdot 4(1+\lambda) = \frac{40}{3} + \frac{40}{3}\lambda,$$

de unde rezultă tabloul modificat:

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	X
(3)		0	$-2/3$	1	0	$-1/3$	$8/3$
(4)		0	1	0	1	0	8
(5)		1	$2/3$	0	0	$1/3$	$10/3$
Δ_j		$0-\frac{2}{3}-\frac{8}{3}\lambda$		0	0	$-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\lambda$	$Z=\frac{40}{3}+\frac{40}{3}\lambda$

Vom examina ce se întîmplă pentru $0 \leqslant 4\,(1+\lambda) < +\infty$, adică pentru $-1 \leqslant \lambda < +\infty$.

λ	-1		$-1/4$		$+\infty$
$-\frac{2}{3}-\lambda\frac{8}{3}$		$+$	0	$-$	
$-\frac{4}{3}-\lambda\frac{4}{3}$	0	$-$		$-$	
	(2) intră în bază		soluția anterioară		

Dacă $-1 < \lambda \leqslant -\frac{1}{4}$,

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	X
(3)		0	$-2/3$	1	0	$-1/3$	6
(4)		0	1	0	1	0	3
$s \rightarrow$ (1)		1	$2/3$	0	0	$1/3$	5
		$0 - \frac{2}{3} - \frac{8}{3}\lambda$		0	$0-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\lambda$		$Z-10$
		$\uparrow e$					

Noul optimum este atins (fig. IX.8), în rezumat:

λ	-1	$-1/4$	$+\infty$
c_1	0	3	$+\infty$
x_1	0		10/3
x_2	5		0
x_3	6		8/3
x_4	3		8
x_5	0		0
Z	10	$\downarrow$	$\frac{40}{3}+\frac{40}{3}\lambda$
		10	

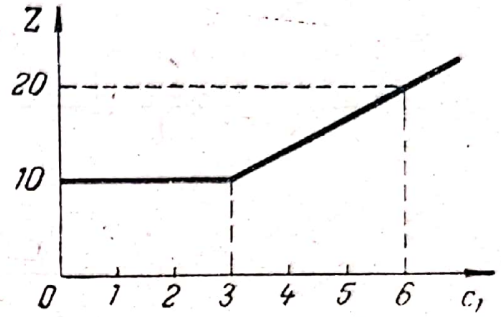


Fig. IX.8

9. Să se rezolve programul liniar parametric:

$$[\text{Max}]\ Z=15\,x_1+10\,x_2,$$

$$\left.\begin{array}{c} 0\leqslant x_1\leqslant 3 \\ 0\leqslant x_2\leqslant 5 \\ 2\,x_1+x_2\leqslant 6\,(1+\lambda) \end{array}\right\}$$

R. Plecăm de la soluția optimală obținută pentru $\lambda=0$:

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	B
	(3)	1	0	1	0	0	3
$s\rightarrow$	(4)	0	1	0	1	0	5
	(5)	2	1	0	0	1	6
	c_j	15	10	0	0	0	Z
		$\uparrow e$					

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	X
	(3)	0	$-1/2$	1	0	$-1/2$	ε
$s\rightarrow$	(4)	0	1	0	1	0	5
	(1)	1	1/2	0	0	1/2	3
	Δ_j	0	5/2	0	0	$-15/2$	$Z-45$
			$\uparrow e$				

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	X
(3)		0	0	1	1/2	−1/2	5/2
(2)		0	1	0	1	0	5
(1)		1	0	0	−1/2	1/2	1/2
Δ_j		0	0	0	−5/2	−15/2	$Z-\frac{115}{2}$

A fost atinsă valoarea optimă. Matricea optimală a programului dual se scrie:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	Y
(2)	−1/2	1	0	1/2	−1	5/2
(3)	1/2	0	1	−1/2	0	15/2
Δ_j	5/2	0	0	1/2	5	$Z-\frac{115}{2}$

Transformăm această soluție introducînd parametrul λ:

c_i		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	Y
5	(2)	−1/2	1	0	1/2	−1	5/2
$6(1+\lambda)$	(3)	1/2	0	1	−1/2	0	15/2
	c_j	3	5	$6(1+\lambda)$	0	0	

Avem:

$$\Delta_1=3-\left[-\frac{1}{2}\cdot 5+\frac{1}{2}\cdot 6(1+\lambda)\right]=\frac{5}{2}-3\lambda,$$

$$\Delta_2=5-5=0,$$

$$\Delta_3=6(1+\lambda)-6(1+\lambda)=0,$$

$$\Delta_4=0-\left[\frac{1}{2}\cdot 5-\frac{1}{2}\cdot 6(1+\lambda)\right]=\frac{1}{2}+3\lambda,$$

$$\Delta_5=0-[-5]=5$$

și

$$Z=\frac{5}{2}\cdot 5+\frac{15}{2}\cdot 6(1+\lambda)=\frac{115}{2}+45\lambda.$$

Tabloul modificat este

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	Y
(2)		−1/2	1	0	1/2	−1	5/2
(3)		1/2	0	1	−1/2	0	5/2
Δ_j		$\frac{5}{2}-3\lambda$	0	0	$\frac{1}{2}+3\lambda$	5	$Z=\frac{115}{2}+45\lambda$

Vom face să varieze b_3 între 0 şi $+\infty$, adică $-1<\lambda<+\infty$.

λ	-1	$-1/6$	$5/6$	$+\infty$
$5/2-3\lambda$	$+$	$+$	0	$-$
$1/2+3\lambda$	$-$	0	$+$	$+$
	(4) intră în bază	soluţia anterioară	(1) intră în bază	

Primul caz: $-1<\lambda<-\frac{1}{6}$. Se vede, imediat, că vectorul care intră în bază este cel al cărui Δ_j este cel mai mic număr negativ

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	Y
$\xrightarrow{s}$	(2)	$-1/2$	1	0	$1/2$	-1	$5/2$
	(3)	$1/2$	0	1	$-1/2$	0	$15/2$
	Δ_j	$\frac{5}{2}-3\lambda$	0	0	$\frac{1}{2}-3\lambda$	5	$Z=\frac{115}{2}-45\lambda$

							Y
	(4)	-1	2	0	1	-2	5
	(3)	0	1	1	0	-1	10
	Δ_j	3	$-1-6\lambda$	0	0	$6(1+\lambda)$	$Z-60-60\lambda$
		>0	$\geqslant 0$			$\geqslant 0$	

Cazul doi: $-\frac{1}{6}<\lambda<\frac{5}{6}$; soluţia anterioară se găseşte pentru $\lambda=0$.

Cazul trei: $\lambda>\frac{5}{6}$

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	Y
$\xrightarrow{s}$	(2)	$-1/2$	1	0	$1/2$	-1	$5/2$
	(3)	$1/2$	0	1	$1/2$	0	$15/2$
	Δ_j	$\frac{5}{2}-3\lambda$	0	0	$1/2+3\lambda$	5	$Z=\frac{115}{2}-45\lambda$
		$\uparrow e$					

							Y
	(2)	0	1	1	0	-1	10
	(1)	1	0	2	-1	0	15
	Δ_j	0	0	$-5+6\lambda$	3	5	$Z-95$.
				$\geqslant 0$	>0	>0	

În rezumat (fig. IX.9)

λ	-1	$-1/6$	$5/6$	$+\infty$
b_3	0	5	11	$+\infty$
$x_1=\Delta y_4$	0	$1/2+3\lambda$		3
$x_2=\Delta y_5$	$6(1+\lambda)$	5		5
$x_3=\Delta y_1$	3	$5/2-3\lambda$		0
$x_4=\Delta y_2$	$-1-6\lambda$	0		0
$x_5=\Delta y_5$	0	0		$-5+6\lambda$
Z	$60(1+\lambda)$ $\downarrow 50$	$115/2+45\lambda$	$\downarrow 95$	95

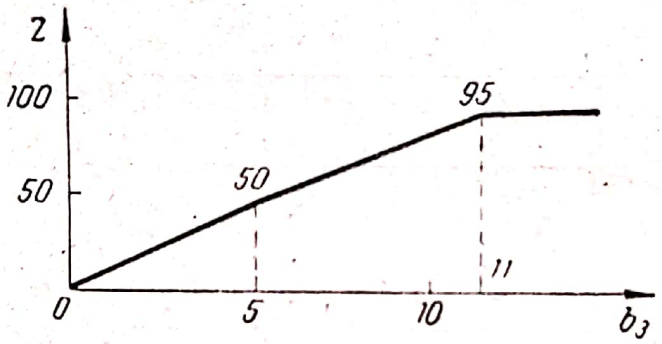


Fig. IX.9

10. În cazul unui fenomen de așteptare cu mai multe stații să se demonstreze formula care dă numărul mediu de unități într-un șir

$$\bar{\nu}=\frac{\Psi^{s+1}}{S\cdot S!(1-\Psi/S)^2}p_0.$$

R. Avem

$$\bar{\nu}=\sum_{n=S+1}^{\infty}(n-S)p_n=\sum_{n=S+1}^{\infty}np_n-S\sum_{n=S+1}^{\infty}p_n, \tag{1}$$

$$\sum_{n=S+1}^{\infty}np_n=p_0\left[(S+1)\frac{\Psi^{S+1}}{S!\,S}+(S+2)\frac{\Psi^{S+2}}{S!\,S^2}+\cdots\right]=$$

$$=\frac{p_0\Psi}{S!}\left[(S+1)\frac{\Psi^{s}}{S}+(S+2)\frac{\Psi^{S+1}}{S^2}+\cdots\right].$$

În paranteză avem derivata sumei

$$\frac{\Psi^{S+1}}{S}+\frac{\Psi^{S+2}}{S^2}+\cdots=\frac{\Psi^{S+1}}{S}\left[1+\frac{\Psi}{S}+\frac{\Psi^2}{S^2}+\cdots\right]=$$

$$=\frac{\Psi^{S+1}}{S}\cdot\frac{1}{1-\Psi/S}=\frac{\Psi^{S+1}}{S-\Psi},$$

deci

$$\sum_{n=S+1}^{\infty} np_n=p_0\left[\frac{(S+1)\Psi^{S+1}}{S!\,(S-\Psi)}+\frac{\Psi^{S+2}}{S!(S-\Psi)^2}\right],$$

$$S\sum_{n=S+1}^{\infty} p_n=p_0S\left[\frac{\Psi^{S+1}}{S!\,S}+\frac{\Psi^{S+2}}{S!\,S^2}+\cdots\right]=\frac{p_0\Psi^{S+1}}{S!}\cdot\frac{1}{1-\Psi/S}=p_0S\frac{\Psi^{S+1}}{S!}\cdot\frac{1}{S-\Psi}.$$

Înlocuind rezultatele obținute în (1), avem

$$\bar{\nu}=p_0\left[\frac{\Psi^{S+1}}{S!\,(S-\Psi)}+\frac{\Psi^{S+2}}{S!(S-\Psi)^2}\right]=p_0\,\frac{\Psi^{S+1}}{SS!(1-\Psi/S)^2}.$$

11. Fie un fenomen de așteptare cu mai multe stații. Procentul mediu al sosirilor pe zece minute este $\lambda=8$. Durata medie a serviciului este de 5 minute. Să se calculeze, pentru $S=5$, 6 și 7, numărul mediu $\bar{\nu}$ de unități într-un șir de așteptare și timpul mediu de așteptare $\bar{t}_f$ în șir.

R. $\lambda=8$, $\mu=2$, $\Psi=4$.

$\underline{S=5}$

$$\bar{\nu}=\frac{4^6}{5\cdot5!(1-4/5)^2}p_0,$$

cu

$$p_0=\frac{1}{\frac{4^5}{5!\,(1-4/5)}+1+4+\frac{4^2}{2!}+\frac{4^3}{3!}+\frac{4^4}{4!}}=\frac{1}{1\,024/4+824/24}=\frac{1}{77}.$$

Rezultă

$$\bar{\nu}=\frac{4^6}{4!}\cdot\frac{1}{77}=\frac{4^5}{6}\cdot\frac{1}{77}=2{,}216.$$

$\underline{S=6}$

$$\bar{\nu}=\frac{4^7}{6\cdot6!(1-4/6)^2}p_0$$

cu

$$p_0=\frac{1}{\frac{4^6}{6!(1-4/6)}+1+4+\frac{4^2}{2!}+\cdots+\frac{4^5}{5!}}=\frac{1}{\frac{4^4}{2\cdot 5!}+\frac{824}{24}+\frac{1024}{120}}=\frac{120}{7192}.$$

$$\bar{\nu}=\frac{4^7}{5!\,4}\cdot\frac{120}{7192}=0{,}569.$$

$S=7$; se obține

$$p_0=\frac{3\cdot 720}{121264} \text{ și } \bar{\nu}=0{,}18.$$

Timpul mediu de așteptare este dat de formula

$$\bar{t}_f=\frac{\bar{\nu}}{\lambda}.$$

Făcînd calculele, obținem:
pentru $S=5$, $\bar{t}_f=2$ min 46 s,
pentru $S=6$, $\bar{t}_f=41$ s,
pentru $S=7$, $\bar{t}_f=13$ s.

12. Fie un atelier de reparat mașini în care sosirile urmează o lege Poisson de parametru $\lambda=3$ (pe oră). Costul de staționare pentru o mașină este de 10 lei pe oră. Se poate alege: 1) între un mecanic experimentat care repară mașini după un serviciu exponențial cu timpul mediu de serviciu de 4 pe oră; el cere 3 lei sau 5 lei, inclusiv taxa și 2) un mecanic foarte experimentat care repară mașinile după un serviciu exponențial cu timpul mediu de serviciu de 5 pe oră; el cere 4 lei pe oră sau 6,5 lei inclusiv taxa. Să se rezolve problema dacă se alege între doi muncitori experimentați și doi muncitori foarte experimentați.

R. Se calculează timpul de așteptare în ore de mașină în fiecare caz, pentru o zi de muncă de 8 ore:

1) $8\bar{n}=8\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=8\frac{3}{4-3}=24$ h.

2) $8\bar{n}=8\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=8\frac{3}{5-3}=12$ h.

Costul în primul caz: $24\cdot 10+8\cdot 5=240$ lei/zi.
Costul în cazul doi: $12\cdot 10+8\cdot 6{,}5=172$ lei/zi.
Se angajează deci mecanicul cel mai experimentat.
În primul caz ($\lambda=3$, $\mu=4$, $S=2$)

$$p_0=\frac{160}{352},\quad \bar{n}=0{,}123+0{,}75=0{,}973,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde un cost zilnic

$$0{,}973 \cdot 8 \cdot 10 + 2 \cdot 40 = 158 \text{ lei.}$$

În cazul al doilea ($\lambda=3$, $\mu=5$, $S=2$)

$$p_0 = \frac{7}{13}, \quad \bar{n} = 0{,}06 + 0{,}6 = 0{,}66$$

și costul zilnic

$$0{,}66 \cdot 8 \cdot 10 + 2 \cdot 52 = 156{,}8 \text{ lei.}$$

Se angajează deci doi mecanici foarte experimentați.

13. La un post de vamă pentru automobile numărul turiștilor care se prezintă este de 20 pe oră. Timpul necesar de îndeplinire a formalităților este de 6 minute de turist. Se admite că sosirile constituie un fenomen Poisson și că serviciile sînt de tip exponențial.

1° Cîți funcționari de vamă sînt necesari pentru evitarea aglomerării traficului?

2° Administrația studiază punerea unui serviciu proporțional cu numărul turiștilor. Care este probabilitatea p_n de-a avea n turiști în șir?

3° Numărul de funcționari care execută serviciul proporțional cu numărul clienților este limitat la 4. Care este probabilitatea ca șeful de brigadă să participe la serviciu?

R. 1° Avem $\lambda=20$, $\mu=10$, $\frac{\lambda}{\mu}=2$.

Trebuie deci 2 vameși pentru evitarea aglomerației traficului.

2° În general

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_n(t) = -(\lambda_n + \mu_n) p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t).$$

Aici $\lambda_n=\lambda$, $\mu_n=n\mu$, deci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_n(t) = -(\lambda + n\mu) p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t).$$

Avem

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0,$$

$$2\mu p_2 = (\lambda+\mu) p_1 - \lambda p_0,$$

$$3\mu p_3 = (\lambda+2\mu) p_2 - p_1,$$

. . . . . .

Rezultă

$$p_2=\frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0,$$

$$p_3=\frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0,$$

. . . . . .

$$p_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0.$$

Dar $\sum_0^\infty p_n=1$, deci

$$p_0+p_0\sum_1^\infty\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}=1 \text{ sau } p_0+p_0\left(e^{\lambda/\mu}-1\right)=1.$$

Astfel

$$p_0=e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \text{ și } p_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}{n!}.$$

Aici

$$p_n=\frac{1}{n!}2^n e^{-2}=0{,}135\,\frac{2^n}{n!}.$$

Rezultă

$p_0=0{,}135$, $p_3=0{,}180$, $p_6=0{,}012$,
$p_1=0{,}270$, $p_4=0{,}090$, $p_7=0{,}003$,
$p_2=0{,}270$, $p_5=0{,}036$, $p_8=0{,}001$.

Este ușor de constatat, după

$$p_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\cdot\frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}{n!},$$

că pentru echilibru avem un proces Poisson astfel că $\bar{n}=\frac{\lambda}{\mu}$. Avem

$$\sum_0^\infty p_n=0{,}997\approx 1,$$

$$\sum_0^\infty np_n=1{,}991\approx 2.$$

3° Probabilitatea ca șeful de brigadă să intervină pentru a sprijini pe cei 4 funcționari este

$$\sum_{n=5}^\infty p_n=1-p_0-p_1-p_2-p_3-p_4=0{,}055.$$

14. Într-un port se construiesc instalaţii de descărcare a minereului. Se poate alege între trei tipuri a, b şi c ale căror capacităţi medii zilnice sînt respectiv de 3000, 5000 şi 7000 t. Costurile fixe (amortizare, întreţinere ...) sînt de 5000, 10 000 şi 15 000 lei pe zi iar costurile de funcţionare respective (numai în cazul în care operaţiile de descărcare au loc) sînt de 6000, 9000 şi 12 000 lei pe zi. Navele avînd 9000 t fiecare, sosesc, după un proces Poisson, în medie de două la trei zile. Costul de aşteptare a unei nave este de 20 000 lei pe zi.

Din cauza omogenităţii mărfurilor, trebuie alese instalaţii de un singur tip. Să se determine:

1° Instalaţia care trebuie realizată dacă nu se prevede o mărire sensibilă a traficului în viitor.

2° Aceeaşi instalaţie, în cazul în care se prevede o mărire sensibilă a traficului (de exemplu 100 %).

Se admite că serviciul este exponenţial.

R. Avem $\lambda=2/3$ şi timpurile medii de serviciu exponenţial

$$\mu_a=\frac{3000}{9000}=\frac{1}{3}; \quad \mu_b=\frac{5000}{9000}=\frac{5}{9}; \quad \mu_c=\frac{7}{9}.$$

Cazurile $(a, 1)$, $(b, 1)$ şi $(a, 2)$ trebuie eliminate deoarece provoacă aglomerarea. În celelalte cazuri să calculăm matricea costurilor fixe:

	1	2	3	4
a	—	—	15 000	20 000
b	—	20 000	30 000	40 000
c	15 000	30 000	45 000	60 000

Costurile variabile sînt pentru fiecare tip i (dacă k este numărul de instalaţii):

$$k\frac{\lambda}{k\mu_i}c_{v_i}=\frac{\lambda}{\mu_i}C_{v_i}.$$

Se obţine tabloul:

Costuri variabile

	1	2	3	4
a	—	—	12 000	12 000
b	—	10 800	10 800	10 800
c	10 285	10 285	10 285	10 285

Scanned with OKEN Scanner

Vom calcula p_0 și $\bar{t}_f$ după formulele:

$$p_0 = \frac{1}{\frac{\Psi^k}{k!\,(1-\Psi/k)} + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\Psi^n}{n!}} = \frac{1}{\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{k\mu}{k\mu-1} + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n},$$

$$\bar{t}_f = \frac{\Psi^k}{k \cdot k!\,\mu(1-\Psi/k)^2}\, p_0 = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^2}\, p_0.$$

Valorile lui p_0

a	—	—	1/9	0,130
b	—	1/4	5/17	0,300
c	1/7	2/5	35/83	0,404

Valorile timpului de așteptare

a	—	—	2,666	0,261
b	—	1,015	0,294	0,024
c	7,714	0,289	0,261	0,005

Costurile de așteptare sînt de forma: $\lambda \bar{t}_f c$, de unde tabloul corespunzător:

Costuri de așteptare

	1	2	3	4
a	—	—	35 546	3480
b	—	13 532	3 920	320
c	102 850	3 852	3 480	67

Costurile cumulate

	1	2	3	4
a	—	—	62 546	35 480
b	—	44 332	44 920	51 120
c	128 135	44 158	58 765	70 352

Deci construcția cea mai puțin costisitoare este de patru instalații de tipul *a*.

2° O mărire a traficului de 100 % după 20 de ani nu este de natură să modifice această decizie, deoarece pentru un trafic dublu, 7 instalații de tipul *a* au un cost cumulat de 51 000 lei, care după cum reiese din tablou este mic.

15. Un particular a observat că intrările la coaforul său urmează o lege Poisson și că unicul operator care execută serviciile cheamă clienții după o lege exponențială. Numărul mediu de veniri este de 3 pe oră, iar durata medie a serviciului de 12 min.

1° Admițînd că șirul de așteptare este atît de lung cît vrem, să se calculeze $\bar{n}$, $\bar{\nu}$ și $\bar{t}_f$.

2° Apoi presupunem că la coafor nu sînt decît trei fotolii; clienţii care vin dacă găsesc cele trei fotolii ocupate nu aşteaptă, ei revin mai tîrziu şi concurează la fenomenul Poisson de care am vorbit mai sus. Să se calculeze probabilităţile ca la coafor să fie 0, 1, 2, 3 clienţi. Să se evalueze $\bar{n}$, $\bar{\nu}$ şi $\bar{t}_f$. Care este probabilitatea de a se găsi cel puţin un fotoliu liber? Care este probabilitatea să se aştepte mai mult de 20 minute?

3° Clientul remarcă că cele trei fotolii sînt ocupate. Care este probabilitatea ca el să fie servit imediat sau să revină peste 20 minute?

R. 1° Numărul mediu de sosiri este $\lambda=1/20$ şi timpul de serviciu $\mu=1/12$, dacă este luat minutul ca unitate de timp,

$$\Psi=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{3}{5}.$$

Deducem

$$\bar{n}=\frac{\Psi}{1-\Psi}=\frac{3}{2};\quad \bar{\nu}=\frac{\Psi^2}{1-\Psi}=\frac{9}{10}$$

şi

$$\bar{t}_f=\frac{\bar{\nu}}{\lambda}=\frac{9}{10}\cdot 20=18 \text{ min.}$$

2° Matricea de trecere se poate scrie

	0	1	2	3
0	$1-\lambda\,dt$	λdt	0	0
1	μdt	$1-(\lambda+\mu)dt$	λdt	0
2	0	μdt	$1-(\lambda+\mu)dt$	λdt
3	0	0	μdt	$1-\mu dt$

Matricea dinamică D se scrie:

$$D=\begin{Vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{Vmatrix}$$

şi sistemul

$$\left.\begin{aligned} -\lambda p_0+\mu p_1&=0\\ \lambda p_0-(\lambda+\mu)p_1+\mu p_2&=0\\ \lambda p_1-(\lambda+\mu)p_2+\mu p_3&=0\\ \lambda p_2-\mu p_3&=0 \end{aligned}\right\}$$

cu

$$p_0+p_1+p_2+p_3=1.$$

Se obține

$$p_1=\frac{\lambda}{\mu}p_0, \quad p_2=\frac{\lambda^2}{\mu^2}p_0, \quad p_3=\frac{\lambda^3}{\mu^3}p_0.$$

În sfîrșit: $p_4(t)=0$. Rezultă atunci

$$p_0=\frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}=\frac{125}{272},$$

$$p_1=75/272; \quad p_2=45/272; \quad p_3=27/272.$$

Prin urmare:

$$\bar{n}=\sum_1^3 np_n=\frac{246}{272}=0{,}904,$$

$$\bar{\nu}=\sum_2^3 (n-1)p_n=\frac{99}{272}=0{,}364,$$

$$\bar{t}_f=\frac{\bar{\nu}}{\lambda}=\frac{0{,}364}{1/20}=7{,}3 \text{ min}.$$

Probabilitatea de a găsi cel puțin un fotoliu liber este

$$1-p_3=0{,}90.$$

Notăm cu $f(\omega)d\omega$ probabilitatea ca o unitate reperată să fie în șirul de așteptare între ω și $\omega+d\omega$. Numărul de unități din sistem pentru ca o unitate să consimtă să aștepte este 1 sau 2.

Probabilitatea ca să existe o unitate este 75/272; probabilitatea ca ea să nu părăsească fotoliul în intervalul ω este $e^{-\mu\omega}$; probabilitatea ca ea să părăsească fotoliul între ω și $\omega+d\omega$ este $\mu d\omega$.

Produsul $\frac{75}{272}e^{-\mu\omega}\mu d\omega$ exprimă deci probabilitatea ca o unitate reperată să aștepte în șir între ω și $\omega+d\omega$, ținînd seama de probabilitatea ca să existe o persoană la momentul cînd ea sosește.

De asemenea produsul $\frac{45}{272}\mu\omega\, e^{-\mu\omega}\mu d\omega$ reprezintă probabilitatea ca o unitate reperată să aștepte în șir între ω și $\omega+d\omega$, ținînd seama de probabilitatea de a exista două persoane în momentul în care ea sosește. Așadar

$$f(\omega)d\omega=\left[\frac{75}{272}\mu+\frac{45}{272}\mu^2\right]e^{-\mu\omega}d\omega.$$

Probabilitatea de a aştepta mai mult de 20 min este deci

$$\int_{20}^{\infty} f(\omega)\mathrm{d}\omega=\mu\left[\frac{75}{272}\int_{20}^{\infty} e^{-\mu\omega}\mathrm{d}\omega+\frac{45}{272}\int_{20}^{\infty}\mu\omega e^{-\mu\omega}\mathrm{d}\omega\right]=0{,}1361.$$

3° Considerăm schema din fig. IX.15.

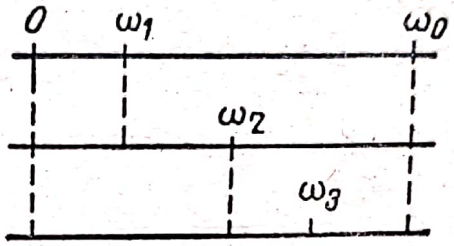


Fig. IX.15

Probabilitatea ca să existe o ieşire între ω_1 şi $\omega_1+\mathrm{d}\omega_1$ este

$$\frac{(\mu\omega_1)^0 e^{-\mu\omega_1}}{0!}\mu\mathrm{d}\omega_1$$

iar probabilitatea ca să nu fie nici o intrare între ω_1 şi ω_0 este

$$\frac{[\lambda(\omega_0-\omega_1)]^0 e^{-\lambda(\omega_0-\omega_1)}}{0!}e^{-\lambda(\omega_0-\omega_1)};$$

probabilitatea ca fotoliul 1 să rămînă liber este

$$P_1=\int_0^{\omega_0}\mu e^{-\mu\omega_1}e^{-\lambda(\omega_0-\omega_1)}\mathrm{d}\omega_1.$$

Probabilitatea ca să fie două ieşiri, dintre care una între ω_2 şi $\omega_2+\mathrm{d}\omega_2$, este

$$\frac{(\mu\omega_2)^1 e^{-\mu\omega_2}}{1!}\mu\mathrm{d}\omega_2;$$

probabilitatea ca fotoliul 2 să rămînă liber este deci

$$P_2=\int_0^{\omega_0}\mu^2\omega_2 e^{-\mu\omega_2}e^{-\lambda(\omega_0-\omega_1)}\mathrm{d}\omega_2.$$

La fel se ajunge la probabilitatea ca fotoliul 3 să rămînă liber

$$P_3=\int_0^{\omega_0}\frac{1}{2}\mu^3\omega_3^2 e^{-\mu\omega_3}e^{-\lambda(\omega_0-\omega_3)}\mathrm{d}\omega_3.$$

Avem următorul tablou:

Ieşiri	Fotoliul liber	
A	α	$P_1=P(A)\cdot P_A(\alpha)$
AB	β	$P_2=P(A)\cdot P_A(B)P_{AB}(\beta)$
ABC	γ	$P_3=P(A)\cdot P_A(B)P_{AB}(C)P_{ABC}(\gamma)$

Probabilitatea căutată este

$$P=P(A)\cdot P_A(B)P_{AB}(C)P_A(\alpha)P_{AB}(\beta)P_{ABC}(\gamma).$$

Deci

$$P=\frac{\prod_1^3 P_i}{P^2(A)P_A(B)}.$$

Calculele dau:

$$P_1=\frac{\mu}{\lambda-\mu}e^{-\lambda\omega_0}[e^{(\lambda-\mu)\omega_0}-1],$$

$$P_2=\frac{\mu^2}{(\lambda-\mu)^2}e^{-\lambda\omega_0}[(\lambda-\mu)\omega_0 e^{(\lambda-\mu)\omega_0}-e^{(\lambda-\mu)\omega_0}+1],$$

$$P_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mu^3}{(\lambda-\mu)^3}e^{-\lambda\omega_0}\{[(\lambda-\mu)^2\omega_0^2-2(\lambda-\mu)\omega_0+2]e^{(\lambda-\mu)\omega_0}-2\},$$

$$P(A)=1-e^{-\mu\omega_0},$$

$$P_A(B)=-\mu\omega_0 e^{-\mu\omega_0}-e^{-\mu\omega_0}+1.$$

Numeric:

$$P(A)=0{,}811;\qquad P^2(A)=0{,}658;$$

$$P_A(B)=0{,}496;$$

$$P_1=0{,}448;\qquad P_2=0{,}333;\qquad P_3=0{,}186;$$

de unde

$$P=\frac{0{,}48\cdot 0{,}333\cdot 0{,}186}{0{,}658\cdot 0{,}496}=\frac{0{,}01778}{0{,}3264}=0{,}054.$$

Clientul are 5,4 şanse dintr-o sută de a fi servit imediat dacă revine peste 20 min.

16. Stocarea unui articol de mare consumaţie (200 000 unităţi pe an) revine la 0,002 lei pe zi pentru un articol.

1° Care este mărimea celei mai economice şarje şi perioada de gestiune astfel încît costul de lansare a unei şarje să fie de 720 lei?

Scanned with OKEN Scanner

2° Ce se întîmplă dacă admitem o ruptură de stoc cu un cost de pierdere de 0,008 lei pe zi pentru un articol?

R. 1° Avem

$$n=n_0=\sqrt{2\frac{N}{\theta}\frac{C_l}{C_s}};$$

aici $N=200\,000$, $\theta=360$ zile, $C_l=720$ lei, $C_s=0{,}002$ lei, de unde rezultă

$$n_0=\sqrt{2\frac{2\,000\,000}{360}\cdot\frac{720}{0{,}002}}=\sqrt{4\cdot10^8}=20\,000 \text{ articole},$$

$$T_0=\frac{\theta}{N}n_0=\frac{360}{200\,000}\cdot20\,000=36 \text{ zile},$$

$$\Gamma_0=\sqrt{2N\theta C_l C_s}=\sqrt{2\cdot200\,000\cdot360\cdot720\cdot0{,}002}=14\,400 \text{ lei}.$$

2° Costul de pierdere este

$$\rho=\frac{0{,}008}{0{,}002+0{,}008}=\frac{0{,}008}{0{,}01}=0{,}8$$

de unde

$$n_0=20\,000\sqrt{\frac{1}{0{,}8}}=22\,500 \text{ articole},$$

$$s_0=22\,500\cdot0{,}8=18\,000,$$

$$T_0=36\cdot\sqrt{\frac{1}{0{,}8}}=40{,}5 \text{ zile},$$

$$\Gamma_0=14\,000\cdot0{,}88=12\,672 \text{ lei}.$$

17. Considerăm un fenomen de stocaj în care cererea este constantă şi anume h piese pe unitate de timp. Posibilităţile de fabricaţie sînt de f piese pe unitatea de timp. Costul de stocaj pe piesă şi pe unitate de timp este C_s; costul fix de lansare al unei serii oarecare este C_l.

Să se afle numărul n_0 de piese la lansare pe serie şi la perioada T_0.

Aplicaţie: $C_s=0{,}1$ lei pe zi; $C_l=1000$ lei, $h=250$ piese pe zi, $f=1000$ piese pe zi.

R. Avem $n=f\tau=hT$ (fig. IX.17). Costul de stocaj este

$$\frac{1}{2}nTC_s+\frac{1}{2}n\tau C_s=\frac{1}{2}hT^2C_s(1+h/f).$$

Costul total al unei serii este stabilit la

$$\Gamma=C_l+\frac{1}{2}hT^2C_s(1+h/f),$$

de unde costul pe unitatea de timp

$$\gamma = C_l/T + \frac{1}{2} hTC_s(1+h/f).$$

Costul are un extremum pentru

$$\frac{d\gamma}{dT} = \frac{-C_l}{T} + \frac{1}{2} hC_s(1+h/f) = 0,$$

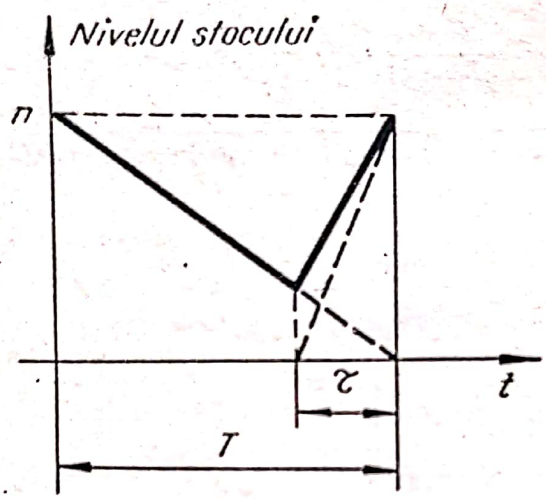


Fig. IX.17

de unde

$$T_0^2 = \frac{2C_l f}{hC_s(f+h)}.$$

Se deduce că

$$n_0 = hT_0 = \sqrt{2\frac{C_l T}{hC_s} \cdot \frac{h}{f+h}}.$$

Aplicaţie:

$$T_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 1000}{250 \cdot 0{,}1 \cdot 1250}} = 8 \text{ zile},$$

$$n_0 = hT_0 = 8 \cdot 250 = 2000 \text{ piese}.$$

18. Un depozit de produse farmaceutice posedă un stoc de produse de larg consum. Costul de stocaj pentru fiecare articol pe săptămînă este $C_s=2$ lei. Lipsa unui articol atrage după sine o pierdere C_p evaluată la 40 lei pe săptămînă de articol. Cererea r este aleatoare şi repartiţia

urmează o lege Poisson:

$$p_T(r)=\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^2}{r!},$$

T fiind perioada de gestiune în săptămîni.

Reaprovizionarea se face fără amînări la sfîrşitul fiecărei perioade de gestiune T, completînd nivelul maxim al stocului.

Să se determine capacitatea optimă de stocaj precum şi perioada de gestiune optimală astfel încît să se minimizeze costul global pe interval de un an, cererea medie, în sute de articole, pe săptămînă fiind 3, ($\lambda=3$; $T=1$).

R. Valoarea medie a costului total pe o perioadă T este

$$\Gamma_T(s)=TC_s\sum_{r=0}^{s}\left(s-\frac{r}{2}\right)p_T(r)+TC_s\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{s^2}{r}p_T(r)+$$

$$+TC_p\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{(r-s)^2}{r}\cdot p_T(r).$$

Se vede că, pentru o perioadă T, minimul lui $\Gamma_T(s)$ are loc pentru s_0 astfel că

$$L(s_0-1)<\rho<L(s_0),$$

unde

$$\rho=\frac{C_p}{C_s+C_p}$$

şi

$$L(s)=p(r\leqslant s)+\left(s+\frac{1}{2}\right)\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{p(r)}{r}.$$

1° $T=1$ săptămînă

s	r	$p_1(r)$	$\frac{p_1(r)}{r}$	$\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{p_1(r)}{r}$	$\left(s+\frac{1}{2}\right)\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{p_1(r)}{r}$	$p(r\leqslant s)$	$L_1(s)$
0	0	0,5	∞	0,4114	0,2057	0,05	0,2557
1	1	0,15	0,15	0,2614	0,3921	0,20	0,5921
2	2	0,23	0,115	0,1464	0,3660	0,43	0,7960
3	3	0,22	0,0714	0,075	0,2625	0,65	0,9125
4	4	0,17	0,0425	0,0325	0,14625	0,82	0,9663
5	5	0,10	0,02	0,0125	0,06875	0,92	0,9888
6	6	0,05	0,0083	0,0042	0,0273	0,97	0,9973
7	7	0,02	0,0029	0,0013	0,00975	0,99	0,9998
8	8	0,01	0,0013	0	0,00000	1,00	1,0000

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $s=4$ avem

$$[L_1(3)=0,9215]<(\rho=40/42=0,9524)<[L_1(4)=0.9663].$$

Stocul optimal este deci egal cu 4.
Valoarea medie a costului corespunzător este

$$\Gamma_1(4)=7,1036 \text{ lei},$$

sau, deoarece distribuția este dată în sute de articole,

$$\Gamma_1(4)=710,36 \text{ lei}.$$

Costul anual al unei gestiuni este

$$710,36 \cdot 52=36\,938,72 \text{ lei}.$$

2° $T=2$ săptămîni. Vom utiliza legea Poisson

$$p_2(r)=e^{-6}\frac{(6)^r}{r!}$$

s	r	$p_2(r)$	$\frac{p_2(r)}{r}$	$\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{p_2(r)}{r}$	$\left(s+\frac{1}{2}\right)\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{p_2(r)}{r}$	$p(r\leqslant s)$	$L_2(s)$
1	1	0,02	0,020	0,1966	0,2949	0,02	0,3149
2	2	0,06	0,030	0,1666	0,4165	0,08	0,4965
3	3	0,09	0,030	0,1366	0,4781	0,17	0,6481
4	4	0,13	0,032	0,1046	0,4707	0,30	0,7707
5	5	0,16	0,032	0,0726	0,3993	0,46	0,8593
6	6	0,16	0,026	0,0466	0,3029	0,62	0,9229
7	7	0,14	0,020	0,0266	0,1995	0,76	0,9595
8	8	1,10	0,012	0,0149	0,1241	0,86	0,9841
9	9	0,07	0,008	0,0066	0,0627	0,93	0,9927
10	10	0,04	0,004	0,0026	0,0273	0,97	0,9973
11	11	0,02	0,00018	0,0008	0,0092	0,99	0,9992
12	12	0,01	0,0008	0,0000	0,0000	1,00	1,0000

Pentru $s=7$ avem

$$[L_2(6)=0,9229]<(\rho=0,9542)<[L_2(7)=0,9595].$$

Stocul optimal este deci egal cu 7.
Valoarea medie a costului corespunzător este

$$\Gamma_2(7)=21,772$$

sau, deoarece distribuția este dată în sute de articole,

$$\Gamma_2(7)=2177,2 \text{ lei}.$$

Costul anual al gestiunii este

$$2177,2 \cdot 26=56\,607,2 \text{ lei}.$$

Acest cost anual este superior costului corespunzător la o perioadă de gestiune de o săptămînă. Se alege deci o perioadă de gestiune de o săptămînă și nivelul optimal al stocului la începutul perioadei este de 400 articole.

19. O întreprindere constructoare de mașini-unelte lansează pe piață o serie de mașini analogice. După posibilitățile de dezvoltare tehnice, această serie de mașini este limitată la un anumit număr de exemplare.

1° Să se determine numărul de piese de schimb de un anumit tip ce trebuie puse în stoc știind că, dacă se fabrică piese de schimb de prisos, ele trebuie soldate cu pierderi mari și, dacă nu se fabrică destule, trebuie executate piesele care lipsesc la un preț de cost foarte ridicat. Se cunoaște pe de altă parte repartiția $p(r)$ a probabilității unei cereri egale cu r. Notăm cu C_1 pierderea unitară a pieselor nevîndute și cu C_2 pierderea relativă la suplimentul asupra prețului de cost de fabricație a pieselor care lipsesc. Costul de stocaj este neglijabil față de C_1 și C_2.

2° *Aplicație numerică.* Numărul de piese de schimb de acest tip se face pe o perioadă lungă (mai mulți ani). Rezultatul acestei cercetări figurează în tabloul:

Numărul de piese de schimb cerut de mașină în timpul perioadei considerate	Numărul de mașini
5	5
6	15
7	25
8	30
9	15
10	10

Seria proiectată este de 80 mașini iar costurile C_1 și C_2 sînt $C_1=750$ lei, $C_2=3000$ lei. Piesele de schimb sînt de fapt subansamble complete.

R. 1° Costul de stocaj fiind neglijabil față de C_1 sau C_2, perioada de gestiune T nu intervine.

Fie s numărul de piese de schimb de plasat în stoc. Sînt posibile două situații, care se exclud reciproc:

$r \leqslant s$; stocul acoperă cererea și se soldează o cantitate egală cu $s-r$ cu o pierdere unitară C_1;

$r > s$; există pierdere și trebuie făcute special $r-s$ piese cu o pierdere unitară C_2.

Valoarea medie a cheltuielii este

$$\Gamma(s)=C_1\sum_{r=0}^{s}(s-r)p(r)+C_2\sum_{r=s+1}^{\infty}(r-s)p(r).$$

Această valoare medie intervine în funcția economică

$$\Gamma(s+1)=C_1\sum_{r=0}^{s}(s-r)p(r)+C_1\sum_{r=0}^{s}p(r)+C_2\sum_{r=s+1}^{\infty}(r-s)p(r)-C_2\sum_{r=s+1}^{\infty}p(r)=$$

$$=\Gamma(s)+(C_1+C_2)p(r\leqslant s)-C_2.$$

De asemenea

$$\Gamma(s-1)=\Gamma(s)-(C_1+C_2)p(r\leqslant s-1)+C_2.$$

Valoarea stocului s_0 care face $\Gamma(s)$ minim este astfel ca

$$\Gamma(s_0+1)<\Gamma(s_0)<\Gamma(s_0-1),$$

$\Gamma(s_0+1)-\Gamma(s_0)>0$ atrage după sine $(C_1+C_2)p(r\leqslant s)-C_2>0$

și

$\Gamma(s_0-1)-\Gamma(s)>0$ atrage după sine $(C_1+C_2)p(r\leqslant s_0-1)+C_2>0$,

sau încă, notînd $\rho=\dfrac{C_2}{c_1+c_2}$,

$$p(r\leqslant s_0-1)<\rho<p(r\leqslant s_0),$$

de unde

$$p(r\leqslant s_0)=p(0)+p(1)+\cdots+p(s_0).$$

2° Calculăm valoarea medie și varianța distribuției statistice a cererii de piese de schimb pentru o mașină

$$m=\bar{x}=\frac{\Sigma n_i x_i}{\Sigma n_i}=7{,}65;$$

$$\sigma_x^2=\frac{\Sigma n_i(x_i-\bar{x})^2}{\Sigma n_i}=1{,}73.$$

Distribuția cererii totale pentru 80 de mașini este normală cu o medie

$$\bar{r}=80\cdot 7{,}65=612$$

și o variantă

$$\sigma_r^2=80\cdot 1{,}73=138.$$

Cu ajutorul tabelelor funcției de distribuție $P(z)$ a legii normale reduse, se vede că valoarea lui z astfel ca o cerere inferioară sau egală cu $\bar{r}+z\sigma_r$ să aibă probabilitatea 0,8 este $z\approx 0{,}79$. Astfel numărul optim de piese puse în stoc este $s_0=621$.

20. O intreprindere de import-export se aprovizionează în toate semestrele. Costul de stocaj al unui articol $C_s=100$ lei pe semestru. Prețul său de cumpărare (cuprinzînd toate taxele) este $a=500$ lei și prețul de vînzare $v=800$ lei.

Cererea semestrială este repartizată după tabloul:

r	$p(r)$	r	$p(r)$
0	0,01	6	0,18
1	0,05	7	0,14
2	0,08	8	0,08
3	0,12	9	0,02
4	0,16		
5	0,16	>9	0

Toate articolele cerute şi care nu sînt în stoc sînt furnizate la sfîrşit de semestru. Se face atunci clientului o reducere: $C_p=200$ lei.

1° Stocul iniţial fiind nul, cu ce cantităţi trebuie să se aprovizioneze pentru maximizarea venitului pe un semestru?

2° În aceleaşi condiţii, cu ce cantitate se va aproviziona la începutul primului semestru, apoi la începutul semestrului al doilea pentru maximizarea venitului pe un an?

R. Se consideră două cazuri: $r \leqslant s$ (fig. IX.20,*a*) venitul este

$$vr - C_s\left(s - \frac{r}{2}\right) - as,$$

$r > s$ (fig. IX.20,*b*) venitul este

$$vs - C_s\frac{s^2}{2r} + (v - a - C_p)\,(r - s) - as$$

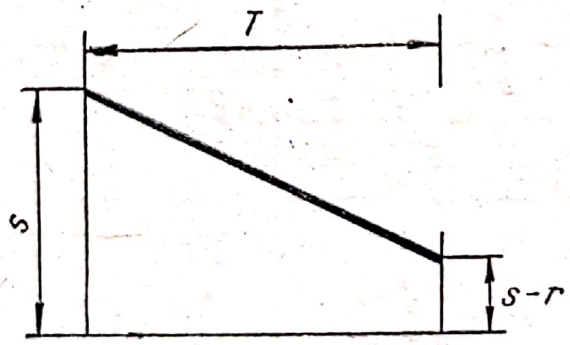


Fig. IX.20, a

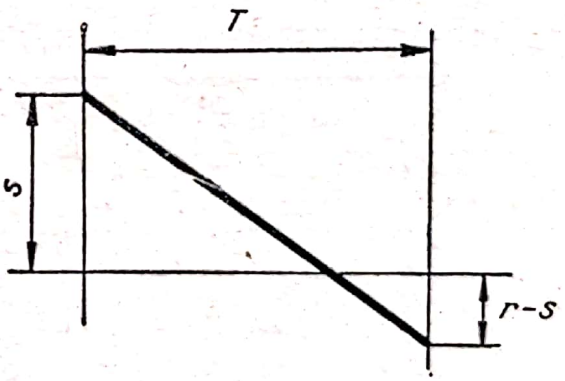


Fig. IX.20, b

sau

$$vr - C_s\frac{s^2}{2r} - C_p(r - s) - ar$$

sau încă

$$vr - C_s \frac{s^2}{2r} - as - (a + C_p)(r - s).$$

Venitul mediu este

$$\Gamma(s) = v \sum_{r=0}^{\infty} r\, p(r) - C_s \sum_{r=0}^{s} \left(s - \frac{r}{2}\right) p(r) - as \sum_{r=0}^{\infty} p(r) - C_s \sum_{r=s+1}^{\infty} \frac{s^2}{2r} p(r) -$$

$$- (a + C_p) \sum_{r=s+1}^{\infty} (r - s)\, p(r).$$

Calculăm

$$\Gamma(s+1) = \Gamma(s) - C_s \sum_{0}^{s} p(r) - C_s \sum_{s+1}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{p(r)}{r} - a + (a + C_p) \sum_{s+1}^{\infty} p(r)$$

sau

$$\Gamma(s+1) = \Gamma(s) - a\,p(r \leqslant s) - C_s \left[p(r \leqslant s) + \sum_{s+1}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{p(r)}{r} \right] + C_p [1 - p(r \leqslant s)].$$

Punînd $p(r \leqslant s) = P(s)$ și $p(r \leqslant s) + \sum_{s+1}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{p(r)}{r} = L(s)$, rezultă

$$\Gamma(s+1) = \Gamma(s) - aP(s) - C_s L(s) + C_p [1 - P(s)].$$

De asemenea

$$\Gamma(s) = \Gamma(s-1) - aP(s-1) - C_s L(s-1) + C_p [1 - P(s-1)].$$

Scriind că $\Gamma(s) - \Gamma(s+1) > 0$ și $\Gamma(s) - \Gamma(s-1) > 0$, se determină valoarea optimală s_0 a stocului care este astfel că

$$(a + C_p)\, P(s_0 - 1) + C_s L(s_0 - 1) < C_p < (a + C_p) P(s_0) + C_s L(s_0).$$

Calculăm s_0:

s	r	$p(r)$	$\frac{p(r)}{r}$	$\sum_{s+1}^{\infty} \frac{p(r)}{r}$	$\left(s+\frac{1}{2}\right) \sum_{s+1}^{\infty} \frac{p(r)}{r}$	$P(S)$	$L(s)$
0	0	0,01	—	0,2642	0,1321	0,01	0,1421
1	1	0,05	0,05	0,2142	0,3213	0,06	0,3813
2	2	0,08	0,04	0,1742	0,4355	0,14	0,5755
3	3	0,12	0,04	0,1342	0,4697	0,26	0,7297
4	4	0,16	0,04	0,0942	0,4239	0,42	0,8439
5	5	0,16	0,032	0,0622	0,3421	0,58	0,9221
6	6	0,18	0,03	0,0322	0,2093	0,76	0,9693
7	7	0,14	0,02	0,0122	0,0915	0,90	0,9915
8	8	0,08	0,01	0,0022	0,0187	0,98	0,9987
9	9	0,02	0,002	0	0	1	1
> 9	> 9	0	0	0	0	1	1

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $s=3$ avem

$$[700 \cdot 0{,}14+100 \cdot 0{,}5755=155{,}55]<200<[700 \cdot 0{,}26+100 \cdot 0{,}7297=254{,}97].$$

Se va aproviziona deci cu o cantitate $s_0=3$.
Valoarea corespunzătoare a venitului mediu (valoarea medie) este

$$\Gamma(3)=800 \cdot 4{,}89-100 \sum_0^3 \left(3-\frac{r}{2}\right) p(r)-500 \cdot 3-100 \sum_4^\infty \frac{9}{2r} p(r)-700 \sum_4^\infty (r-3)\, p(r)=$$

$$=3192-49 \cdot 5-1500-60{,}39-1470=832{,}11 \text{ lei.}$$

2° Considerăm semestrul doi.

Fie x cantitatea în stoc la sfîrșitul primului semestru. Venitul mediu a trimestrului doi este

$$\Gamma_2(x, s)=v \sum_{r=0}^\infty r p(r)-C_s \sum_0^s \left(s-\frac{r}{2}\right) p(r)-a(s-x)-C_s \sum_{s+1}^\infty \frac{s^2}{2r} p(r)-$$

$$-[a+C_p] \sum_{s+1}^\infty (r-s)\, p(r).$$

Pentru $x \leqslant 3$, valoarea optimă a stocului la începutul semestrului doi este dată prin formula

$$[a+C_p]P(s_0-1)+C_s L(s_0-1)<C_p<[a+C_p]P(s_0-1)+C_s L(s_0)$$

și se găsește

$$s_0=3,$$

căruia îi corespunde un venit mediu

$$\Gamma_2(x, 3)=832{,}11+500\ x.$$

Pentru $x>3$, stocul nu este reaprovizionat.
Se poate calcula ușor că

$\Gamma_2(x, 2)=\ 787{,}66+500\ x,$
$\Gamma_2(x, 3)=\ 832{,}11+500\ x,$
$\Gamma_2(x, 4)=\ 777{,}14+500\ x,$
$\Gamma_2(x, 5)=\ 626{,}75+500\ x,$
$\Gamma_2(x, 6)=\ 300{,}54+500\ x,$
$\Gamma_2(x, 7)=-128{,}39+500\ x,$
$\Gamma_2(x, 8)=-\ 657{,}54+500\ x,$
$\Gamma_2(x, 9)=-1243{,}5\ +500\ x,$
$\Gamma_2(x, 10)=-1843{,}5\ +500\ x,$
$\Gamma_2(x, 11)=-2443{,}5\ +500\ x,$
$\Gamma_2(x, 12)=-3043{,}5\ +500\ x.$

În rezumat:

dacă $x=0$ se reaprovizionează cu 3 articole și $\Gamma_2(0, 3)=\ 832{,}11,$
dacă $x=1$ se reaprovizionează cu 2 articole și $\Gamma_2(1, 3)=1332{,}11,$
dacă $x=2$ se reaprovizionează cu 1 articol și $\Gamma_2(2, 3)=1832{,}11,$
dacă $x=3$ stocul nu va fi reaprovizionat și $\Gamma_2(3, 3)=2332{,}11,$
dacă $x=4$ stocul nu va fi reaprovizionat și $\Gamma_2(4, 4)=2774{,}14,$
dacă $x=5$ stocul nu va fi reaprovizionat și $\Gamma_2(5, 5)=3126{,}75,$
dacă $x=5$ stocul nu va fi reaprovizionat și $\Gamma_2(6, 6)=3300{,}54,$
etc.

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm acum două semestre în ansamblu.

Stocul inițial fiind nul, dacă se aprovizionează cu 3 articole la începutul primului semestru, venitul mediu anual va fi

$$\Gamma_{1,2}(3)=\Gamma_1(3)+0{,}01\cdot\Gamma_2(3,3)+0{,}05\cdot\Gamma_2(2,3)+0{,}08\cdot\Gamma_2(1,3)+0{,}86\cdot\Gamma_2(0,3)=$$
$$=832{,}11+937{,}11=1769{,}22.$$

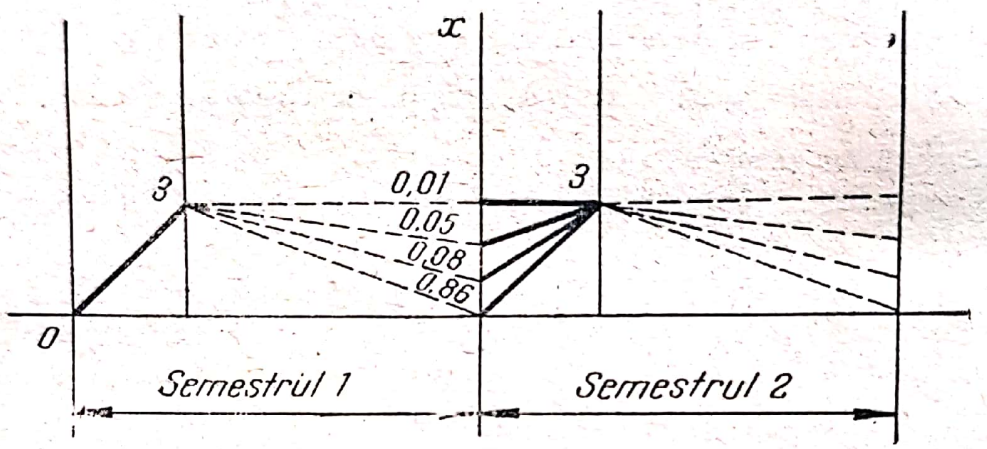


Fig. IX.20, c

În sfîrșit, se vede din fig. IX.20,*c*, că probabilitatea pentru ca valoarea stocului, la sfîrșitul primului semestru, să fie 3 este 0,01 etc.

Dacă se aprovizionează cu 4 articole la începutul primului semestru, venitul mediu anual va fi

$$\Gamma_{1,2}(4)=\Gamma_1(4)+0{,}01\ \Gamma_2(4,4)+0{,}05\Gamma_2(3,3)+0{,}08\ \Gamma_2(2,3)+0{,}12\ \Gamma_2(1,3)+$$
$$+0{,}74\ \Gamma_2(0,3)=777{,}14+1074{,}8814=1852{,}0214.$$

De asemenea

$$\Gamma_{1,2}(5)=\ 1948{,}9845;$$
$$\Gamma_{1,2}(6)=\ 1964{,}1641;$$
$$\rightarrow\ \Gamma_{1,2}(7)=\boxed{1975,\ 8591};$$
$$\Gamma_{1,2}(8)=\ 1950{,}17.$$

Se constată că venitul mediu anual este maxim dacă se aprovizionează cu 7 articole la începutul primului semestru.

BIBLIOGRAFIE

1. *Angheluță, Th.*, **Exerciții și probleme.** Edit. Universității din Cluj, 1937.
2. *Angheluță, Th.*, **Curs de teoria funcțiilor de variabilă complexă,** ed. II., Edit. București, 1957.
3. *Angot, A.*, **Complemente de matematici pentru inginerii din electrotehnică și telecomunicații,** (trad. din l. franceză), Edit. Tehnică, București, 1966.
4. *Arghiriade, E.*, **Curs de algebră superioară,** vol. 1 și 2, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1962, 1963.
5. *Bass, J.*, **Exercices de mathématiques,** The Macmillan Comp; New York, 1965.
6. *Cartan, H.*, **Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes,** Hermann, Paris, 1961.
7. *Ciorănescu, N.*, **Tratat de matematici speciale,** Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1962.
8. *Ciucu, G., Sîmboan, G.*, **Teoria probabilităților și statistică matematică,** Culegere de probleme, Edit. Tehnică, București, 1962.
9. *Ciucu, G., Craiu, V., Săcuiu, I.*, **Culegere de probleme de teoria probabilităților,** Edit. Tehnică, București, 1967.
10. *Ciucu, G., Craiu, V.*, **Probleme de statistică matematică,** Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1968.
11. *Cristescu, R.*, **Matematici superioare,** Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1963.
12. *Demidovici, B. P.*, **Culegere de probleme și exerciții de analiză matematică,** Edit. Tehnică, București, 1956.
13. *Denis-Papin, M., Kaufmann, A.*, **Cours de calcul opérationnel appliqué,** Edit. Albin Michel, Paris, 1950.
14. *Denis-Papin, M.*, **Cours de calcul matriciel appliqué,** Edit. Albin Michel, Paris, 1951.
15. *Denis-Papin, M.*, **Cours de calcul tensoriel appliqué,** Edit. Albin Michel, Paris, 1966.
16. *Denis-Papin, M., Kaufmann, A.*, **Calcul opérationnel,** T. 1. 2., Edit. Dunod, Paris, 1964.
17. *Emmanuel, D.*, **Lecțiuni de teoria funcțiunilor,** vol. 1, Edit. Cultura Națională, București, 1924.

Scanned with OKEN Scanner

18. *Ganea, T.*, **Serii trigonometrice**, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1964.
19. *Ghiunter, N. M.* şi *Cuzmin, R. O.*, **Culegere de probleme de matematici superioare**, vol. 1, 2, 3 (trad. din l. rusă), Edit. Tehnică, Bucureşti, 1953.
20. *Kamke, E.*, **Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen**, I. II, Akademische verlagsgesellschaft, Geest & Portig K. G., Leipzig, 1959.
21. *Knopp, K.*, **Aufgebensanemlung zur Funktionentheorie**. I. Berlin, 1923.
22. *Kuntzmann, J.*, **Mathématique de la physique et de la technique**, Edit. Hermann, Paris, 1961.
23. *Jacob, C.*, **Curs de matematici superioare**, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1957.
24. *Lichnerowicz, A.*, **Elements de Calcul Tensoriel**, Edit. Armand Collin, Paris, 1964.
25. *Mihoc, G.* şi *Nădejde, I.*, **Programarea matematică**, vol. I, II, Edit. Ştiinţifică, Bucureşti, 1966, 1967.
26. *Nicolescu, L. J.* şi *Stoka, M. I.*, **Matematici pentru ingineri**, vol. 1, 2, Edit. Tehnică, 1969.
27. *Nicolescu, M.*, **Analiză matematică**, vol. 1, 2, 3, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1957, 1958, 1960.
28. *Nicolescu, M.*, **Funcţii reale şi elemente de topologie**, Edit. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.
29. *Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S.*, **Manual de analiză matematică**, vol, 1,2. Edit. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962—1964.
30. *Paull, S.*, **Topics in advanced mathematics for electronics technology**, J. Wiley, New York, 1966.
31. *Reischer, C., ş. a.* **Teoria probabilităţilor**, Edit. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1967.
32. *Rényi, A.*, **Calcul des probabilités**, Dunod, Paris, 1966.
33. *Roşculeţ, M.*, **Analiza matematică**, vol. 1, 2. Edit. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964—1965.
34. *Sansone, G., Gerretsen, J.*, **Lectures on the theory of functions of a complex variable**, vol. 1, Edit. Noordhoff Groningen, 1960.
35. *Schwartz, L.*, **Methodes mathématiques pour les sciences physiques**, Edit. Hermann, Paris, 1961.
36. *Smirnov, V. I.*, **Curs de matematici superioare**, vol. 1—5, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1953—1963.
37. *Stoilow, S.*, **Teoria funcţiilor de o variabilă complexă**, vol. 1, Edit. Acad. R.S.R. Bucureşti, 1954.
38. *Stoka, M. I.*, **Funcţii de variabile reale şi funcţii de variabilă complexă**, Edit. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964.
39. *Stocka, M. I.*, **Culegere de probleme de funcţii complexe**, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1965.
40. *Stoka, M. I., Vrănceanu, G. G.*, **Probleme de geometrie diferenţială**, Edit. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1963.
41. *Şabac, I. Gh.*, **Matematici speciale**, vol. 1, 2, Edit. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964—1965.
42. *Teodorescu, N.*, **Metode vectoriale în fizică matematică**, vol, 1, 2, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1954.
43. *Urwin, M. K.*, **Advanced Calculus and vector Field Theory**, Pergamon Press, New York, 1966.

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

Prefață 5

Cap. I. Teoria cîmpurilor 7
Cap. II. Funcții de o variabilă complexă 74
Cap. III. Elemente de calcul matriceal și tensorial 170
§ 1. Elemente de calcul matriceal 170
§ 2. Calcul tensorial 175
Cap. IV. Serii Fourier. Integrala Fourier 217
Cap. V. Calcul operațional 242
Cap. VI. Funcții și ecuații speciale 288
Cap. VII. Ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea 325
Cap. VIII. Teoria probabilităților și statistică matematică 377
Cap. IX. Elemente de programare matematică 453

Bibliografie 509

Scanned with OKEN Scanner

Control științific: prof. dr. Gh. Th. Gheorghiu

Bun de tipar: 05.12.1969
Coli de tipar: 32
C. Z.: 51(075.8 : 021)

Întreprinderea poligrafică Sibiu,
str. N. Bălcescu nr. 17

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

α	m	4m+1		
2991	5	21	m=m n=2m	a
2513	6	25	1,3946 (x1,736) 2,4977	
698	9	37	1,7087 (x1,856) 3,1722	
8607	18	73	2,438 (x1,932) 4,7110	
0725	22	89	3,747 (x1,977) 7,411 6'20"	
0354	44	177	5,492 (x1,9936) 10,9499 15'18"	

$a=\alpha \quad b=88\alpha$

$a=\alpha \quad b=44\alpha$

$a=\alpha \quad b=44\alpha$

$a=\alpha \quad b=88\alpha$

$a=\alpha \quad b=176\alpha$

$a=88\ldots176\alpha$

$a=176\ldots264$

$a=264\ldots352\alpha$

$\alpha = \frac{2\pi}{4m+1}$

$\alpha = \frac{2\pi}{2m+1}$

$\alpha = \frac{2\pi}{5}$

$\alpha = \frac{2\pi}{2\cdot 2+1} = \frac{2\pi}{5}$

$\alpha = \frac{2\pi}{2\cdot 5+1}$

$\bar{V}_1 = 2R\cos\frac{\alpha}{2}\left[\bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\sin\alpha\right]$

$R_1 = 2R\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$

$R_2 = 2R\cos\frac{\alpha}{2}\sin 2\frac{\alpha}{2}$

$R_K = 2R\cos\frac{\alpha}{2}\sin K\frac{\alpha}{2}$

$\bar{A}_\beta = \frac{\bar{V}_1}{R_1} + \frac{\bar{V}_2}{R_2} + \ldots + \frac{\bar{V}_K}{R_K} + \ldots \frac{\bar{V}_{2m}}{R_{2m}}$

$\Phi_\alpha =$

$\bar{i}\cdot\bar{V}_1 = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\left(\bar{i}\cos\alpha\right) = a_1$

$\bar{i}\,\bar{V}_2 = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos(2\alpha) = a_2$

$\bar{i}\cdot\bar{V}_3 = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\cos(3\alpha) = a_3$

$\bar{i}\,\bar{V}_4 = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\cos(4\alpha) = a_4$

$\bar{A}_0 = \frac{\bar{V}_1}{R_1} + \frac{\bar{V}_2}{R_2} + \ldots + \frac{\bar{V}_4}{R_4}$

$R_1 = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$

$R_2 = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin 2\frac{\alpha}{2}$

$R_3 = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\sin 3\frac{\alpha}{2}$

$R_4 = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\sin 4\frac{\alpha}{2}$

$a_1 + a_4 = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\alpha + \cos(2\pi-\alpha)\right] = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$

$a_2 + a_3 = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos 2\alpha + \cos(2\pi-2\alpha)\right] = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha$

$A_0 = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\sum 2\cos\alpha\cdot\frac{1}{2R\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}} + \ldots + \frac{1}{2}\left[\frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos 2\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right.$

$\Phi_\beta = 2R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\int\frac{\cos x}{\sin\frac{x}{2}}dx$

$90\cdot10^9 : 10^4 = 9\cdot10^6$

$9\cdot10^6 : 300 = 3\cdot10^4 = 6\times5000$

$\bar{V}_{2m} = \alpha(4m)$

$b_{iv} = \alpha\cdot 4m$

$a_{iii} = \alpha(2m+1)$

$b_{iii} = \alpha\cdot 3m$

$a_{ii} = \alpha(m+1)$

$b_{ii} = 2m$

$a_i = \alpha$

$b_i = 1$

$a = \alpha \quad b = \alpha(m+1)$

$\bar{V}_a + \bar{V}_\beta$

$\int_\alpha^{\pi-\frac{\alpha}{2}} = 6{,}8726$

$3b_{ii} - a_{iii}$

$2b_{ii} - a_{ii}$

$\alpha = \frac{2\pi}{2m+1} = \frac{2\pi}{5}$

$m = 2$

$\bar{V}_{4m} = \alpha(4m)$

$b_{iv} = \alpha\cdot 4m$

$a_{iii} = \alpha(2m+1)$

$b_{iii} = \alpha\cdot 3m$

$a_{ii} = \alpha(m+1)$

$b_{ii} = 2m$

$a_i = \alpha$

$b_i = 1$

$a = \alpha \quad b = \alpha(m+1)$

$\bar{V}_a + \bar{V}_\beta$

$\alpha = \frac{2\pi}{2m+1}$

$m = 2$

$\alpha = \frac{2\pi}{4m+1}$

$m = 88$

$n = 44$

$\alpha = \frac{\pi}{n} \quad b = \frac{\pi}{\alpha}$

$\int_\alpha^{\pi-\frac{\alpha}{2}}$

$\int_\alpha^{2m}$

$\int_\alpha^{\pi-\frac{\alpha}{2}}$

$\int_\alpha^{\pi-\frac{\alpha}{2}}$

$\int_\alpha^{\pi-\frac{\alpha}{2}

$\frac{2\pi}{4m+1}$

α	m	4m+1	n=m	n=2m	a
0,2991	5	21	1,394 (x1,786)	2,4977	
02513	6	25	1,7087 (x1,858)	3,1722	
,1698	9	37	2,438 (x1,932)	4,7110	
08607	18	73	3,747 (x1,977)	7411	6'20"
0,0805	22	89	4,450 (x1,983)	8,1194	5'10"
0,0354	44	177	5,492 (x1,9936)	10,9399	15'18"

$a=\alpha \quad b=88\alpha$ 7'56"

$a=\alpha \quad b=44\alpha$ | $a=\alpha \quad b=44\alpha$

6,53933 | −1,10478

5,43914

$\alpha = \frac{2\pi}{4m+1}$

	m	4m+1
0,008	88	353

$a=\alpha \quad b=176\alpha \to 9,3013$

$n=\frac{176}{2}=88$

$a=\alpha \quad b=88\alpha$ 7'40"

7,92602

8,7009875669,599943654

Σ 9,300093122

$a=88..176\alpha$ $a=176..264$ $a=264...352\alpha$

$n=44$

α

0,008 (n=44)

$a=\frac{\alpha}{2} \quad b=\frac{\alpha}{2}(4m+1)$

8,69382

8,7025

$a=\alpha(2m+1) \quad b=2m$

$a_{III}=\alpha(2m+1) \quad b_{III}=\alpha\cdot 3m$

0,58768 R_8

1,57524 R_9

−0,61235 R_{10}

Σ 10,25311 R_A

?

$\alpha_{IV}=\alpha(3m+1) \quad b_{IV}=\alpha\cdot 4m$

$\sqrt{1}\,\sqrt{m}\,\sqrt{b}=\alpha(4m)$

$b=\alpha(m)$

$a=\alpha$

$b=\alpha(m)$

$\alpha = \frac{2\pi}{4m+1}$

0,017794 | m | 4m+1

88 | 353

n=88

$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}} = 6,8726$

$3b^{III}=a^{III}$

$2b^{II}=a^{II}$

$\alpha = \frac{2\pi}{2m+1} = \frac{2\pi}{5}$

$m=2$

$\int_{\alpha}^{2\alpha}$

a^{I}

a^{II} b^{II} a^{III} b^{III} a^{IV} b^{IV}

I II III IV

0 α 2α 4α

$90\cdot 10^9 : 10^4 = 9\cdot 10^6$

$9\cdot 10^6 : 300 = 3\cdot 10^4 = 6\times 5000$

$b=4m\alpha \quad n=m$

$3m\alpha - \frac{\alpha}{2} \quad n=\frac{m}{2}$

$2m\alpha - \frac{\alpha}{2} \quad n=\frac{m}{2}$

$m\alpha \quad n=\frac{m}{2}$

ϕ a

$\bar{A}_0 =$

$R_1 = 2R$

$R_2 = 2R$

$R_3 = 2R$

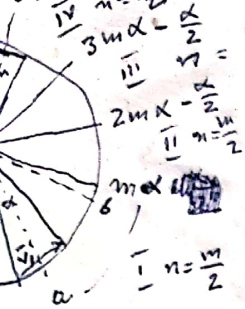
$R_4 = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$

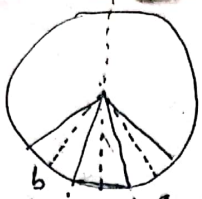
$\oint = 2R\cdot m\cdot \sin\frac{\alpha}{2}\int$

Scanned with OKEN Scanner

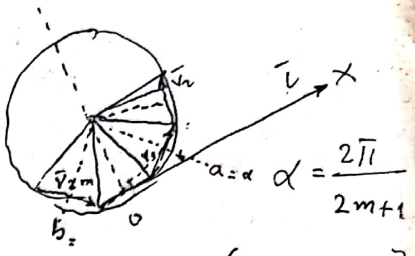
$90 \cdot 10^9 : 10^4 = 9 \cdot 10^6$

$9 \cdot 10^6 : 300 = 3 \cdot 10^4 = 6 \times 5000$

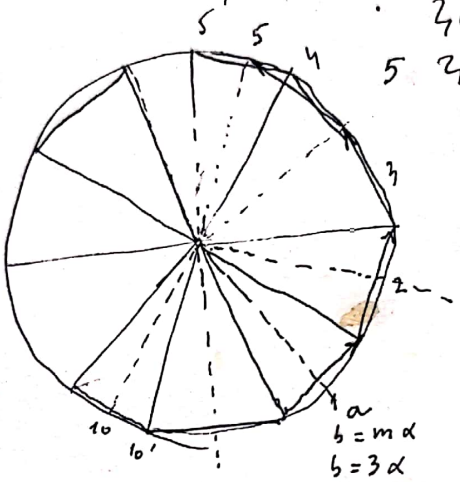




$n = 2m+1$ $\quad \alpha = 2\frac{\alpha}{2}$



$\alpha = \frac{2\pi}{2m+1}$



$b = m\alpha$

$b = 3\alpha$

$b = 2\alpha$

m	5	$5/2$
	$2,60\alpha$	
5	$2,97$	$184,48$

$\bar{V}_1 = 2R\cos\frac{\alpha}{2}\left[\bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\sin\alpha\right]$

$R_1 = 2R\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$

$R_2 = 2R\cos\frac{\alpha}{2}\sin 2\frac{\alpha}{2}$

$R_K = 2R\cos\frac{\alpha}{2}\sin K\frac{\alpha}{2}$

$\bar{A}_\phi = \frac{\bar{V}_1}{R_1} + \frac{\bar{V}_2}{R_2} + \ldots + \frac{\bar{V}_K}{R_K} + \ldots \frac{\bar{V}_{2m}}{R_{2m}}$

$\Phi_\phi =$

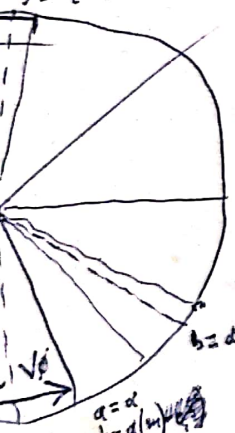
α

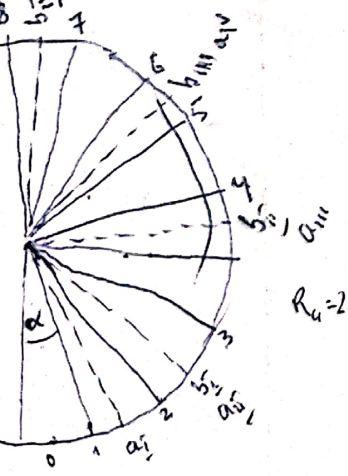
$m =$ ~~5~~

$\alpha = \frac{2\pi}{2 \cdot 5 + 1}$

$\frac{2\pi}{4m+1}$

m	$4m+1$	$\frac{4m}{4}$	α
1	5	1	
2	9	2	
3	13	3	
4	17	4	
5	21	5	

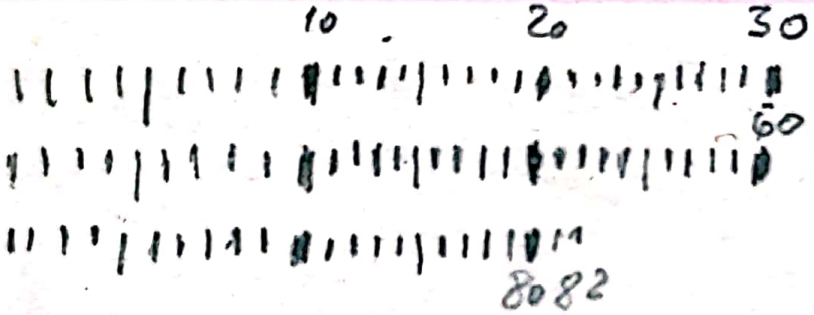




Bobină 82 spire pe bară feriti din ceas el.

20 XI 1999 9 27'

EDUSCHO-TIME



Scanned with OKEN Scanner

	D	3980	3980	0	41765	19289	22476	8318	4852	3466	3618	3618	0	11381	4061	7320	530	250	280	69592	36050	33542
	D1	3980	3980		9967	4693	5274	2638	1540	1098	588	588		2634	990	1644	530	250	280	20337	12041	8296
	D2	0			9145	4306	4839	3214	1876	1338	957	957		2714	1070	1644	0			16030	8209	7821
	D3	0			12002	5369	6633	1528	894	634	957	957		2070	876	1194	0			16557	8096	8461
	D4	0			2812	1230	1582	322	190	132	425	425		2064	420	1644	0			5623	2265	3358
	D5	0			7839	3691	4148	616	352	264	691	691		1899	705	1194	0			11045	5439	5606
	E	0	0	0	8409	3771	4638	1457	850	607	1170	1170	0	7382	1250	6132	800	400	400	19218	7441	11777
	E1	0			2999	1412	1587	514	300	214	420	420		2768	440	2328	0			6701	2572	4129
	E2	0			3997	1788	2209	514	300	214	410	410		3225	400	2825	400	200	200	8546	3098	5448
	E3	0			1413	571	842	429	250	179	340	340		1389	410	979	400	200	200	3971	1771	2200
		93417	84987	8430	1E+05	64354	77732	24000	14000	10000	11700	11700	0	63780	16920	46860	28200	21220	6980	363183	213181	150002